Die Gödel'schen Sätze

Serie 11

$\mathsf{PA}_0 + \mathsf{PA}_1 + \mathsf{PA}_2 + \mathsf{PA}_3 + \mathsf{PA}_4 + \mathsf{PA}_5 + \neg\mathsf{PA}_6$

Musterlösung

44. Konstruiere eine $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}^-$ mit demselben Bereich wie $\mathbb{N}$ (*d.h.* mit Bereich $\mathbb{N}$), so dass $\mathbb{N}^-$ ein Modell ist für die Axiome $\mathsf{PA}_0 - \mathsf{PA}_5$, in dem jedoch das Axiomenschema PA_6 nicht allgemein gilt (*d.h.* in $\mathbb{N}^-$ gilt PA_6 nicht für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formeln φ).

Beispiel-Lösung:

Ohne Einschränkung kann der Bereich eine beliebige abzählbare Menge sein. Wir wählen $\mathbb{N} \sqcup \{\omega\}$. Dabei verhalte sich jede Operation wie gewohnt auf $\mathbb{N}$. Wir benötigen noch die folgenden Definitionen:

$$\mathrm{s}\omega = \omega \tag{1}$$
$$\forall x\colon \quad \omega + x = x + \omega = \omega \tag{2}$$
$$\omega \cdot 0 = 0 \cdot \omega = 0 \tag{3}$$
$$\forall x\colon \quad x \neq 0 \rightarrow (\omega \cdot x = x \cdot \omega = \omega) \tag{4}$$

Betrachte nun die folgende $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formel:

$$\varphi \equiv \mathrm{s}x \neq x$$

Es gilt $\forall x\colon\ \mathrm{s}x \neq 0$, also insbesondere $\varphi(0) \equiv \mathrm{s}0 \neq 0$. Aus $\mathrm{s}x \neq x$ lässt sich mit PA_1 und KONTRAPOSITION zeigen, dass $\mathrm{ss}x \neq \mathrm{s}x$. Also gilt $\mathrm{s}x \neq x \rightarrow \mathrm{ss}x \neq \mathrm{s}x$, *d.h.* $\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{s}x)$, insbesondere $\forall x\big(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathrm{s}x)\big)$.

Angenommen, PA_6 gälte für φ. Dann hätten wir insbesondere $\varphi(\omega) \equiv \mathrm{s}\omega \neq \omega$, im Widerspruch zu (1).

Ein weiteres Beispiel erhalten wir, wenn wir in der Definition des Ultraprodukts nur $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-definierbare Funktionen zulassen.

45. Sei $\mathcal{N}$ die Menge der Polynome

$$m + \sum_{k=1}^{N} a_k X^k$$

mit $m, N \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{Q}$. Weiter sei "$+$" und "$\cdot$" die übliche Addition und Multiplikation von Polynomen und für Polynome $p \in \mathcal{N}$ sei $s(p) := p + 1$.

Zeige, dass dann die Struktur $(\mathcal{N}, 0, s, +, \cdot)$ ein Nicht-Standard-Modell von $\mathsf{PA}_0 - \mathsf{PA}_5$ ist.

Beweis:

Zunächst folgen $\mathsf{PA}_1 - \mathsf{PA}_5$ direkt aus den Rechenregeln für Polynome. Ebenso folgt, dass $-1 \in \mathbb{Q}[X]$ das einzige p in $\mathbb{Q}[X]$ mit $s(p) = 0$ ist, aber da $-1 \notin \mathcal{N}$, folgt auch PA_0.