

DIE GÖDEL'SCHEN SÄTZE

PLAN FÜR DAS SEMINAR

Das Seminar folgt dem Buch *Gödel's Theorems and Zermelo's Axioms* (zweite Auflage, 2025), welches man mit ETH Zugang kostenlos bei Springer herunterladen kann.

Pro Woche gibt es eine oder zwei Präsentationen, wobei jede Präsentation von einer Gruppe aus ungefähr zwei Personen gehalten wird. Jede Gruppe übernimmt entweder eine Doppelstunde oder zwei Einzelstunden. Die Vorträge sind unten auf die Teilnehmenden $\{0, 1, 2, \dots, 25\}$ aufgeteilt. Bitte melden Sie sich bis am 24. September bei Silvan Horvath (horvaths@inf.ethz.ch) mit Ihrem Wunsch, auf welche dieser Zahlen sie gerne abgebildet werden wollen (am besten mit mehreren Optionen, das macht es etwas einfacher).

Wichtig: Es handelt sich um ein Seminar und nicht um eine Vorlesung. Die Idee ist also nicht, einfach an der Wandtafel das Buch vorzulesen, sondern jeweils die Kernideen zu extrahieren und zu präsentieren. Interaktionen mit dem Publikum/offene Diskussionen sind ebenfalls erwünscht.

22.09 Einführung

Zuhause lesen Kapitel 1

- 29.09 1. Stunde (Student*innen 0 und 1):** Deduktionstheorem (Kap. 2: The Deduction Theorem), je nach Zeit einige Konsequenzen daraus (Examples 2.1, 2.2, 2.3)
- 2. Stunde (Student*innen 2 und 3):** Consistency and Compactness, einige Übungsaufgaben aus 2.9, 2.10, 2.11,

Zuhause lesen Kapitel 3 bis und mit Seite 45

- 6.10 1. Stunde (Student*innen 4 und 5):** Soundness Theorem inkl. Fact 3.8, Beweis von folgendem:

Sei \mathcal{L}_{PA^+} die Sprache \mathcal{L}_{PA} mit einem zusätzlichen Konstantensymbol c . Schreibe $x < y$ als Abkürzung für den Satz $\exists r(x + r = y)$. Sei PA^+ die Theorie PA mit den zusätzlichen Axiomen

$$c > 0, \quad c > s0, \quad c > ss0, \quad c > sss0, \quad \dots$$

PROPOSITION. *Die Theorie PA^+ ist konsistent.*

- 2. Stunde (Student*innen 6 und 7):** Ex. 3.4 und 3.7, Completion of Theories

Zuhause lesen: nichts

- 13.10 Doppelstunde (Student*innen 8 und 9):** Kapitel 4 (Lindenbaum's Lemma)

Zuhause lesen: nichts

- 20.10 Doppelstunde (Student*innen 10 und 11):** Kapitel 5 (Completeness Theorem)

Zuhause lesen: Kapitel 6

27.10 Doppelstunde (Student*innen 12 und 13): Kapitel 7: The Standard Model, Ex. 7.1

Zuhause lesen: nichts

03.11 Doppelstunde (Student*innen 14, 15 und 16) Kapitel 7: Countable Non-Standard Models, einige Aufgaben, insbesondere Ex. 7.4 und Ex. 7.5

Zuhause lesen: nichts

10.11 Doppelstunde (Student*innen 17, 18 und 19): Kapitel 15 (Models and Ultraproducts)

Zuhause lesen: Kapitel 8 (Arithmetic in Peano Arithmetic), bis Mitte Seite 95

17.11 1. Stunde (Student*innen 4 und 5): Rest Kapitel 8
2. Stunde (Student*innen 6 und 7): Kapitel 9: Natural Numbers in Peano Arithmetic

Zuhause lesen: nichts

14.11 Doppelstunde (Student*innen 20 und 21): Kapitel 9: Gödel's β -function, bis und ohne Encoding Finite Sequences

Zuhause lesen: nichts

01.12 Doppelstunde (Student*innen 22 und 23): Rest von Kapitel 9 (Encoding)

Zuhause lesen: nichts

08.12 Doppelstunde (Student*innen 24 und 25): Kapitel 10 (The First Incompleteness Theorem), bis und mit erste Hälfte Seite 129

Zuhause lesen: nichts

15.12 Alternative Beweise des Unvollständigkeitssatzes.
1. Stunde (Student*innen 0 und 1): Via Halteproblem (idealerweise haben Student*innen 0 und 1 die Vorlesung "Theoretische Informatik" besucht)
2. Stunde (Student*innen 2 und 3): Via Berry's Paradox (siehe z.B. [2])

References

- [1] Halbeisen, Lorenz and Krapf, Regula, **Gödel's Theorems & Zermelo's Axioms: a firm foundation of mathematics** (2nd ed.), Birkhäuser-Verlag, Basel (2025).
- [2] Boolos, George, **A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem**, Notices of the American Mathematical Society (36.4, 1989), pages 388-390.