

40. Konstruiere eine $\mathcal{L}_{PA}$ -Struktur $\mathbb{N}^-$ mit demselben Bereich wie $\mathbb{N}$ (d.h. mit Bereich $\mathbb{N}$), so dass $\mathbb{N}^-$ ein Modell ist für die Axiome $PA_0 - PA_5$, in dem jedoch das Axiomenschema PA_6 nicht allgemein gilt (d.h. in $\mathbb{N}^-$ gilt PA_6 nicht für alle $\mathcal{L}_{PA}$ -Formeln φ).

Beispiel-Lösung:

Ohne Einschränkung kann der Bereich eine beliebige abzählbare Menge sein. Wir wählen $\mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$. Dabei verhalte sich jede Operation wie gewohnt auf $\mathbb{N}$. Wir benötigen noch die folgenden Definitionen:

$$s\omega = \omega \tag{1}$$

$$\forall x: \quad \omega + x = x + \omega = \omega \tag{2}$$

$$\omega \cdot 0 = 0 \cdot \omega = 0 \tag{3}$$

$$\forall x: \quad x \neq 0 \rightarrow (\omega \cdot x = x \cdot \omega = \omega) \tag{4}$$

Betrachte nun die folgende $\mathcal{L}_{PA}$ -Formel:

$$\varphi \equiv sx \neq x$$

Es gilt $\forall x: sx \neq 0$, also insbesondere $\varphi(0) \equiv s0 \neq 0$. Aus $sx \neq x$ lässt sich mit PA_1 und KONTRAPOSITION zeigen, dass $ssx \neq sx$. Also gilt $sx \neq x \rightarrow ssx \neq sx$, d. h. $\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx)$, insbesondere $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx))$.

Angenommen, PA_6 gälte für φ . Dann hätten wir insbesondere $\varphi(\omega) \equiv s\omega \neq \omega$, im Widerspruch zu (1).