Die Gödel'schen Sätze

Serie 12

Definitionen

Musterlösung

46. Zeige, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \mathrm{coprime}(x, y) \leftrightarrow \forall z < \mathrm{s}x(z \mid x \wedge z \mid y \rightarrow z = 1)$$

Lösung:

Gemäss Vorlesung bezeichnen wir mit $\mathrm{coprime}(x, y)$, dass gilt:

$$\forall w\,(x \mid yw \rightarrow x \mid w)$$

'$\rightarrow$' Kontraposition:

$$\exists\, z \leq x\,(z \mid x \wedge z \mid y \wedge z \neq 1) \;\rightarrow\; \exists\, m, n\,(mz = x \wedge nz = y \wedge m < x \wedge n < y),$$

woraus folgt, dass $x \mid ym \wedge x \nmid m$, also $\neg\,\mathrm{coprime}(x, y)$.

'$\leftarrow$' *Wie in der Vorlesung erwähnt, müsste man hier zuerst die Division mit Rest einführen um diese Implikation zu zeigen.*

47. Sei $\psi_2(y)$ die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formel

$$\psi_2(y) \equiv y = \mathrm{ss}0\,.$$

Zeige mit Hilfe der logischen Axiomen und der Tautologien, dass gilt:

$$\mathsf{PA} \vdash \exists y\big(\psi_2(y) \wedge \big(\forall x(\psi_2(x) \rightarrow x = y)\big)$$

Das heisst: $\mathsf{PA} \vdash \exists! y\, \psi_2(y)$.

Beweis:

$$\begin{array}{rl}
\mathsf{L}_{14} & \psi_2(\mathrm{ss}0) \;\equiv\; (\mathrm{ss}0 = \mathrm{ss}0) \\
\text{(A.1)} & \psi_2(x) \rightarrow \psi_2(x) \;\equiv\; \psi_2(x) \rightarrow (x = \mathrm{ss}0) \\
(\forall) & \forall x\big(\psi_2(x) \rightarrow (x = \mathrm{ss}0)\big) \\
\mathsf{L}_5 + \mathsf{MP} + \mathsf{MP} & \psi_2(\mathrm{ss}0) \wedge \forall x\big(\psi_2(x) \rightarrow (x = \mathrm{ss}0)\big) \\
\mathsf{L}_{11} + \mathsf{MP} & \exists y\big(\psi_2(y) \wedge \forall x\big(\psi_2(x) \rightarrow (x = y)\big)\big)
\end{array}$$

48. Wir erweitern die Sprache der Peano Arithmetik durch Hinzufügen des Konstantensymbols “2”, welches wie folgt definiert ist:

$$\mathsf{2} := \mathtt{ss0}$$

(a) Erweitere nun diese Sprache nochmals durch Hinzufügen des 1-stelligen Funktionssymbols “quad(x)”, welches als “Quadrieren” definiert ist.

(b) Transformiere den Satz

$$\neg\exists x\big(\text{quad}(x) = \mathsf{2}\big)$$

in die Sprache der Peano Arithmetik.

Lösung:

(a) quad$(x) := x \cdot x$

(b) $\neg\exists x \exists w_2 \big(\psi_2(w_2) \wedge x \cdot x = w_2\big)$