

Serio, Besprechung:

- Wie wären die Klammern zu setzen, wenn keine da stehen? /
Wie wäre Formeln zu lesen?

→ Von links nach rechts

$$\varphi \wedge \varphi \vee \psi \quad \leadsto (\varphi \wedge \varphi) \vee \psi$$

$$((\forall x \varphi) \wedge \psi) \vee \psi.$$

- Was ist eine Theorie?

eine Menge nicht-logischer Axiome

(Zuerst noch Signatur: nicht-log. Symbole)

z.B.: Gruppentheorie:

$$\mathcal{L}_G = \{ \overset{\substack{\uparrow \\ F_2 \\ \uparrow \\ \text{2-stelliges} \\ \text{Fkt.-Symbol}}}{o}, \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Konstante}}}{e} \}$$

$\swarrow$ nicht-log. Symbole
 Signatur

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \exists y \cdot x \cdot y = e \\ \vdots \text{etc.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Theorie} \\ \leftarrow \text{nicht-logische Axiome} \end{array}$$

2a.) $\{0, 1, +, \cdot\}$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $\mathbb{K} \quad \mathbb{K} \quad \mathbb{F}_2 \quad \mathbb{F}_2$
 (Ring mit 1)

$\leadsto$
 reduzieren
 auf
 (haben jetzt
 kein konst.
 Symbol für
 0 mehr)

$\{+, \cdot\}$ Dann Axiome umschreiben
 $\exists x \forall y: x+y = y$ (eines $\rightarrow 0$ (heut Elem. bzgl. +))
 $\exists x \forall y: (x+y=y \wedge \exists z: y+z=x)$
 Können analog auch auf 1 verzichten.

b.) $\{0, 1, \wedge, \vee, \neg\}$ (*)
 $\mathbb{K} \quad \mathbb{K} \quad \mathbb{F}_2 \quad \mathbb{F}_2 \quad \mathbb{F}_1$
 nicht log. und/oder. Hier ~~anwenden~~ anwenden wir es auf Variable an, vorne auf Aussage. Analog $\neg$.

$$\neg 0 = 1 \quad x \wedge y = y \wedge x \quad ; \quad \wedge \text{ ass.}$$

$$\vee \quad \vee \quad , \quad \vee \text{ ass.}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \text{ distr. } \vee \text{ über } \wedge$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$$

$$\vee \quad \wedge$$

$$0 \wedge x = 0$$

$$0 \vee x = x$$

etc. vollst. Liste der Eig. der Bool'schen Alg. $\rightarrow$ S. Wiki

$\leftarrow$ geht auch komplizierter
 $0 = x \wedge \neg x$
 (*) kürzen: $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$

$\uparrow$
 kann id was weglassen? $\rightarrow$ nein
 kürzer? $\rightarrow$ Ja $\rightarrow$ nicht und

A	B	A nand B
f	f	w
f	w	w
w	f	w
w	w	f

$\rightarrow \{nand\}, \{nor\}$

$$\neg x = x \text{ nand } x = x \text{ nor } x$$

$$c.) \{K, V, +, \cdot\} (**)$$

$$R_1 \quad R_1 \quad F_2 \quad F_2$$

Axiome (unvollständig)

$$\forall a \forall b \quad ka \wedge vb \rightarrow v(a \cdot b)$$

etc.

(**) kürzen? Kod. Vwglgfen, da wir sie nicht gleichzeitig benötigen?
 Brauchen K und V , damit man nicht $\overset{VR}{v} \cdot v$ rechnet
 (alt. $\neg(va)$)

Wie schreibt man auf, dass jedes Element ein multipl. inverses hat? (im Körper)

$$\forall x \forall y : x+y = y \quad \vee (\exists z \forall w : (z \cdot w = w) \wedge \exists u : u \cdot w = z)) \quad (*)$$

$$2a) (\forall z \forall x (\neg F_2 x x = y) \wedge (\forall y (\neg R_2 z c \vee y = x)) \wedge (\forall x R_1 F_2 c x)))$$

1. Hgl. z nicht frei

2. Hgl. z frei

(*) zu Serie 0, Aufg. 2; $L_{VR} = \{V, +, \cdot\}$

$v(x)$ heisst: x ist ein Vektor

Problem; was ordnet man $r+vx$ zu? (also r im Körper)

Wir können z.B. $r+vx$ nach $\vec{0}$ schreiben, für alle
 Sache „unzulässiger“ Ausdrücke

$$R_+(x, y, z) \quad \forall x \forall y \forall z \forall z' (R_+(x, y, z) \wedge R_+(x, y, z') \rightarrow z = z')$$

„ $x+y=z$ “

Aber $R_+(1, \vec{v}, \vec{0})$ und hier muss ich ja noch $1+\vec{v}=\vec{0}$,
 weil $1+\vec{v}$ „verboten“, keine Wert zuordnen.

Nachbesprechung Serie 1, Die Gödel'schen Sätze:

$$6b.) \{ \varphi \rightarrow \neg \varphi, \neg \varphi \} \vdash \neg \varphi$$

$$L_9: (\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \varphi)$$

$$\varphi \rightarrow \neg \varphi \quad (\in T)$$

$$(\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \varphi \quad (MP)$$

$$L_1: \neg \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg \varphi)$$

$$\neg \varphi \quad (\in T)$$

$$\varphi \rightarrow \neg \varphi \quad (MP)$$

$$\neg \varphi \quad (MP)$$

$$\text{Deduktionsthem. } \{ \varphi \rightarrow \neg \varphi \} \vdash \neg \varphi \rightarrow \neg \varphi$$

$$\text{---} " \text{---} (\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \neg \varphi)$$

c.) fast analog ^{nur andere Reihenfolge} (2x (beide Richtungen) und dann
noch L_5 anwenden: $\varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow (\varphi \wedge \neg \varphi))$

$\varphi \rightarrow \neg \varphi$ $\varphi \rightarrow \neg \varphi$
 $\varphi \rightarrow \neg \varphi$ $\varphi \rightarrow \neg \varphi$
 impl. eins. impl. eins.

$$d.) \{ \varphi \} \vdash \neg \neg \varphi$$

$$L_1: \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \varphi)$$

$$L_9: (\neg \varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \neg \varphi)$$

Dann weiß ich $\varphi \in T$ (φ ist in der Theorie)

$$(\neg \varphi \rightarrow \varphi) \quad (MP)$$

$$((\neg \varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \neg \varphi) \quad (MP)$$

$$\neg \varphi \rightarrow \neg \varphi \quad (\text{Ded. Thm. auf } \{ \neg \varphi \} \vdash \neg \varphi)$$

$$\neg \neg \varphi \quad (MP)$$

$$\text{Ded. Thm. } \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi.$$

7.) $PA_4: \forall x \forall y (x + sy = s(x+y))$

$L_{12}: \forall x \varphi(x) \rightarrow \varphi(s0)$ (für x jetzt s0 einsetzen)

$\varphi(x)$ ist ein:

$\varphi(x) = \forall y (x + sy = s(x+y))$

MP: $\forall y (s0 + sy = s(s0 + y))$

$L_{12}: \forall y \neg \varphi(y) \rightarrow \neg \varphi(0)$

MP: $s0 + s0 = s(s0 + 0) \leftrightarrow R_1 s(s0 + 0) (*)$

$PA_3: \forall x (x + 0 = x)$

$L_{12}: \text{Wenn das gilt, dann folgt } \rightarrow s0 + 0 = s0$

MP: $s0 + 0 = s0$ (was nicht fertig!) $R_1 x \leftrightarrow s0 + s0 = x$

Δ $L_{18}:$

MP $s(s0 + 0) = ss0$ und diese und diese Gl. zusammenbringen
Wenn ich Terme habe,
die gleich sind, dann
kann ich die ineinander
ersetzen

$L_{17}: s(s0 + 0) = ss0 \rightarrow (R_1 s(s0 + 0) \rightarrow R_1(ss0))$

$R_1 x \leftrightarrow s0 + s0 = x$ ist, braucht man für Relation
und neue Schritte.

2x MP $s0 + s0 = ss0$

1. Mal $R_1(s0 + 0) \rightarrow R_1(ss0)$ bzw. (*) dann 2. Mal MP

Allg. Tip für Bew.:

- Übungsserie
- Handlun aus Rückwärts
- Überlege, wie man es mathematisch bew. hat dann übersetzen.

oder ohne Rel. zu def, dafür aber L_{17} ein bisschen komplizierter

und $s0 + s0 = s0 + s0$ L_{16}

(*) $L_{17} s(s0 + 0) = ss0 \rightarrow (s0 + s0 = s(s0 + 0) \rightarrow s0 + s0 = ss0)$

2x MP $s0 + s0 = ss0$

Haben $s0 + s0 = s0 + s0$ mit L_{16} und (*) $\rightarrow$ brauchen L_{15} und

2x MP um zu sagen: haben $s0 + s0 = s0 + s0 \wedge (*) \dots$

$$3e.) \forall x (x // 3 = k : \Leftrightarrow 3k \leq x \wedge x < 3(k+1))$$

(S1/Bc3)

(ind $\forall k$)

zuerst Relation dann von F_k , die dann k rausfällt.

oder

~~$$\forall x (\text{---} " \text{---} : \Leftrightarrow \text{---} " \text{---})$$~~

Mit $\lfloor x/3 \rfloor$

$$a.) \exists z: x+z=y$$