# Die Gödel'schen Sätze

Serie 8

Nichtstandard-Modelle der Peano Arithmetik — Musterlösungen

Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}$ das standard-Modell der Peano Arithmetik mit Bereich $\mathbb{N}$; das heisst $\mathbb{N} = \{\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}\}$.

**32.** Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$ welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{N}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass $\mathbb{N}^\star$ ein überabzählbares Modell von $\mathsf{PA}$ ist.

(b) Zeige, dass die Modelle $\mathbb{N}^\star$ und $\mathbb{N}$ elementar äquivalent sind.

(a) Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, $\mathbb{N}^\star$ sei abzählbar. Sei $\mathbb{N}^\star = \{\overline{a_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $a_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein Repräsentant von $\overline{a_i}$ und definiere

$$a_\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \max\{a_i(n)\}_{i=0}^n + 1.$$

Dann gilt $\overline{a_\omega} \in \mathbb{N}^\star$ nach Konstruktion, aber für jedes $\overline{a} \in \mathbb{N}^\star$ gilt $\overline{a_\omega} > \overline{a}$, denn für jedes $i \in \mathbb{N}$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_i(n) \geqslant a_\omega(n)\} \subseteq \{0, \ldots, i-1\} \notin \mathscr{U}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also ist $\mathbb{N}^\star$ überabzählbar.

(b) Für jeden $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Satz $\sigma$ gilt:

$$\mathbb{N}^\star \models \sigma \quad \text{gdw.} \quad A_\sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \models \sigma\} \in \mathscr{U}.$$

Aber $A_\sigma \in \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ und $A_\sigma = \mathbb{N}$ genau dann, wenn $\mathbb{N} \models \sigma$. Das heisst

$$\mathbb{N}^\star \models \sigma \quad \text{gdw.} \quad \mathbb{N} \models \sigma,$$

was zu zeigen war.

**33.** Sei $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*} := \mathscr{L}_{\mathsf{PA}} \cup \{\mathtt{c}\}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Satz

$$\underbrace{\mathtt{s} \ \ldots \ \mathtt{s}}_{n\text{-mal}} 0 < \mathtt{c}.$$

Weiter sei $\mathsf{PA}^* := \mathsf{PA} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Theorie $\mathsf{PA}^*$ konsistent ist.

(b) Da die Signatur $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ abzählbar ist, hat $\mathsf{PA}^*$ ein abzählbares Modell $\mathbb{N}^*$.
Beschreibe die Ordnungsstruktur dieses Modells $\mathbb{N}^*$.

(a) Die Aussage lässt sich unter anderem auf die folgenden beiden Arten beweisen:

i. Das Modell $\mathbb{N}^\star$ aus Aufgabe 32 ist ein Modell für $\mathsf{PA}^*$, wenn wir beispielsweise $c^{\mathbb{N}^\star} = \overline{\mathrm{id}}$ setzen.

ii. Das Standardmodell $\mathbb{N}$ ist ein Modell für jede endliche Teiltheorie von $\mathsf{PA}^*$, wenn $c^{\mathbb{N}}$ jeweils gross genug gewählt wird. Dann folgt die Konsistenz von $\mathsf{PA}^*$ aus dem Kompaktheitssatz und der Konsistenz von $\mathsf{PA}$.

(b) Aus $\mathsf{PA}$ ist beweisbar, dass der Nachfolger jeder natürlichen Zahl von dieser verschieden ist. Dies gilt auch für $c$.
Ebenso ist beweisbar, dass jede von $0$ verschiedene Zahl einen Vorgänger hat.
Demensprechend lebt $c$ in einer Kopie von $\mathbb{Z}$, die wie folgt aussieht:

$$\mathbb{Z}_c = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} :\ x + n = c \ \vee\ x = c + n\}$$

Entsprechendes gilt für jede andere nicht-standard natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}^* \backslash \mathbb{N}$.
Für $x, y \in \mathbb{N}^* \backslash \mathbb{N}$ mit $x < y$ gilt entweder $\mathbb{Z}_x = \mathbb{Z}_y$ oder jedes Element von $\mathbb{Z}_x$ ist kleiner als jedes Element von $\mathbb{Z}_y$, in Zeichen:

$$\mathbb{Z}_x < \mathbb{Z}_y$$

**Behauptung 1.** *Die $\mathbb{Z}_x$ sind angeordnet wie die Elemente von $\mathbb{Q}$.*

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass $\{\mathbb{Z}_x \mid x \in \mathbb{N}^* \backslash \mathbb{N}\}$ die Axiome der *dichten linearen Ordnungen* erfüllt. Die ersten drei Axiome folgen aus der Ordnung auf den natürlichen Zahlen.

i. Betrachte $x, y \in \mathbb{N}^* \backslash \mathbb{N}$ so dass $\mathbb{Z}_x < \mathbb{Z}_y$. Aus $\mathsf{PA}$ ist beweisbar, dass jede natürliche Zahl entweder gerade oder ungerade ist. Dies gilt auch für $x + y$. Definiere also $z$ wie folgt

$$z = \left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil = \begin{cases} (x+y)/2 & x+y \text{ gerade} \\ (x+y+1)/2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\mathbb{Z}_x < \mathbb{Z}_z < \mathbb{Z}_y$. Also ist $\mathsf{DLO}_4$ erfüllt.

ii. Betrachte $x \in \mathbb{N}^* \backslash \mathbb{N}$. Dann haben wir $\mathbb{Z}_{\lceil x/2 \rceil} < \mathbb{Z}_x < \mathbb{Z}_{2x}$. Also ist $\mathsf{DLO}_5$ erfüllt. $\square$

Der Ordnungstyp von $\mathbb{N}^*$ entspricht dem Ordnungstyp von $\mathbb{N} \sqcup (\mathbb{N}^* \backslash \mathbb{N})$ und somit also dem Ordnungstyp von $\mathbb{N} \sqcup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Z})$.

**34.** Seien $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$ und $\mathsf{PA}^*$ wie in Aufgabe 33. Zu $\mathsf{PA}^*$ fügen wir nun alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Sätze $\sigma$ hinzu, für die gilt: $\mathbb{N} \models \sigma$. Die so erhaltene Theorie sei $\mathsf{PA}^{**}$

(a) Zeige, dass die $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^{**}}$-Theorie $\mathsf{PA}^{**}$ konsistent ist.

(b) Sei $\mathbb{N}^{**}$ ein abzählbares Modell von $\mathsf{PA}^{**}$.
Sind die Modelle $\mathbb{N}^{**}$ und $\mathbb{N}$ als Modelle von $\mathsf{PA}$ isomorph oder zumindest elementar äquivalent?

(a) Die Aussage lässt sich wiederum auf mindestens zwei Arten beweisen:

i. Das Modell $\mathbb{N}^\star$ aus Aufgabe 32 ist ein Modell für $\mathsf{PA}^{**}$, wenn wir beispielsweise $c^{\mathbb{N}^\star} = \overline{\mathrm{id}}$ setzen. (Da $\mathbb{N}^\star$ und $\mathbb{N}$ als Modelle von $\mathsf{PA}$ elementar äquivalent sind, ist $\mathbb{N}^\star$ auch ein Modell für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Sätze $\sigma$, die wir zu $\mathsf{PA}^*$ hinzugefügt haben.)

ii. Das Standardmodell $\mathbb{N}$ ist ein Modell für jede endliche Teiltheorie von $\mathsf{PA}^{**}$, wenn $c^{\mathbb{N}}$ jeweils gross genug gewählt wird.

(b) Die Modelle können nicht isomorph sein, da sie unterschiedlichen Ordnungstyp haben. (Ordnung lässt sich in $\mathsf{PA}$ formulieren, also muss sie von $\mathsf{PA}$-Isomorphismen erhalten werden.)
Sie sind allerdings elementar äquivalent. Sei nämlich $\sigma$ ein $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Satz, dann gilt entweder

$$\mathbb{N} \models \sigma \Rightarrow \sigma \in \mathsf{PA}^{**} \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \sigma$$

oder

$$\mathbb{N} \not\models \sigma \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \models \neg\sigma \Rightarrow \mathbb{N}^{**} \not\models \sigma.$$

**35.** Zeige, dass es überabzählbar viele paarweise nicht-isomorphe abzählbare Modelle von $\mathsf{PA}$ gibt, welche alle elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind.

Beweis:

Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N}$ die Menge aller Standard-Primzahlen. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ sei $\psi_p$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}^*}$-Satz $p \mid c$ (“$p$ teilt $c$”).
Für jedes $P \subseteq \mathbb{P}$ sei

$$\mathsf{PA}^*_P := \mathsf{PA}^* \cup \{\varphi_p \mid p \in P\} \cup \{\neg\varphi_p \mid p \notin P\},$$

sei

$$\mathsf{PA}^{**}_P := \mathsf{PA}^*_P \cup \{\sigma\ \mathscr{L}_{\mathsf{PA}}\text{-Satz} \mid \mathbb{N} \models \sigma\}$$

und sei $\mathbb{N}^{**}_P \models \mathsf{PA}^{**}_P$ ein abzählbares Modell. Dann gilt insbesondere $\mathbb{N}^{**}_P \models \mathsf{PA}$.
Wie oben gesehen sind all diese Modelle nach Konstruktion elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$.
Gewisse können auch isomorph zueinander sein.
Sind jedoch $M_1, M_2 \in \{\mathbb{N}^{**}_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\}$ zwei verschiedene, aber isomorphe Modelle und $f : M_1 \to M_2$ ein $\mathsf{PA}$-Isomorphismus, dann gilt $f(c^{M_1}) \neq c^{M_2}$. Da die Modelle alle abzählbar sind, können sie jeweils nur zu abzählbar vielen anderen Modellen isomorph sein. In der Menge $\{\mathbb{N}^{**}_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\}$ gibt es also überabzählbar viele nicht isomorphe Modelle von $\mathsf{PA}$, die elementar äquivalent zu $\mathbb{N}$ sind – was zu zeigen war.