

10. Es sei $\mathcal{P}^0(\emptyset) := \emptyset$, für $\alpha \in \Omega$ sei $\mathcal{P}^{\alpha+1}(\emptyset) := \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(\emptyset))$, und für Limesordinalzahlen $\lambda \in \Omega$ sei $\mathcal{P}^\lambda(\emptyset) := \bigcup_{\beta \in \lambda} \mathcal{P}^\beta(\emptyset)$.

Definiere eine Klassenfunktion $F : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, so dass mit dem TRANSFINITEN REKURSIONSTHEOREM eine Funktion $G : \Omega \rightarrow \mathbf{V}$ existiert, so dass für alle $\alpha \in \Omega$ gilt:

$$G(\alpha) = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset)$$

11. Definiere mit Hilfe des TRANSFINITEN REKURSIONSTHEOREMS die Multiplikation von Ordinalzahlen.
12. *Goodstein Sequenzen:* Für $n, m \in \omega$, wobei $n \geq 2$, definieren wir die Basis- n -Repräsentation von m wie folgt: Zuerst wird m als Summe von abnehmenden Potenzen von n geschrieben, danach werden die Exponenten in dieser Darstellung wieder als Summen von abnehmenden Potenzen von n geschrieben, und so fort.

Zum Beispiel ist die Basis-2-Repräsentation von 266:

$$2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$$

Die Zahl $G_n(m)$ ist wie folgt definiert: Ist $m = 0$, so ist $G_n(m) := 0$; sonst ist $G_n(m)$ die Zahl welche wir erhalten, wenn wir n in der Basis- n -Repräsentation von m überall durch $n + 1$ ersetzen, dann 1 subtrahieren und das Ergebnis in der Basis- $(n + 1)$ -Repräsentation schreiben. Zum Beispiel ist:

$$G_2(266) = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$$

Wir definieren nun die Goodstein Sequenz für m , beginnend mit 2, durch: $m_0 = m$, $m_1 = G_2(m_0)$, $m_2 = G_3(m_1)$, $m_3 = G_4(m_2)$, ...

- (a) Sei nun $m_0 = 266$. Schreibe die Zahlen m_1, m_2, m_3 auf und zeige, dass gilt: $m_0 < m_1 < m_2 < m_3$.
- (b) Ersetze in der Basis- $(i + 2)$ -Repräsentation von m_i (wobei $0 \leq i \leq 3$), überall die Zahl $i + 2$ durch ω und betrachte diese Zahlen als Ordinalzahlen $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$.
- (c) Zeige, dass gilt: $\mu_0 \ni \mu_1 \ni \mu_2 \ni \mu_3$.
- (d) Zeige: $\forall m \in \omega \exists k \in \omega (m_k = 0)$.