Axiomatische Mengenlehre

Serie 0

Kardinalzahlcharakteristiken

Besprechung am 21. September

Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, sei $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ die Menge der Teilmengen von $\mathbb{N}$, und sei $\mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ die Menge der *unendlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Eine Menge A heisst *abzählbar*, falls eine Surjektion $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ existiert. Ist eine Menge nicht abzählbar, so heisst sie *überabzählbar*.

Eine Menge $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ hat die *Kardinalität* $\mathfrak{c}$, falls eine Injektion $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathscr{C}$ existiert.

0. Eine Menge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ ist eine *reaping family* falls gilt:

$$\forall x \subseteq \mathbb{N}\, \exists y \in \mathscr{F} (y \cap x = \emptyset \vee y \subseteq x)$$

Zeige: Jede reaping family $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

1. Für Funktionen g, f von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ definieren wir:

$$g <^* f \;:\Longleftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \geq k\big(g(n) < f(n)\big)$$

Gilt $g <^* f$, so sagen wir, dass f die Funktion g *dominiert*. Eine Familie $\mathscr{F}$ von Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ heisst *dominierend*, falls für jede Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein $f \in \mathscr{F}$ existiert mit $g <^* f$. Eine Familie $\mathscr{F}$ von Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ heisst *unbeschränkt*, falls es keine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, welche alle Funktionen aus $\mathscr{F}$ dominiert.

(a) Zeige: Jede dominierende Familie von Funktionen ist unbeschränkt.

(b) Zeige: Jede unbeschränkte Familie von Funktionen ist überabzählbar.

2.* Eine Familie $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ heisst *fast disjunkt* falls gilt:

$$\forall x \in \mathscr{A}\, \forall y \in \mathscr{A} \big(x \neq y \to (x \cap y) \text{ ist endlich}\big)$$

(a) Konstruiere eine fast disjunkte Familie $\mathscr{A}_\mathfrak{c} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ der Kardinalität $\mathfrak{c}$.

(b) Konstruiere eine unendliche Menge $x_0 \subseteq \mathbb{N}$, welche mit jeder Menge $y \in \mathscr{A}_\mathfrak{c}$ einen endlichen Durchschnitt hat (*d.h.* die Familie $\mathscr{A}_\mathfrak{c}$ ist nicht maximal).