

ZEICHEN & BEDEUTUNG

SYNTAX & SEMANTIK

Die mathematische Logik zerfällt in **Syntax** (Theorie der Beziehungen zwischen den Zeichen) und **Semantik** (Lehre der Bedeutung der Symbole, bzw. deren Interpretation). Im Vergleich zur Musik könnte man sagen, dass die Syntax (*d.h.* die formale Logik) der Partitur entspricht, welche Schwarz auf Weiss festhält, welche Noten gespielt werden sollen, während die Semantik der Umsetzung einer Partitur in hörbare Musik entspricht, welche sich zwar an die Partitur halten muss, in der Interpretation der Partitur aber frei ist. Obwohl die ganze Musik schon in der Partitur enthalten ist, so wird sie doch erst durch die Interpretation mit Leben erfüllt. Nehmen wir zum Beispiel als Partitur die Gruppenaxiome, so erhalten auch diese erst durch das betrachten konkreter Gruppen (*d.h.* erst durch die Interpretation) ihre Bedeutung.

Im Folgenden werden ein paar Parallelen zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene der Mathematik aufgezeigt. Diese sollen helfen, den logischen Aufbau (*bzw.* das Fundament) der Mathematik besser zu verstehen.

SYNTAKTISCHE EBENE

Terme. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (T1)–(T3) aufgebaut werden. Zum Beispiel ist das Konstantensymbol e der Gruppentheorie ein Term.

Formeln. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (F1)–(F5) aufgebaut werden. Formeln sind weder wahr noch falsch; auf der syntaktischen Ebene gibt es keinen Wahrheitsbegriff!

Logische Axiome. Das sind Formeln, genauer *Formelschemen*, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können.

Nicht-logische Axiome. Das sind Formeln (*bzw.* Formelschemen) welche nicht-logische Symbole enthalten, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können. Zum Beispiel sind die Gruppenaxiome, welche die nicht-logischen Symbole “ e ” und “ \circ ” enthalten, nicht-logische Axiome.

SEMANTISCHE EBENE

Objekte. Terme sind Namen für Objekte. Durch die Interpretation wird ein Term (Name) zu dem *Objekt*, welches er bezeichnet. Zum Beispiel wird das Konstantensymbol e durch die Interpretation zum Neutralelement e einer Gruppe, e ist also ein Objekt.

Aussagen. Wird eine Formel interpretiert, so wird sie zu einer konkreten Aussage über bestimmte Objekte die entweder wahr oder falsch ist; und zwar unabhängig davon, ob wir ihren Wahrheitswert kennen.

Tautologien. Egal wie wir ein logisches Axiom interpretieren, die Aussage die wir erhalten ist immer wahr, *d.h.* eine Tautologie. Die logischen Axiome sind so gewählt, dass aus ihnen alle Tautologien hergeleitet werden können.

Axiomensystem einer Theorie. Das sind Axiome (*d.h.* Grundaussagen), welche am Anfang einer Theorie (*z.B.* Gruppentheorie) stehen. Die nicht-logischen Symbole werden dann so interpretiert, dass alle Axiome wahr werden.

Ausser in der formalen Logik befinden wir uns in der Mathematik immer auf der semantischen Ebene. Auch wenn wir zum Beispiel eine allgemeine Gruppe untersuchen, besteht diese Gruppe in unserer Vorstellung aus Elementen, also aus Objekten, auf denen eine konkrete binäre Operation (mit gewissen Eigenschaften) definiert ist. Sogar wenn wir mathematische Beweise führen, bleiben wir auf der semantischen Ebene — wir können aber jeden mathematischen Beweis in einen formalen Beweis der syntaktischen Ebene übersetzen, dessen Korrektheit sogar von einem Computer überprüft werden kann.

Obwohl mathematische Theorien (wie *z.B.* die Gruppentheorie) üblicherweise auf nicht-logischen Axiomen beruhen, wird der Übergang von der syntaktischen Ebene der nicht-logischen Axiome (*z.B.* der Gruppenaxiome) auf die semantische Ebene (*z.B.* der konkreten Gruppen) im Allgemeinen nicht vollzogen.

In der Gruppentheorie mag dies noch statthaft sein, denn wir können Modelle von endlichen Gruppen effektiv angeben. Wesentlich anders ist es aber bei der Mengenlehre, denn es gibt kein umfassendes System, in welchem die Mengenlehre existiert. Deshalb muss die axiomatische Mengenlehre auch aus den Axiomen aufgebaut werden und bleibt in einem gewissen Grad immer auf der syntaktischen Ebene.