28. Zeige mit Aufgabe 23.(b), dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen vollständig ist; d.h. für alle $\mathcal{L}_{\text{DLO}}$ -Sätze σ gilt:

$$\text{entweder } \text{DLO} \vdash \sigma \text{ oder } \text{DLO} \vdash \neg\sigma$$

Beweis durch Widerspruch:

Aus $\text{Con}(\text{DLO})$ folgt, dass für keinen $\mathcal{L}_{\text{DLO}}$ -Satz σ gelten kann:

$$\text{DLO} \vdash \sigma \text{ und } \text{DLO} \vdash \neg\sigma.$$

Angenommen, es gäbe einen $\mathcal{L}_{\text{DLO}}$ -Satz σ mit

$$\text{weder } \text{DLO} \vdash \sigma \text{ noch } \text{DLO} \vdash \neg\sigma.$$

Dann folgt aus $\text{Con}(\text{DLO})$, dass $\text{Con}(\text{DLO} + \sigma)$ und $\text{Con}(\text{DLO} + \neg\sigma)$. Aus dem Vollständigkeitsatz folgt, dass es abzählbare Modelle A und B dieser Theorien gibt, also

$$A \models \text{DLO} + \sigma \text{ und } B \models \text{DLO} + \neg\sigma.$$

Es lässt sich zeigen, dass A und B unendlich sind. Da $A \models \sigma$, während $B \models \neg\sigma$, sind A und B nicht elementar äquivalent, also insbesondere nicht isomorph. Dies ist ein Widerspruch zu Aufgabe 23(b).

29. Sei S eine unendliche Menge und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ultrafilter welcher alle co-endlichen Teilmengen von S enthält.

Zeige, dass $\mathcal{U}$ keine endlichen Mengen enthält.

Beweis durch Widerspruch:

Sei $x \in \mathcal{U}$ endlich. Dann gilt $(S \setminus x) \in \mathcal{U}$ nach Voraussetzung und $\emptyset = x \cap (S \setminus x) \in \mathcal{U}$ wegen der Durchschnittseigenschaft von Filtern. Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Filterdefinition.

30. Sei S eine Menge und sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ultrafilter.

(a) Zeige: Enthält $\mathcal{U}$ eine endliche Menge, so ist $\mathcal{U}$ ein Hauptultrafilter.

(b) Zeige, dass für alle Mengen $x, y \in \mathcal{P}(S)$ mit $y \subseteq x \in \mathcal{U}$ gilt:

$$\text{entweder } y \in \mathcal{U} \quad \text{oder} \quad (x \setminus y) \in \mathcal{U}$$

Beweis:

(a) Sei $x \in \mathcal{U}$ eine endliche Menge, die minimal bezüglich Anzahl Elemente ist. Dann gilt $|x| = 1$.

Wenn nicht, dann gäbe es ein nicht leeres $y \subsetneq x$.

Entweder $y \in \mathcal{U}$ oder $(x \setminus y) \in \mathcal{U}$ nach (b), beides im Widerspruch zur Minimalität von x .

Also wird $\mathcal{U}$ von x erzeugt, denn für alle $z \in \mathcal{U}$ gilt $x \cap z \neq \emptyset$, also $x \subseteq z$.

(b) Entweder $y \in \mathcal{U}$, dann sind wir fertig.

Oder $y \notin \mathcal{U}$, dann $(S \setminus y) \in \mathcal{U}$, da $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist. Also

$$x \cap (S \setminus y) = (x \setminus y) \in \mathcal{U}$$

wegen der Durchschnittseigenschaft.

Es können nicht beide Mengen im Ultrafilter liegen, da ihr Durchschnitt leer ist.

31. Sei S eine nicht-leere Menge. Auf $\mathcal{P}(S)$ definieren wir zwei binäre Operationen wie folgt:

$$x \cdot y := x \cap y \quad \text{und} \quad x + y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

(a) Zeige, dass $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist.

(b) Welche Menge ist die 0, und welche Menge ist die 1 im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$?

(c) Wie lassen sich Ideale im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ charakterisieren?

(d) Ein Ideal I in einem Ring R heisst *Primideal*, falls für alle $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in I$ gilt $r \in I$ oder $s \in I$.

Wie sehen Primideale aus im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$?

(e) Sei $I \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Primideal im Ring $(\mathcal{P}(S), +, \cdot)$ mit $S \notin I$.

Zeige, dass $\mathcal{U} = \{x \subseteq S : (S \setminus x) \in I\}$ ein Ultrafilter über S ist.

Beweis:

Verwende folgende Notation:

$$x \Delta y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$$

(a) **Behauptung 1.** Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen. Dann ist $(\mathcal{P}(S), \Delta, \cap)$ isomorph zum direkten Produkt $(\mathbb{F}_2^S, +, \cdot)$.

Beweis. Betrachte

$$j : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathbb{F}_2^S, A \mapsto \mathbb{1}_A$$

wobei $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion von A auf S bezeichne.

Zu zeigen ist nun Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation sowie die Bijektivität von j .

Für die Verträglichkeit erstelle eine Wertetafel. Seien A und B zwei beliebige Teilmengen von S . Dann ergibt sich folgende Tafel:

$\mathbb{1}_A$	$\mathbb{1}_B$	$\mathbb{1}_{A\Delta B}$	$\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$	$\mathbb{1}_{A\cap B}$	$\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Für Bijektivität sei $f \in \mathbb{F}_2^S$ beliebig. Setze $j^{-1}(f) = f^{-1}(\{1\})$, denn dann gilt $\mathbb{1}_{f^{-1}(\{1\})} = f$ und für alle $A \subseteq S$ gilt $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$.

□

- (b) Die leere Menge $\emptyset$ ist die 0 und die ganze Menge S ist die 1.
(c) Eine Familie $I \subseteq \mathcal{P}(S)$ ist genau dann ein Ideal (im algebraischen Sinn), wenn gilt:

$$\forall A, B \in I : \forall C \in \mathcal{P}(S) : A \Delta B \in I \quad \text{und} \quad C \cap A \in I$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\forall A, B \in I : \forall D \subseteq A : A \cup B \in I \quad \text{und} \quad D \in I,$$

denn zum einen gilt $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$ und zum anderen $A \Delta B \subseteq A \cup B$, während die Äquivalenz aufseiten der Schnitt- bzw. Teilmengen klar ist.

- (d) **Behauptung 2.** Entweder I ist $\mathcal{P}(S)$ oder ein maximales Ideal.

Beweis. Sei $I \neq \mathcal{P}(S)$ ein Primideal. Für alle $A \subseteq S$ gilt $A \cap (S \setminus A) = \emptyset \in I$, also gilt entweder $A \in I$ oder $(S \setminus A) \in I$. Beides zusammen kann nicht gelten, denn $I \neq \mathcal{P}(S)$ impliziert, dass $A \cup (S \setminus A) = S \notin I$. □

- (e) Mittels (c) lassen sich aus den Idealeigenschaften die Filtereigenschaften zeigen. Mit (d) folgt aus der Maximalität von I die Maximalität von $\mathcal{U}$.