# Axiomatische Mengenlehre – Serie 2 – Musterlösung

## Aufgabe 9

Wir definieren

↳ $\mathbb{N} = \omega$

↳ $s^{\mathbb{N}} := \{<n,m> \mid n\in\omega \wedge m = n\cup\{n\}\}$

↳ $+^{\mathbb{N}} := \bigcap \{a\in \mathcal{P}((\omega\times\omega)\times\omega) \mid \varphi(a)\}$, wobei

$$\begin{aligned}\varphi(a) \equiv\ & \forall x(<<x,\emptyset>,x>\in a) \wedge \\ & \forall x\forall y\forall z\forall z'(<<x,y>,z>\in a \wedge <<x,y>,z'>\in a \to z=z') \wedge \\ & \forall x\forall y\forall z(<<x,y>,z>\in a \to <<x,s^{\mathbb{N}}(y)>,z\cup\{z\}>\in a)\end{aligned}$$

↳ $\cdot^{\mathbb{N}} := \bigcap\{a\in\mathcal{P}((\omega\times\omega)\times\omega) \mid \psi(a)\}$, wobei

$$\begin{aligned}\psi(a) \equiv\ & \forall x(<<x,\emptyset>,\emptyset>\in a) \wedge \\ & \forall x\forall y\forall z\forall z'(<<x,y>,z>\in a \wedge <<x,y>,z'>\in a \to z=z') \wedge \\ & \forall x\forall y\forall z(<<x,y>,z>\in a \to <<x,s^{\mathbb{N}}(y)>,z+^{\mathbb{N}}x>\in a).\end{aligned}$$

Beh 1: $s^{\mathbb{N}}$ ist eine Funktion

Da $\omega$ eine induktive Menge ist, gilt für jedes $n\in\omega$, dass auch $n\cup\{n\}\in\omega$ ist.
Angenommen es gibt ein $n\in\omega$, sodass für $m\neq m'$ gilt

$$<n,m>\in s^{\mathbb{N}} \wedge <n,m'>\in s^{\mathbb{N}}.$$

Dann haben wir

$$m = n\cup\{n\} \text{ und } m' = n\cup\{n\}.$$

Da $m$ und $m'$ die gleichen Elemente haben, folgt mit dem Extensionalitätsaxiom, dass $m = m'$ ist. ↯

Beh 2: $+^{\mathbb{N}}$ ist eine Funktion

- Zuerst zeigen wir, dass es für jedes $<x,y>\in\omega\times\omega$ ein $z\in\omega$ gibt mit

$$<<x,y>,z>\in +^{\mathbb{N}}.$$

Wir zeigen dies indirekt. Sei $<x,\tilde{y}>\in\omega\times\omega$, sodass für jedes $z\in\omega$

$$<<x,\tilde{y}>,z>\notin +^{\mathbb{N}}.$$

Wähle

$$y = \min\{\tilde{y}\in\omega \mid \forall z\in\omega\,((<<x,\tilde{y}>,z>\notin +^{\mathbb{N}})\}.$$

Es gilt $y\neq 0^{\mathbb{N}}$, denn sonst wäre $<<x,0^{\mathbb{N}}>,x>\in +^{\mathbb{N}}$. Das heisst, es gibt ein $t\in\omega$ mit $y = t\cup\{t\}$ und es gibt ein $\tilde{z}$ mit

$$\langle\langle x, t\rangle, \tilde{z}\rangle \in +^{\mathbb{N}}.$$

Aber dann ist

$$\langle\langle x, y\rangle, \tilde{z} \cup \{\tilde{z}\}\rangle \in +^{\mathbb{N}}.$$

Das ist der gewünschte Widerspruch.

- Angenommen es gibt ein $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$ mit

$$+^{\mathbb{N}} \ni \langle\langle x, y\rangle, z\rangle = \langle\langle x, y\rangle, \tilde{z}\rangle \in +^{\mathbb{N}}$$

wobei $z, \tilde{z} \in \omega$ mit $z \neq \tilde{z}$. Nach Definition von $+^{\mathbb{N}}$ kann das aber nicht sein.

Beh 3: $\cdot^{\mathbb{N}}$ ist eine Funktion

Wir gehen analog vor wie in Beh 2:

- Sei $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$, sodass für jedes $z \in \omega$

$$\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Wieder nehmen wir an, dass $y$ zu $x$ minimal ist. Ist $y = \emptyset$, so gilt

$$\langle\langle x, \emptyset\rangle, \emptyset\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Also muss $y \neq \emptyset$ sein, das heisst, es gibt ein $\tilde{y} \in \omega$ mit $y = \tilde{y} \cup \{\tilde{y}\}$. Da $y$ zu $x$ minimal ist, gibt es ein $\tilde{z} \in \omega$ mit

$$\langle\langle x, \tilde{y}\rangle, \tilde{z}\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Also folgt mit der Definition von $\cdot^{\mathbb{N}}$

$$\langle\langle x, y\rangle, \tilde{z} \cup \{\tilde{z}\}\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Das ist ein Widerspruch.

- Angenommen es gibt $\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega$ und $z, z' \in \omega$ mit $z \neq z'$ sodass

$$\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}} \text{ und } \langle\langle x, y\rangle, z'\rangle \in \cdot^{\mathbb{N}}.$$

Nach Definition von $\cdot^{\mathbb{N}}$ kann das aber nicht sein.

Beh 4: PA1 ist erfüllt (d.h. $\forall x \in \mathbb{N}\, (s^{\mathbb{N}}(x) \neq 0^{\mathbb{N}})$).

Wir zeigen dies indirekt. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $s^{\mathbb{N}}(n) = n \cup \{n\} = 0^{\mathbb{N}}$. Es gilt $n \in n \cup \{n\}$ aber $n \notin \emptyset$. Also ist $n \cup \{n\} \neq \emptyset$ nach dem Extensionalitätsaxiom.

Beh 5: PA2 ist erfüllt (d.h. $\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\, (s^{\mathbb{N}}(x) = s^{\mathbb{N}}(y) \to x = y)$)

Seien $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \cup \{x\} = s^{\mathbb{N}}(x) = s^{\mathbb{N}}(y) = y \cup \{y\}$. Dann gilt $x \in y$ oder $x = y$ oder $x \ni y$. Angenommen $x \in y$. Dann gilt wegen der Transitivität $x \subseteq y$. Ausserdem ist $\{x\} \subseteq y$. Also

$$x \cup \{x\} \subseteq y.$$

Also

$$y \in y \cup \{y\} = x \cup \{x\} \subseteq y.$$

Das heisst, $y \in y$. Ordinalzahlen enthalten sich selber aber nicht.

Analog sehen wir, dass $y \not\subset x$ ist. Das heisst, $x = y$.

Beh 6: PA3, d.h. $\forall x \in \mathbb{N}(x +^{\mathbb{N}} 0^{\mathbb{N}} = x)$ ist erfüllt,

PA4, d.h. $\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\, (x +^{\mathbb{N}} s^{\mathbb{N}}(y) = s^{\mathbb{N}}(x + y))$ ist erfüllt und

PA5, d.h. $\forall x \in \mathbb{N}\, (x \cdot^{\mathbb{N}} 0^{\mathbb{N}} = 0^{\mathbb{N}})$ ist erfüllt.

Das folgt direkt aus der Definition von $+^{\mathbb{N}}$, respektive der Definition von $\cdot^{\mathbb{N}}$.

Beh 7: PA7 ist erfüllt, d.h. für jede $\mathcal{L}_{PA}$-Formel $\varphi$ mit $x \in \text{frei}(\varphi)$ gilt

$$(\varphi(0^{\mathbb{N}}) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(s^{\mathbb{N}}(x)))) \to \forall x \varphi(x).$$

Sei $\varphi$ eine $\mathcal{L}_{PA}$-Formel mit $x \in \text{frei}(\varphi)$. Angenommen es gilt

$$\varphi(0^{\mathbb{N}}) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(s^{\mathbb{N}}(x))) \qquad (*)$$

aber $\neg \forall x(\varphi(x))$. Sei also $y \in \mathbb{N}$ kleinst möglich mit $\neg\varphi(y)$. Dann ist $y \neq \emptyset$, da wir $\varphi(0^{\mathbb{N}})$ haben. Das heisst, es gibt ein $z \in \omega$ mit $y = z \cup \{z\}$. Da aber $y$ kleinst möglich gewählt wurde, gilt $\varphi(z)$. Also nach $(*)$ auch $\varphi(s^{\mathbb{N}}(z)) = \varphi(z \cup \{z\}) = \varphi(y)$.