Axiomatische Mengenlehre Serie 6

Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen Abgabe am 14. April

---

17. Beweise den folgenden Satz über Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen.

SATZ. *Sei A eine Menge, welche durch die binäre Relation "$<$" wohlgeordnet wird. Dann existiert eine Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$ und eine Bijektion $\mathscr{W} : \alpha \to A$, so dass für alle $\beta, \beta' \in \alpha$ gilt:*

$$\beta \in \beta' \quad \textit{genau dann wenn} \quad \mathscr{W}(\beta) < \mathscr{W}(\beta')$$

Hinweis: Modifiziere den angehängten Beweis von Zermelo. Verwende insbesondere anstelle der Auswahlfunktion die $<$-kleinsten Elemente von nicht-leeren Teilmengen von A. Weiter betrachte anstelle der γ-Mengen bijektive Funktionen $w_\gamma : \gamma \to A'$, wobei $\gamma \in \Omega$ und A' eine geeignete Teilmenge von A ist, und für alle $\beta \in \gamma$ gilt:

$$w_\gamma(\beta) \textit{ ist das } <\textit{-kleinsten Elemente von } A \setminus \{w_\gamma(\delta) : \delta \in \beta\}$$

Die Vereinigung aller Funktionen w_γ ist dann die gesuchte Funktion $\mathscr{W}$.

Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.

(Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe.)

Von

E. Zermelo in Göttingen.

... Der betreffende Beweis ist aus Unterhaltungen entstanden, die ich in der vorigen Woche mit Herrn Erhard Schmidt geführt habe, und ist folgender.

1) Es sei M eine beliebige Menge von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, deren Elemente mit m bezeichnet werden mögen, M' von der Mächtigkeit $\mathfrak{m}'$ eine ihrer Teilmengen, welche mindestens ein Element m enthalten muß, aber auch alle Elemente von M umfassen darf, und $M - M'$ die zu M' „komplementäre" Teilmenge. Zwei Teilmengen gelten als verschieden, wenn eine von beiden irgend ein Element enthält, das in der anderen nicht vorkommt. Die Menge aller Teilmengen M' werde mit M bezeichnet.

2) *Jeder Teilmenge M' denke man sich ein beliebiges Element m_1' zugeordnet, das in M' selbst vorkommt und das „ausgezeichnete" Element von M' genannt werden möge.* So entsteht eine „Belegung" γ der Menge M mit Elementen der Menge M von besonderer Art. Die Anzahl dieser Belegungen γ ist gleich dem Produkte $\Pi\mathfrak{m}'$ erstreckt über alle Teilmengen M' und ist daher jedenfalls von 0 verschieden. Im folgenden wird nun eine beliebige Belegung γ zu grunde gelegt und aus ihr eine bestimmte Wohlordnung der Elemente von M abgeleitet.

3) *Definition.* Als „γ-Menge" werde bezeichnet jede wohlgeordnete Menge M_γ aus lauter verschiedenen Elementen von M, welche folgende Beschaffenheit besitzt: ist a ein beliebiges Element von M_γ und A der „zugehörige" Abschnitt, der aus den vorangehenden Elementen $x \prec a$ von M_γ besteht, so ist a immer das „ausgezeichnete" Element von $M - A$.

4) *Es gibt γ-Mengen innerhalb M.* So ist z. B. m_1, das ausgezeichnete Element von $M' = M$, selbst eine γ-Menge, ebenso die (geordnete) Menge $M_2 = (m_1, m_2)$, wo m_2 das ausgezeichnete Element von $M - m_1$ ist.

5) *Sind M_γ' und M_γ'' irgend zwei verschiedene γ-Mengen* (die aber zu derselben ein für allemal gewählten Belegung γ gehören!), *so ist immer eine von beiden identisch mit einem Abschnitte der anderen.*

Es sei nämlich M_γ' die eine der beiden wohlgeordneten Mengen, welche auf die andere, M_γ'', oder einen ihrer Abschnitte ähnlich abbildbar ist. Dann müssen je zwei bei dieser Abbildung einander entsprechende Elemente miteinander identisch sein. Denn das erste Element *jeder* γ-Menge ist m_1, da der zugehörige Abschnitt A kein Element enthält, also $M - A = M$ ist. Wäre nun m' das *erste* Element von M_γ', welches von dem entsprechenden Elemente m'' verschieden wäre, so müssten die zugehörigen *Abschnitte* A' *und* A'' *noch miteinander identisch sein*, mithin auch die Komplementärmengen $M - A'$ und $M - A''$ und als deren ausgezeichnete Elemente m' und m'' selbst, gegen die Annahme.

6) *Folgerungen.* Haben zwei γ-Mengen ein Element a gemeinsam, so haben sie auch den Abschnitt A der vorangehenden Elemente gemein. Haben sie *zwei* Elemente a, b gemein, so ist in *beiden* Mengen entweder $a \prec b$ oder $b \prec a$.

7) Bezeichnet man als „γ-Element" jedes Element von M, das in irgend einer γ-Menge vorkommt, so gilt der Satz: *Die Gesamtheit L_γ aller γ-Elemente läßt sich so ordnen, daß sie selbst eine γ-Menge darstellt, und umfaßt alle Elemente der ursprünglichen Menge M.* Die letztere ist damit selbst wohlgeordnet.

I) Sind a, b zwei beliebige γ-Elemente und M_γ' und M_γ'' irgend zwei γ-Mengen, denen sie angehören, so enthält nach 5) die größere der beiden γ-Mengen beide Elemente und bestimmt die Ordnungsbeziehung $a \prec b$ oder $b \prec a$. Diese Ordnungsbeziehung ist nach 6) unabhängig von der Wahl der verwendeten γ-Menge.

II) Sind a, b, c drei beliebige γ-Elemente und $a \prec b$ und $b \prec c$, so ist immer $a \prec c$. Denn jede c enthaltende γ-Menge enthält nach 6) auch b und mithin a, und da sie einfach geordnet ist, so folgt in ihr aus $a \prec b$ und $b \prec c$ in der Tat $a \prec c$. Die Menge L_γ ist also *einfach geordnet.*

III) Ist L_γ' eine beliebige Teilmenge von L_γ und a eines ihrer Elemente, das der γ-Menge M_γ angehören möge, so enthält M_γ nach 6) alle Elemente $\prec a$, also auch die Teilmenge L_γ'', welche aus L_γ' durch Weglassung aller auf a folgenden Elemente entsteht, und L_γ'' besitzt als Teilmenge der wohlgeordneten Menge M_γ ein *erstes* Element, das zugleich erstes Element von L_γ' ist. L_γ ist also auch *wohlgeordnet.*

IV) Ist a ein beliebiges γ-Element und A die Gesamtheit *aller* vorangehenden Elemente $x \prec a$, so ist A nach 6) der zu a gehörige Abschnitt in jeder Menge M_γ, welche a enthält, und a ist mithin nach 3) das ausgezeichnete Element von $M - A$. *Also ist L_γ selbst eine γ-Menge.*

V) Gäbe es ein Element von M, das *keiner* γ-Menge angehörte, also Element von $M - L_\gamma$ wäre, so gäbe es auch ein ausgezeichnetes Element m_1'

von $M - L_\gamma$, und die geordnete Menge (L_γ, m_1'), in der jedes γ-Element dem Element m_1' voranginge, wäre nach 3) selbst eine γ-Menge. Also wäre auch m_1' ein γ-Element gegen die Annahme, und es ist in Wirklichkeit $L_\gamma = M$, also M selbst eine *wohlgeordnete Menge.*

Somit entspricht jeder Belegung γ eine ganz bestimmte Wohlordnung der Menge M, wenn auch nicht zwei verschiedenen Belegungen immer verschiedene. Jedenfalls muß es *mindestens eine* solche Wohlordnung geben, und jede Menge, für welche die Gesamtheit der Teilmengen usw. einen Sinn hat, darf als eine wohlgeordnete, ihre Mächtigkeit als ein „Alef" betrachtet werden. So folgt also für jede transfinite Mächtigkeit

$$\mathfrak{m} = 2\mathfrak{m} = \aleph_0 \mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 \text{ usw.},$$

und je zwei Mengen sind miteinander „vergleichbar", d. h. es ist immer die eine ein-eindeutig abbildbar auf die andere oder einen ihrer Teile.

Der vorliegende Beweis beruht auf der Voraussetzung, daß Belegungen γ überhaupt existieren, also auf dem Prinzip, daß es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht, oder formal ausgedrückt, daß das Produkt einer unendlichen Gesamtheit von Mengen, deren jede mindestens ein Element enthält, selbst von Null verschieden ist. Dieses logische Prinzip läßt sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen, wird aber in der mathematischen Deduktion überall unbedenklich angewendet. So kann z. B. die Allgemeingültigkeit des Satzes, daß die Anzahl der Teile, in die eine Menge zerfällt, kleiner oder gleich ist der Anzahl aller ihrer Elemente, nicht anders bewiesen werden, als indem man sich jedem der betrachteten Teile eines seiner Elemente zugeordnet denkt.

Die Idee, unter Berufung auf dieses Prinzip eine *beliebige* Belegung γ der Wohlordnung zu grunde zu legen, verdanke ich Herrn Erhard Schmidt; meine Durchführung des Beweises beruht dann auf der Verschmelzung der verschiedenen möglichen „γ-Mengen", d. h. der durch das Ordnungsprinzip sich ergebenden wohlgeordneten Abschnitte.

Münden i. Hann., den 24. September 1904.