Nachbesprechung, Serie 3; die GS:

16.) Beh.: $M_1 \cong M_2$, $M_3 \cong M_4$, $M_1 \ncong M_3$.

Bew. der Beh.:

„$M_1 \cong M_2$":

$$f: \mathbb{R} \to (0,2), \quad x \longmapsto \begin{cases} e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ 2 - \frac{1}{x+1}, & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Streng mon. da es ~~Ordg.~~ ein ordg. erhalten soll.
stetig da es bij. sein soll

„$M_3 \cong M_4$":

$$g: \mathbb{R} \to (0,2), \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{e^{x-1}}{2}, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{3-x}, & x \in [1,2] \\ 2 - e^{2-x}, & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

„$M_1 \ncong M_3$":

Ang. $M_1 \ncong M_3$

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bij. streng mon. wachsend / steigend.

$\forall n \in \mathbb{N}: h(n) = h(c_n^{M_1}) = c_n^{M_3} = 2 - \frac{1}{n+1}$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ \mathbb{R}}} h(x) \overset{\sim}{=} \lim_{x \to \infty} 2 - \frac{1}{x+1} = 2 \;\text{↯}$$

(h eigentlich nur auf $\mathbb{N}$ deshalb asymptot. gleich (nicht gleich))

Da es im rechten Modell nichts (grösseres als) 2 gibt.

$\ulcorner\; x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \;\lrcorner$

Haben es nur auf $\mathbb{N}$ betrachtet. Wieso genügt das?
Evt. anderes h. Aber

$$\forall x \in \mathbb{R}: \exists n_x \in \mathbb{N}: x < n_x \Rightarrow h(x) < h(n_x) < 2$$

15.) M_1: $B_1 = \{a\}$, $R = \emptyset$ (leere Relation)

Geht's kleiner? Nein, sonst wäre es reflexiv (Brauchen mind. ein Element)

M_2:
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[r] & b \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

M_3:
$$\begin{tikzcd} a \arrow[loop above] \arrow[r, shift left] & b \arrow[loop above] \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & c \arrow[loop above] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

Andere Komb.: $\forall \varphi_i$'s erfüllt, keine etc.

14.) /

13.) M_1 ist isom. zu $\mathbb{Z}_4$:

$\circ$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	γ	δ	α
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	α	β	γ

α als Neutralelement

$M_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

α als Neutr.el.

~~Nicht~~ $M_1 \not\equiv M_2$ → Finde Satz, welcher in einem Modell gilt und im anderen nicht. z.B.

$(\forall x : x \circ x = \alpha)$ φ

$\left.\begin{array}{l} M_2 \models \varphi \\ M_1 \not\models \varphi \end{array}\right\} M_1 \not\equiv M_2$. //