Axiomatische Mengenlehre – Serie 6 – Musterlösung

Aufgabe 18 a

Angenommen $f^{-1}(\{x\})$ liegt dicht in I. Das heisst:

$$I \setminus \overline{f^{-1}(\{x\})} = \emptyset$$

Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen. Also erhalten wir

$$I \setminus f^{-1}(\{x\}) = \emptyset.$$

Das heisst also $f|_I \equiv x$. Aber f ist nirgends konstant. Das gibt uns den gewünschten Widerspruch.

Aufgabe 18 b

Unser Ziel ist es, einen Punkt x zu finden, der in der Menge

$$M := I \setminus \Big(\bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(\{x_n\}) \Big)$$

liegt. Sei $I_{-1} := I$. Für jedes $n\in\omega$ wählen wir ein abgeschlossenes Intervall I_n mit $\mathrm{int}(I_n) \neq \emptyset$, sodass

$$I_n \subseteq I_{n-1} \setminus \Big(\bigcup_{k\leq n} f_k^{-1}(\{x_k\}) \Big).$$

Solche Intervalle gibt es gemäss Teilaufgabe a). Weiter können wir verlangen, dass für die Längen der Intervalle gilt

$$\ell(I_n) \leq \tfrac{1}{2}\, \ell(I_{n-1})$$

für jedes $n\in\omega$. Wir haben also eine Intervallschachtelung und es gibt genau ein

$$x \in \bigcap_{n\in\omega} I_n.$$

Nach Konstruktion gilt $x \in M$. Also $M \neq \emptyset$.

Aufgabe 18 c

Die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ hat Kardinalität $\mathfrak{c}$, da solche Funktionen bereits durch die Werte, die sie auf der abzählbaren Menge $\mathbb{Q}$ annehmen eindeutig definiert sind. Somit hat auch $\mathcal{F}$ die Kardinalität $\mathfrak{c}$.

Aufgabe 18d

Seien f und g zwei verschiedene stetige Funktionen. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq g(x)$. Angenommen für jedes $n \in \omega$ gibt es ein

$$x_n \in [x - 1/n, x + 1/n]$$

mit $f(x_n) = g(x_n)$. Da f und g stetig sind, gilt

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = g(x). \lightning$$

Also gibt es ein Intervall I um x herum mit $\forall y \in I (f(y) \neq g(y))$.

Aufgabe 18 e

Nach Teilaufgabe c) können wir $\mathcal{F}$ schreiben als

$$\mathcal{F} = \{(f_\alpha, g_\alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{c}\}.$$

Für jedes $\alpha \in \mathfrak{c}$ sei I_α ein Intervall mit

$$\forall x \in I_\alpha (f_\alpha(x) \neq g_\alpha(x)).$$

Solche Intervalle gibt es nach Teilaufgabe d). Für jedes $\alpha \in \mathfrak{c}$ wählen wir ein m_α mit folgenden drei Eigenschaften:

$(1)_\alpha \quad m_\alpha \in I_\alpha$

$(2)_\alpha \quad m_\alpha \notin \bigcup_{\beta \in \alpha} f_\beta^{-1}(\{g_\beta(m_\beta)\})$

$(3)_\alpha \quad m_\alpha \notin \bigcup_{\beta \in \alpha} g_\alpha^{-1}(\{f_\alpha(m_\beta)\})$.

Solch ein m_α existiert nach Teilaufgabe b) und der Tatsache, dass jedes $\alpha \in \mathfrak{c}$ abzählbar ist, da die Kontinuumshypothese gilt. Wir zeigen nun, dass

$$M := \{m_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{c}\}$$

ein magic set ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass für jedes $\alpha \in \mathfrak{c}$

$$g_\alpha(m_\alpha) \notin f_\alpha[M]$$

ist. Angenommen es gibt ein $\gamma \in \mathfrak{c}$ mit

$$g_\alpha(m_\alpha) = f_\alpha(m_\gamma).$$

Dann sind wir in einem der folgenden drei Fälle

1. Fall: $\alpha = \gamma$

Dann wäre $g_\alpha(m_\alpha) = f_\alpha(m_\alpha)$. Das widerspricht $(1)_\alpha$.

2.Fall: $\alpha \in \gamma$

Dann gilt $m_\gamma \in f_\alpha^{-1}(\{g_\alpha(m_\alpha)\})$. Das widerspricht $(2)_\gamma$.

3.Fall: $\gamma \in \alpha$

Dann gilt $m_\alpha \in g_\alpha^{-1}(\{f_\alpha(m_\gamma)\})$. Das widerspricht $(3)_\alpha$.