Axiomatische Mengenlehre Serie 5

Auswahlaxiom und verwandte Aussagen Besprechung am 26. Oktober

Im Folgenden bezeichne “$\leq$” eine Partialordnung auf einer Menge P (*d.h.* “$\leq$” ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive, binäre Relation auf P).

Eine nicht-leere Menge $K \subseteq P$ welche durch $\leq$ linear geordnet wird heisst *Kette* in P.

Ist $C \subseteq P$ eine nicht-leere Menge und hat $p_0 \in P$ die Eigenschaft, dass für alle $x \in C$ gilt $x \leq p_0$, dann heisst p_0 *obere Schranke* von C.

Ein Element $p \in P$ ist *maximal* in P (bezüglich $\leq$) falls es kein $x \in P$ gibt mit $p < x$, wobei gilt: $p < x \iff p \leq x \wedge p \neq x$.

KURATOWSKI-ZORN LEMMA. Sei P eine nicht-leere Menge und sei $\leq$ eine Partialordnung auf P. Hat jede Kette in P eine obere Schranke, so hat P ein bezüglich $\leq$ maximales Element.

Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat *endlichen Charakter*, falls für jede Menge x gilt: $x \in \mathscr{F}$ genau dann wenn jede endliche Teilmenge von x zu $\mathscr{F}$ gehört.

TEICHMÜLLERPRINZIP. Sei $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen. Hat $\mathscr{F}$ endlichen Charakter, dann hat $\mathscr{F}$ ein, bezüglich Inklusion $\subseteq$, maximales Element.

16. Zeige die folgenden Implikationen:

(a) WOHLORDNUNGSPRINZIP $\Rightarrow$ KURATOWSKI-ZORN LEMMA

(b) KURATOWSKI-ZORN LEMMA $\Rightarrow$ TEICHMÜLLERPRINZIP

(c) TEICHMÜLLERPRINZIP $\Rightarrow$ AUSWAHLAXIOM

17. (a) Zeige, dass die folgende Aussage äquivalent zum AUSWAHLAXIOM ist.

Jede Surjektion $f : A \to B$ *mit* $A, B \neq \emptyset$ *hat ein Rechtsinverses.*

(b) Zeige, dass die folgende Aussage ohne das AUSWAHLAXIOM zu benutzen bewiesen werden kann.

Jede Injektion $f : A \to B$ *mit* $A, B \neq \emptyset$ *hat ein Linksinverses.*