Axiomatische Mengenlehre – Serie 5 – Musterlösung

Aufgabe 16a

Sei P eine durch "$\leq$" partiell geordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Sei $\mathfrak{C}$ die Menge aller Ketten. Die Menge $\mathfrak{C}$ kann nach Voraussetzung wohlgeordnet werden. Das heisst, es gibt ein $\gamma \in \Omega$ mit

$$\mathfrak{C} = \{C_\alpha \mid \alpha \in \gamma\}.$$

Wir definieren

↳ $\alpha = 0$: $K_0 := C_0$

↳ $\alpha \in \gamma \setminus \{\emptyset\}$

$$K_\alpha := \begin{cases} \left(\bigcup_{\beta \in \alpha} K_\beta\right) \cup C_\alpha & \text{falls dies eine Kette ist} \\ \bigcup_{\beta \in \alpha} K_\beta & \text{sonst} \end{cases}$$

Ausserdem sei $K := \bigcup_{\alpha \in \gamma} K_\alpha$. Bemerke, dass sowohl K als auch $K_\alpha, \alpha \in \gamma$ wiederum Ketten sind. Insbesondere ist also K eine Kette und nach Voraussetzung hat K eine obere Schranke $p \in P$. Wir zeigen nun, dass p ein maximales Element von P ist. Sei $q \in P$ mit

$$q \geq p.$$

Es gibt ein $\alpha \in \gamma$ mit $C_\alpha = \{q\}$, denn $\{q\}$ ist eine Kette. Da p eine obere Schranke von K ist, ist auch q eine obere Schranke von K. Also gilt

$$\forall \beta \in \alpha \; \forall x \in K_\beta \; (x \leq q).$$

Das heisst, $K_\alpha = \left(\bigcup_{\beta \in \alpha} K_\beta\right) \cup C_\alpha$ ist eine Kette und

$$q \in K_\alpha \subseteq K.$$

Somit ist, da p eine obere Schranke von K ist, $q \leq p$. Das heisst, wegen der Antisymmetrie gilt $p = q$.

Aufgabe 16b (Zorn $\Rightarrow$ Teichmüller)

Sei $\mathcal{F} \neq \emptyset$ eine Familie mit endlichem Charakter. Die Inklusion definiert eine Partialordnung auf $\mathcal{F}$. Sei $C \subseteq \mathcal{F}$ eine Kette. Wir wollen zeigen, dass C eine obere Schranke in $\mathcal{F}$ hat, nämlich $\bigcup C$.

Beh 1: $\bigcup C$ ist obere Schranke

Sei $x \in C$. Sei $z \in x$. Dann folgt $z \in \bigcup C$ nach Definition der Vereinigung. Also $x \subseteq \bigcup C$. $\lrcorner$

Beh 2: $\bigcup C \in \mathcal{F}$

Wir benutzen, dass $\mathcal{F}$ endlichen Charakter hat. Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup C$. Dann gibt es für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ein $f_i \in C$ mit $x_i \in f_i$. Da C eine Kette ist, sei OBdA

$$f_i \subseteq f_n$$

für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Also ist $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq f_n \in \mathcal{F}$. Somit ist, da f_n endlichen Charakter hat, $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F}$. Damit ist $\bigcup C \in \mathcal{F}$. $\lrcorner$

Also dürfen wir das Zornsche Lemma anwenden und sind fertig.

Aufgabe 16c (Teichmüller $\Rightarrow$ AC)

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von nicht leeren Mengen. Es gelte $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Wir definieren

$$\mathcal{G} := \{ f \mid f \text{ ist Auswahlfkt auf } \mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \}.$$

Hat $\mathcal{G}$ endlichen Charakter? Sei $f \in \mathcal{G}$ und sei $f' \subseteq f$ eine endliche

Teilmenge. Dann ist f' eine Einschränkung von f auf eine endliche Menge. Da f eine Auswahlfunktion ist, ist auch f' eine. Umgekehrt: Angenommen jede endliche Teilmenge von f ist in $\mathcal{G}$. Dann ist f die Vereinigung dieser endlichen Teilmengen und damit auch in $\mathcal{G}$. Mit dem Teichmüllerprinzip folgt, dass es in $\mathcal{G}$ ein maximales

$$f: \mathcal{F}' \to \bigcup \mathcal{F}'$$

gibt. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ ist. Angenommen $\mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}$. Sei $x \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$. Wähle ein $y \in x$. Dann definieren wir

$$g: \mathcal{F}' \cup \{x\} \to \bigcup(\mathcal{F}' \cup \{x\})$$

$$z \mapsto \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in \mathcal{F}' \text{ ist,} \\ y & \text{falls } z = x \text{ ist.} \end{cases}$$

Dies ist eine Auswahlfunktion auf $\mathcal{F}' \cup \{x\}$. Also $f \subsetneq g$. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von f.

Aufgabe 17a

- "AC $\Rightarrow$ Jede Surjektion $f: A \to B$ mit $A, B \neq \emptyset$ hat ein Rechtsinverses"

Sei
$$f: A \to B$$
eine Surjektion mit $A, B \neq \emptyset$. Für jedes $b \in B$ ist
$$f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset,$$
da f surjektiv ist. Sei
$$\xi : \{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\} \to \bigcup \{f^{-1}(\{b\}) \mid b \in B\}$$
eine Auswahlfunktion. Wir definieren
$$g: B \to A$$
$$b \mapsto \xi(f^{-1}(\{b\})) \in f^{-1}(\{b\}).$$

Dies ist ein Rechtsinverses zu f, da
$$(f \circ g)(b) = f(\underbrace{\xi(f^{-1}(\{b\}))}_{\in f^{-1}(\{b\})}) = b.$$

- "Jede Surjektion $f: A \to B$ mit $A, B \neq \emptyset$ hat ein Rechtsinverses $\Rightarrow$ AC"

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie nicht leerer Mengen. Für jede Menge $Y \in \mathcal{F}$ definieren wir
$$\overline{Y} := \{\langle a, Y \rangle \mid a \in Y\}.$$
Bemerke, dass $\overline{\mathcal{F}} := \{\overline{Y} \mid Y \in \mathcal{F}\}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen ist. Die Abbildung
$$f: \bigcup \overline{\mathcal{F}} \to \overline{\mathcal{F}}$$
$$\langle a, Y \rangle \mapsto \overline{Y}$$
ist wohldefiniert, da die Mengen in $\overline{\mathcal{F}}$ paarweise disjunkt sind, und surjektiv. Nach Voraussetzung hat f also ein Rechtsinverses
$$g: \overline{\mathcal{F}} \to \bigcup \overline{\mathcal{F}}$$
$$\overline{Y} \mapsto g(\overline{Y}) \in \overline{Y}.$$

Sei $\pi_1 : Y \times \mathcal{F} \to Y$ die Projektion auf die erste Koordinate. Dann ist
$$\xi : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$$
$$Y \mapsto \pi_1(g(\overline{Y})) \in Y$$
die gesuchte Auswahlfunktion.

Aufgabe 17b

Sei $f: A \to B$, wobei $A, B \neq \emptyset$, injektiv. Sei $a_0 \in A$. Dann definieren wir

$$g: B \longrightarrow A$$

$$b \mapsto \begin{cases} a & \text{falls } b = f(a) \text{ für ein } a \in A \\ a_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f injektiv ist, ist g wohldefiniert. Für die Definition von g brauchen wir das Auswahlaxiom nicht, da für jedes $b \in f[A]$ das Urbild

$$f^{-1}(\{b\})$$

aus genau einem Punkt besteht.