Die Gödel'schen Sätze Serie 9

endliche Modelle & Modelle von PA Musterlösungen

36. (a) Zeige: Eine Theorie erster Stufe mit beliebig grossen endlichen Modellen hat beliebig grosse unendliche Modelle.

(b) Zeige: Hat eine Theorie erster Stufe nur endliche Modelle, so hat diese Theorie ein grösstes Modell.

(c) Begründe: Die Theorie der endlichen Körper lässt sich nicht in der Logik erster Stufe ausdrücken.

Beweis:

(a) Sei T die besagte Theorie. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell $M_n \models \mathsf{T}$ mit $|M_n| > n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei φ_n der Satz

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (x_1 \neq x_2 \wedge \cdots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \cdots \wedge x_2 \neq x_n \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \neq x_n)$$

und sei M_ω das Ultraprodukt bezüglich eines Ultrafilters über $\mathbb{N}$, welcher den Fréchet-Filter enthält. Dann gilt $M_\omega \models \mathsf{T} \cup \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, denn φ_n ist jeweils nur in endlich vielen Modellen nicht erfüllt.
Demnach ist M_ω ein unendliches Modell von T, also gibt es nach dem AUFSTEIGENDEN SATZ VON LÖWENHEIM-SKOLEM beliebig grosse unendliche Modelle von T.

(b) Kontraposition von (a): Besitzt eine Theorie keine unendlichen Modelle, so besitzt sie nach (a) nicht beliebig grosse endliche, also (mindestens) ein grösstes Modell.

(c) Da es beliebig grosse endliche Körper gibt (z. B. $\forall p \in \mathbb{P} : \mathbb{F}_p$), gäbe es nach (a) unendliche Modelle von endlichen Körpern – ein Widerspruch.

37. Sei $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$ welcher den Fréchet-Filter enthält. Weiter sei $\mathbb{N}^\star$ das Ultraprodukt (*bzw.* die Ultrapotenz) bezüglich $\mathscr{U}$ der $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}$. Schliesslich sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen im standard-Modell $\mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass es im Modell $\mathbb{N}^\star$ für jede Teilmenge $P \subseteq \mathbb{P}$ eine Zahl c_P gibt, so dass gilt:

$$p \mid c_P \quad \text{gdw.} \quad p \in P$$

(b) Zeige, dass der Bereich von $\mathbb{N}^\star$ die Kardinalität $2^{\aleph_0}$ hat, wobei $2^{\aleph_0} := |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis:

(a) Für $P \subseteq \mathbb{P}$ endlich gibt es so ein c_P bereits im Grundmodell, z. B. $c_P = \prod_{p \in P} p$. Sei also $P \subseteq \mathbb{P}$ unendlich und $P = \{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ die eindeutige aufsteigende Abzählung. Betrachte die Folge

$$a_P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \prod_{i=0}^{n} p_i$$

und setze $c_P := \overline{a_P}$. Nun gilt:

$$p \in P \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} : p = p_i \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : p \mid a_P(n)\} \in \mathscr{U} \Leftrightarrow p \mid c_P.$$

(b) i. **Behauptung 1.** $|\mathbb{N}^\star| \leqslant 2^{\aleph_0}$

Beweis.

$$|\mathbb{N}^\star| \leqslant |\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| \leqslant |\mathrm{Rel}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| = |\mathscr{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N} \times \mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$$

□

ii. **Behauptung 2.** $|\mathbb{N}^\star| \geqslant 2^{\aleph_0}$

Beweis. Für alle $P, Q \subseteq \mathbb{P}$ mit $P \neq Q$ gilt $c_P \neq c_Q$, da unterschiedliche Teilbarkeiten für die beiden Zahlen gelten. Also gilt:

$$|\mathbb{N}^\star| \geqslant |\{c_P \mid P \subseteq \mathbb{P}\}| = |\mathscr{P}(\mathbb{P})| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$$

□

38. Beschreibe die Ordnungsstruktur des Modells aus Aufgabe 37.

Zeige dazu, dass zwischen zwei Zahlen aus dem Bereich von $\mathbb{N}^\star$ entweder endlich viele oder überabzählbar viele Zahlen liegen.

Beweis:

Die genaue Ordnungsstruktur ist uns noch nicht bekannt. (Siehe aber die Bemerkung am Ende der Lösung von Aufgabe 39.)

Die (auf einer Ultrafiltermenge) beschränkten Folgen in $\mathbb{N}^\star$ bilden einen Anfangsabschnitt, der sich mit $\mathbb{N}$ identifizieren lässt.
Seien $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{N}^\star$, $\overline{a} < \overline{b}$. Dann ist $\overline{d} := \overline{b} - \overline{a}$ entweder im Anfangsabschnitt $\mathbb{N}$ oder in $\mathbb{N}^\star \backslash \mathbb{N}$.
Angenommen, $\overline{d} \in \mathbb{N}$, dann liegen endlich viele Zahlen zwischen $\overline{a}$ und $\overline{b}$.
Sei also $\overline{d} \in \mathbb{N}^\star \backslash \mathbb{N}$ und seien $a, b, d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Repräsentanten. Für alle $r \in [0, 1]$ betrachte $c_r := a + \lceil rd \rceil$.

Behauptung 3.

$$\forall r, s \in [0,1] : r < s \Rightarrow \overline{c_r} < \overline{c_s}$$

Beweis. Da $\overline{d} \in \mathbb{N}^\star \backslash \mathbb{N}$, gibt es $D \in \mathscr{U}$ so, dass d auf D unbeschränkt ist. Das heisst:

$$\exists i \in D : \forall j \in D : i < j \Rightarrow d(j) \geqslant \frac{1}{s-r}$$

Also gilt:

$$\forall j \in D_{>i} : a(j) + sd(j) - a(j) - rd(j) = (s-r)d(j) \geqslant 1$$

Und schliesslich:

$$(\forall j \in D_{>i} : c_s(j) > c_r(j)) \Rightarrow \overline{c_s} > \overline{c_r}$$

□

Daraus folgt auch, was zu zeigen war.

39. Zeige, dass das Modell aus Aufgabe 37 folgende Eigenschaft hat.

Ist $\langle a_n^\star : n \in \mathbb{N} \rangle$ eine Folge von Zahlen in $\mathbb{N}^\star$ (nicht notwendigerweise Zahlen aus $\mathbb{N}$), so gibt es in $\mathbb{N}^\star$ eine Zahl $c^\star$ für die gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}(c^\star > a_n^\star)$$

Beweis:

Sei b_n ein Repräsentant von $a_n^\star$ und sei

$$b_\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \max \{b_i(n)\}_{i=0}^n + 1.$$

Dann gilt für $c^\star := \overline{b_\omega}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}(c^\star > a_n^\star)$$

(Vergleiche hierzu Aufgabe 32.)

Das bedeutet auch, der Ordnungstyp von $\mathbb{N}^\star$ kann nicht einfach $\mathbb{N} \sqcup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$ sein, denn die Folge $a_n := (n, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ ist unbeschränkt.