Serie 2, GS, Nachbesprechung:

12a.) $M = \{0\}$

$s0 = 0, \quad 0+0 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0$

Jetzt müsste man noch Peano-Axiome überprüfen.

$M_5 = \{0,1,2,3,4\}$

$sx \equiv x \oplus 1 \mod 5$

$x+y \equiv x \oplus y \mod 5$

$x \cdot y \equiv x \odot y \mod 5$

Da PA_1 nicht gilt, daß 0 Nachfo von einer Zahl sein. $\to \mathbb{Z} \mod 5$.

b.) Bisschen mühsamer

$M = \{0,1\}, \quad s0 = 1, \quad s1 = 1$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

(

·	0	1
0	0	1
1	1	0

würde Peano Axiom nicht erfüllen, nämlich, dass $x \cdot 0 = 0$.)

$M_5 = \{0,1,2,3,4\}$

$s0 = 1, \quad s1 = 2, \quad s2 = 3, \quad s3 = 4, \quad s4 = 1$

$sx = sy \to x = y$ fällt (in b) als Peano-Ax. raus.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	1
2	2	3	4	1	2
3	3	4	1	2	3
4	4	1	2	3	4

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	2	4
3	0	3	2	1	4
4	0	4	4	4	4

nicht $\mathbb{Z} \mod 5$ wie in a.) da 0 nicht mehr Nachfolger einer Zahl sein darf (da PA_1 wieder gilt)

$1+1 = 1+s0 = s(1+0) = s1 = 2$

usw. $\to$ gibt Tabelle

1a.) „$T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg con(T \cup \{\varphi\})$" (das ist z)

- $T \vdash \neg\varphi \Rightarrow T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$

  aber $T \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$

  Also mit L_5 $T \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. $\Rightarrow$ nicht konst. ✓.

Andere Richtung: „$\neg con(T \cup \{\varphi\}) \Rightarrow T \vdash \neg\varphi$" (z)

?

- $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ darf man es hier verwenden?

? Deduktionstheorem. $T \vdash \varphi \to \neg\varphi$

Ge.) $T \vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$

$T \vdash \neg\varphi$ (MP)

$\neg con(S)$ $S \vdash \psi \wedge \neg\psi$ Verallgemeinerungsregel?

$L_{10}: \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$

Bzw. ohne Deduktionstheorem.?

↳ nächstes Mal!

$T \nvdash \neg\varphi \Rightarrow con(T)$

b.) φ unabh. von T

$\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $con(T \cup \{\varphi\})$ und $con(T \cup \{\neg\varphi\})$

$\overset{\text{a.)}}{\Longleftrightarrow}$ $T \nvdash \neg\varphi$ und $T \nvdash \varphi$

10 a.) „$PA \cup \{\psi\} \vdash \varphi$“ → z.z.:

$\exists y\,(s(y) = x)$

(∀) Verallgemeinerungsregel

$\forall x\, \exists y\,(s(y) = x)$ (∀)

b.) Bew.: „$PA \vdash \psi \to \varphi \Rightarrow \neg Con(PA)$“

$A \Rightarrow B$ d.h. A ist hinreichend für B und B ist notwendig für A.

Bew.:

$\exists y\,(s(y) = x) \to \forall x\, \exists y\,(s(y) = x)$

Verallgem.regel anwenden

$\forall x\,(\exists y\,(s(y) = x) \to \forall x\, \exists y\,(s(y) = x))$ (∀)

Für die freie x in $(\exists y(s(y)=x))$ (ohne ∀x) kann ich etwas einsetzen, nämlich/konkret

$(\exists y\,(s(y) = s(0))) \to \forall x\, \exists y\,(s(y) = x)$ L_{12} + MP

$s(0) = s(0)$ L_{16}

$\exists y\,(s(y) = s(0))$ L_{13} + MP

$\forall x\, \exists y\,(s(y) = x)$ Weil linke Seite wahr also kann ich rechte Seite folgern mit MP

MP nicht eingesetzt, sondern Seite gefolgt (mit MP).

$\exists y\,(s(y) = 0)$ L_{12} + MP

$\forall y\,(s(y) \neq 0)$ PA_1

Brauchen noch Tautologie (S.0) $\exists y\,(s(y) = 0) \leftrightarrow \forall y\,(s(y) = 0)$
Aber wie man sich vergewissert, dass das Tautologie ist, noch nicht gemacht → s. nächstes Mal (formaler Bew. dieser Tautologie).

↯

5216

8.) Vorgehen (nicht ganz expl.)

$\{x=y,\ y=z\} \vdash x=z$

L_{17}, L_{16}, L_5, beide Aussagen aus Theorie, und häufig MP.

verall. Ded. Thm. kann ich dann folgern:

$$(x=y \wedge y=z) \rightarrow x=z$$

$3 \times (\forall)$: $\forall x \forall y \forall z ((x=y \wedge y=z) \rightarrow x=z)$

Verallg.regel

kann auch $\wedge\ x \circ e = x$ noch schreiben (ist dann nicht optimal, [illegible] aber richtig). Beim [illegible] wir wissen über Gruppentheorie. Muss beides links od. beides rechts sein.

9a.) $\forall x \forall y \forall z\ (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$

$\exists e (\forall x (e \circ x = x \wedge \exists y: y \circ x = e)$

$\exists e$: linksneutr.

$\exists$ Elmt, das linksinv.

b.) $\exists x \forall y\ (x \circ x) \circ y = y$

linksinv. / neutr. Element sind.

(<u>Bmkg.:</u> kontrastiere mit 21).