

TAUTOLOGIEN & FORMALE BEWEISE

$$(A.1) \quad \vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

$$(A.0) \quad \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$$

$$(B) \quad \{\psi, \varphi\} \vdash \varphi \wedge \psi$$

$$(C) \quad \vdash (\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\psi \rightarrow \forall x \varphi) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi)]$$

$$(D.1) \quad \{\varphi_0 \rightarrow \varphi_1, \varphi_1 \rightarrow \varphi_2\} \vdash \varphi_0 \rightarrow \varphi_2$$

$$(D.2) \quad \{\varphi_0 \rightarrow \psi, \varphi_1 \rightarrow \psi\} \vdash (\varphi_0 \vee \varphi_1) \rightarrow \psi$$

$$(D.3) \quad \{\psi \rightarrow \varphi_0, \psi \rightarrow \varphi_1\} \vdash \psi \rightarrow (\varphi_0 \wedge \varphi_1)$$

$$(E) \quad \vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$$

$$(F.1) \quad \vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$$

$$(F.2) \quad \vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$$

$$(F.0) \quad \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$$

$$(G.1) \quad \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

$$(G.2) \quad \vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(G.0) \quad \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$$

$$(H.0) \quad \{\varphi \leftrightarrow \psi\} \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$$

$$(H.1) \quad \{\varphi \leftrightarrow \varphi', \psi \leftrightarrow \psi'\} \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi' \rightarrow \psi')$$

$$(H.2) \quad \{\varphi \leftrightarrow \varphi', \psi \leftrightarrow \psi'\} \vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi' \vee \psi')$$

$$(H.3) \quad \{\varphi \leftrightarrow \varphi', \psi \leftrightarrow \psi'\} \vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi' \wedge \psi')$$

$$(I.1) \quad \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \wedge \varphi_1)$$

$$(I.2) \quad \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \leftrightarrow \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$$

$$(J.1) \quad \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \leftrightarrow (\varphi_2 \vee \varphi_1)$$

$$(J.2) \quad \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3 \leftrightarrow \varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

$$(K.1) \quad \vdash (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

$$(K.2) \quad \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$(K.0) \quad \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$$

$$(L.1) \quad \vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$$

$$(L.2) \quad \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$(L.0) \quad \vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$(M.1) \quad \vdash (\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \varphi_3)$$

$$(M.2) \quad \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$(N.1) \quad \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \rightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

$$(N.2) \quad \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3$$

$$(N.0) \quad \vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee \varphi_3 \leftrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_3) \wedge (\varphi_2 \vee \varphi_3)$$

$$(O) \quad \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \varphi_3 \leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_3) \vee (\varphi_2 \wedge \varphi_3)$$

$$(P.1) \quad \vdash x = y \leftrightarrow y = x$$

$$(P.2) \quad \vdash (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$$

$$(Q.1) \quad \vdash \varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y) \quad [\text{falls } y \text{ in } \varphi(x) \text{ nicht vorkommt}]$$

$$(Q.2) \quad \vdash \exists x\varphi(x) \leftrightarrow \exists y\varphi(y) \quad [\text{falls } y \text{ in } \varphi(x) \text{ nicht vorkommt}]$$

$$(Q.3) \quad \vdash \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \forall y\varphi(y) \quad [\text{falls } y \text{ in } \varphi(x) \text{ nicht vorkommt}]$$

$$(R.1) \quad \{\varphi \leftrightarrow \psi\} \vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi$$

$$(R.2) \quad \{\varphi \leftrightarrow \psi\} \vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\psi$$

$$(S.1) \quad \vdash \neg \exists x \varphi \rightarrow \forall x \neg \varphi$$

$$(S.2) \quad \vdash \neg \forall x \neg \varphi \rightarrow \exists x \varphi$$

$$(S.3) \quad \vdash \exists x \varphi \rightarrow \neg \forall x \neg \varphi$$

$$(S.0) \quad \vdash \exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$$

$$(T) \quad \vdash \forall x \varphi \leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$$

$$(U.1) \quad \vdash \exists x \exists y \varphi \leftrightarrow \exists y \exists x \varphi$$

$$(U.2) \quad \vdash \exists x \exists x \varphi \leftrightarrow \exists x \varphi$$

$$(U.3) \quad \vdash \forall x \exists x \varphi \leftrightarrow \exists x \varphi$$

$$(U.4) \quad \vdash \exists x \forall x \varphi \leftrightarrow \forall x \varphi$$

$$(V.1) \quad \vdash (\exists x \varphi \wedge \exists y \psi) \leftrightarrow (\exists x \exists y (\varphi \wedge \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi), y \notin \text{frei}(\varphi)]$$

$$(V.2) \quad \vdash (\forall x \varphi \wedge \forall y \psi) \leftrightarrow (\forall x \forall y (\varphi \wedge \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi), y \notin \text{frei}(\varphi)]$$

$$(V.3) \quad \vdash (\exists x \varphi \wedge \forall y \psi) \leftrightarrow (\exists x \forall y (\varphi \wedge \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi), y \notin \text{frei}(\varphi)]$$

$$(V.4) \quad \vdash (\exists x \varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x (\varphi \wedge \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi)]$$

$$(V.5) \quad \vdash (\forall x \varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x (\varphi \wedge \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi)]$$

$$(W.1) \quad \vdash (\exists x \varphi \vee \exists y \psi) \leftrightarrow (\exists x \exists y (\varphi \vee \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi), y \notin \text{frei}(\varphi)]$$

$$(W.2) \quad \vdash (\forall x \varphi \vee \forall y \psi) \leftrightarrow (\forall x \forall y (\varphi \vee \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi), y \notin \text{frei}(\varphi)]$$

$$(W.3) \quad \vdash (\exists x \varphi \vee \forall y \psi) \leftrightarrow (\exists x \forall y (\varphi \vee \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi), y \notin \text{frei}(\varphi)]$$

$$(W.4) \quad \vdash (\exists x \varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x (\varphi \vee \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi)]$$

$$(W.5) \quad \vdash (\forall x \varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\forall x (\varphi \vee \psi)) \quad [\text{für } x \notin \text{frei}(\psi)]$$