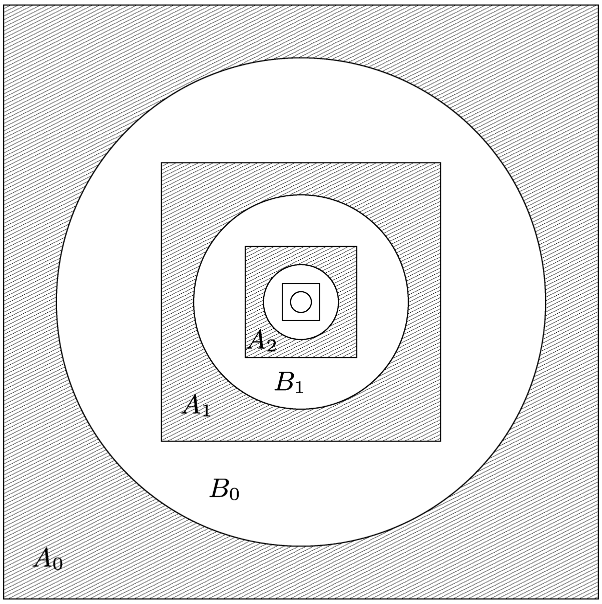
Axiomatische Mengenlehre Serie 4

Mächtigkeiten und reelle Funktionen Besprechung am 19. Oktober

13. Im Folgenden wird Bernsteins Beweis des CANTOR-BERNSTEIN THEOREMs gegeben:

Seien A und B Mengen und seien $f : A \hookrightarrow B$ und $g : B \hookrightarrow A$ zwei Injektionen. Ferner sei $A_0 := A$, $B_0 := g[B]$, und für $n \in \omega$ sei $A_{n+1} := (g \circ f)[A_n]$ und $B_{n+1} := (g \circ f)[B_n]$. Schliesslich definieren wir $D := \bigcap_{n\in\omega} A_n$.

Wir erhalten also folgendes Bild:



(a) Zeige, dass gilt $A_0 = D \cup (A_0 \setminus B_0) \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup \ldots$

(b) Zeige, dass gilt $B_0 = D \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup \ldots$

(c) Zeige, dass für alle $n \in \omega$ gilt: $|A_n \setminus B_n| = |A_{n+1} \setminus B_{n+1}|$.

(d) Folgere aus (c) durch Umgruppierung der Darstellung von B_0 aus (b), dass gilt: $|A_0| = |B_0|$.

14. Zeige, dass gilt: $|\mathbb{R}| = |C(\mathbb{R})|$, wobei $\mathbb{R} = {}^{\omega}\omega$ und $C(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen *stetigen* Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet.

15. (a) Zeige, dass es eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, welche auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig und auf $\mathbb{Q}$ unstetig ist.

(b) Zeige, dass es keine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, welche auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ unstetig und auf $\mathbb{Q}$ stetig ist.