Die Gödel'schen Sätze

Serie 10

$\mathsf{PA}_1 + \mathsf{PA}_2 + \mathsf{PA}_3 + \mathsf{PA}_4 + \mathsf{PA}_5 + \mathsf{PA}_6 + \neg\mathsf{PA}_7$ Abgabe am 2. Dezember

40. Konstruiere eine $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Struktur $\mathbb{N}^-$ mit demselben Bereich wie $\mathbb{N}$ (*d.h.* mit Bereich $\mathbb{N}$), so dass $\mathbb{N}^-$ ein Modell ist für die Axiome PA_1–PA_6, in dem jedoch das Axiomenschema PA_7 nicht allgemein gilt (*d.h.* in $\mathbb{N}^-$ gilt PA_7 nicht für alle $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formeln φ).

Beweis:

Identifiziere $\mathbb{N}$ bijektiv mit der Menge $\{\omega\} \sqcup \mathbb{N}$. Alle Operationen, die nicht ω involvieren, seien definiert wie gewohnt.

Ausserdem gelte:

$$\mathsf{s}\omega = \omega$$

$$\forall x(\omega + x = x + \omega = \omega)$$

$$\omega \cdot 0 = 0 \cdot \omega = 0$$

$$\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow (\omega \cdot x = x \cdot \omega = \omega))$$

Dann gilt PA_7 unter anderem nicht für folgende Aussage:

$$\varphi(x) \equiv \mathsf{s}x \neq x$$

Aus PA_1 folgt $\mathsf{s}0 \neq 0$, *d. h.* $\varphi(0)$.
Mit PA_2 lässt sich aus der Annahme $\mathsf{s}x \neq x$ die Aussage $\mathsf{ss}x \neq \mathsf{s}x$ folgern. Also gilt $\mathsf{s}x \neq x \rightarrow \mathsf{ss}x \neq \mathsf{s}x$, *d. h.* $\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathsf{s}x)$, also mit Verallgemeinerung

$$\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(\mathsf{s}x)).$$

Angenommen, PA_7 gälte für φ. Dann hätten wir $\forall x\varphi(x)$, also insbesondere

$$\varphi(\omega) \equiv \mathsf{s}\omega \neq \omega.$$

Dies wäre ein Widerspruch.