

36. Zeige: Hat eine Theorie erster Stufe nur endliche Modelle, so hat diese Theorie ein grösstes Modell.

Lösung:

Dies ist im Wesentlichen die Kontraposition von Aufgabe 24.

37. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über \mathbb{N} welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei \mathbb{N}^* das Ultraprodukt (bzw. die Ultrapotenz) bezüglich \mathcal{U} der \mathcal{L}_{PA} -Struktur \mathbb{N} . Schliesslich sei \mathbb{P} die Menge aller Primzahlen im standard-Modell \mathbb{N} .

- (a) Zeige, dass es im Modell \mathbb{N}^* für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbb{P}$ eine Zahl c_P gibt, so dass gilt:

$$p \mid c_P \quad \text{gdw.} \quad p \in P$$

- (b) Zeige, dass der Bereich von \mathbb{N}^* die Kardinalität 2^{\aleph_0} hat, wobei $2^{\aleph_0} := |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ und $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Lösung:

- (a) Für $P \subseteq \mathbb{P}$ endlich gibt es so ein c_P bereits im Grundmodell, z. B.

$$c_P = \prod_{p \in P} p.$$

Sei also $P \subseteq \mathbb{P}$ unendlich und $P = \{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ die eindeutige aufsteigende Abzählung von P . Betrachte die Folge $a_P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \prod_{i=0}^n p_i$ und setze $c_P := \overline{a_P}$. Nun gilt:

$$p \in P \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}: p = p_i \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \mid p \mid a_P(n)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow p \mid c_P.$$

- (b) Für die eine Richtung der Ungleichung betrachte:

$$|\mathbb{N}^*| \leq |\text{Abb}(\mathbb{N})| \leq |\text{Rel}(\mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)| = 2^{|\mathbb{N}^2|} = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$$

Für die andere Richtung betrachte zwei verschiedene Teilmengen P, Q von \mathbb{P} . Da sich a_P und a_Q an allen bis auf endlich vielen Stellen unterscheiden, gilt $c_P \neq c_Q$. Also:

$$|\mathbb{N}^*| \geq |\{c_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\}| = |\mathcal{P}(\mathbb{P})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$$

38. Beschreibe die Ordnungsstruktur des Modells aus Aufgabe 37.

Zeige dazu, dass zwischen zwei Zahlen aus dem Bereich von \mathbb{N}^* entweder endlich viele oder überabzählbar viele Zahlen liegen.

Lösung:

Seien \bar{i}_0 und \bar{i}_1 in \mathbb{N}^* . Ohne Einschränkung sei $\bar{i}_0 < \bar{i}_1$. Wir identifizieren wiederum den Anfangsabschnitt von \mathbb{N}^* mit \mathbb{N} . Dann liegt $\bar{d} = \bar{i}_1 - \bar{i}_0$ entweder in \mathbb{N} oder in $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$.

Im ersten Fall liegen endlich viele Zahlen zwischen \bar{i}_0 und \bar{i}_1 . Sei also $\bar{d} \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ und seien $i_0, i_1, d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Repräsentanten. Für $r \in (0, 1)$ betrachte $i_r := i_0 + \lceil r \cdot d \rceil$.

Wir möchten nun das Folgende zeigen:

$$\forall r, s \in (0, 1): r < s \Rightarrow \bar{i}_r < \bar{i}_s$$

Da \bar{d} in $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ liegt, gibt es für r und s wie oben ein $D \in \mathcal{U}$ so, dass die Teilfolge $d|_D$ gegen unendlich divergiert. Insbesondere:

$$\exists k \in D: \forall l \in D: l > k \Rightarrow d(l) > \frac{1}{s - r}$$

Das heisst $\forall k \in D_{>l}: i_r < i_s$, also $\bar{i}_r < \bar{i}_s$.

Daraus folgt auch, was zu zeigen war.

39. Zeige, dass das Modell aus Aufgabe 37 folgende Eigenschaft hat.

Ist $\langle a_n^* : n \in \mathbb{N} \rangle$ eine Folge von Zahlen in \mathbb{N}^* (nicht notwendigerweise Zahlen aus \mathbb{N}), so gibt es in \mathbb{N}^* eine Zahl c^* für die gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} (c^* > a_n^*)$$

Lösung:

Sei c_n ein Repräsentant von a_n^* und sei

$$c_\omega: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \max\{c_i(n)\}_{i=0}^n + 1.$$

Dann gilt für $c^* := \bar{c}_\omega$:

$$\forall n \in \mathbb{N} (c^* > a_n^*)$$