# Axiomatische Mengenlehre Serie 9

Ramsey-Ultrafilter, $P$-points, $Q$-points — Besprechung am 23. November

---

**24.** Für $x \in [\omega]^\omega$ sei $f_x : \omega \to x$ eine surjektive Funktion, so dass für alle $k \in \omega$ gilt:

$$\big|x \cap f_x(k)\big| = k$$

Zeige, dass für jedes $x \in [\omega]^\omega$ die Funktion $f_x : \omega \to x$ eindeutig bestimmt ist.

**25.** (a) Zeige: Ist $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein Ultrafilter, so ist $\{f_x : x \in \mathscr{U}\}$ eine "unbounded family".

(b) Zeige: Ist $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ ein $Q$-point, so ist $\{f_x : x \in \mathscr{U}\}$ eine "dominating family".

Eine Funktion $f : \omega \to \omega$ heisst *fast injektiv* falls für alle $n \in \omega$ gilt:

$$\big|\{k \in \omega : f(k) = n\}\big| < \omega$$

**26.** Zeige: Ein Ultrafilter $\mathscr{U}$ ist genau dann ein $P$-point wenn für jede Funktion $f : \omega \to \omega$ ein $x \in \mathscr{U}$ existiert, so dass $f|_x$ entweder konstant oder fast injektiv ist.

**27.** Zeige: Ist $\mathscr{U}$ ein $Q$-point, so existiert für jede fast injektive Funktion $f : \omega \to \omega$ ein $x \in \mathscr{U}$, so dass $f|_x$ injektiv ist.

**28.** Zeige: Falls $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, so gibt es $2^{\mathfrak{c}}$ verschiedene Ramsey-Ultrafilter.

**29.** Zeige in ZFC, dass es Ultrafilter $\mathscr{U} \subseteq [\omega]^\omega$ gibt, die weder $P$-point noch $Q$-point sind.

*Hinweis*: Betrachte einen Ultrafilter $\mathscr{U}$, der den Filter

$$\mathscr{F} = \left\{x \in [\omega]^\omega : \lim_{n\to\infty} \tfrac{|x \cap n|}{n} = 1\right\}$$

enthält.