Axiomatische Mengenlehre – Serie 12 – Musterlösung

Aufgabe 38a

- "$\omega_1 \leq add(\mathcal{M})$": Sei $\{M_n \mid n \in \omega\}$ eine abzählbare Menge magerer Mengen.

Für jedes $n \in \omega$ gibt es abzählbar viele nirgends dichte Mengen

$$N_{n,0}, N_{n,1}, N_{n,2}, \ldots$$

mit $\bigcup_{i \in \omega} N_{n,i} = M_n$. Dann gilt aber

$$\bigcup_{n \in \omega} M_n = \bigcup_{n \in \omega, i \in \omega} N_{n,i}.$$

Die Menge $\{N_{n,i} \mid n, i \in \omega\}$ ist abzählbar. Das heisst $\bigcup_{n \in \omega} M_n$ ist mager.
Also ist $\omega_1 \leq add(\mathcal{M})$.

- "$add(\mathcal{M}) \leq c$". Sei $\mathcal{F} := \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar ist $\{x\}$ mager für jedes $x \in \mathbb{R}$. Aber

$$\bigcup \mathcal{F} = \mathbb{R}$$

ist nicht mager. Warum? Angenommen $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} B_n$, wobei B_n nirgends dicht ist für jedes $n \in \omega$. Dann ist

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \omega} \overline{B_n}.$$

Die $\overline{B_n}$ sind abgeschlossen und nirgends dicht und $int(\mathbb{R}) = int\left(\bigcup_{n \in \omega} \overline{B_n}\right) \neq \emptyset$.
Nach dem Satz von Baire (siehe Musterlösung zu Serie 4, Aufgabe 15b) gibt es ein $n \in \omega$ mit $int(\overline{B_n}) \neq \emptyset$. Also ist $\overline{B_n}$ <u>nicht</u> nirgends dicht. $\lightning$
Es gilt also $add(\mathcal{M}) \leq c$.

Aufgabe 38b

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass P die Vereinigung abzählbar vieler "centred sets" ist. Für jede Folge $F = \langle Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1} \rangle$, $Q_i = \bigcup_{k \in K} O_k$, $K \in fin(\omega)$, und $n \in \omega$ sei

$$C_F := \{p \in P \mid dom(p) = n \wedge \forall i \in n \, (p_i(0) = Q_i)\}.$$

Wir zeigen, dass C_F centered ist. Seien $p^0, p^1, \ldots, p^{k-1} \in C_F$. Für jedes $i \in n$ definieren wir

$$F_i := \bigcup_{\ell \in k} \overbrace{(p^\ell)_i(1)}^{\text{Das ist die zweite Komponente von } p^\ell \text{ an der Stelle } i.}.$$

Sei $p := \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \langle Q_1, F_1\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle$. Dann gilt

$$p^e \leq p$$

für jedes $e \in \kappa$. Also ist die Menge C_F centred.

Da $\{O_k \mid k \in \omega\}$ abzählbar ist und auch $\mathrm{fin}(\omega)$ abzählbar ist, gibt es nur abzählbar viele C_F's. Die Vereinigung aller C_F's ist ganz P. Das heisst, P ist σ-centred.

Aufgabe 38c

Sei $\alpha \in \kappa$ und sei $p = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \langle Q_1, F_1\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle \in P$. Ziel ist es ein $q \geq p$ zu finden mit $q \in D_\alpha$. Wir definieren

$$q := \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \langle Q_1, F_1\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle, \langle Q_n, F_n\rangle\rangle,$$

wobei $F_n = \{\alpha\}$ ist und $Q_n = U_\alpha$. Offenbar gilt $q \in D_\alpha$ und $p \leq q$.

Aufgabe 38d

Seien $i, k \in \omega$ und sei $p = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \langle Q_1, F_1\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle \in P$.

Wir nehmen an, dass $i \in n$ ist. (Ansonsten arbeiten wir mit der Bedingung $p' = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, \overset{\text{i-te Stelle}}{F_{n-1}}\rangle\rangle$ weiter)

Da $\bigcap_{\alpha \in F_i} U_\alpha$ als Schnitt endlich vieler offen dichter Mengen ebenfalls offen und dicht ist, gilt $O_k \cap (\bigcap_{\alpha \in F_i} U_\alpha)$ ist nicht leer und offen.

Das heisst, es gibt ein $e \in \omega$ mit

$$O_e \subseteq O_k \cap (\bigcap_{\alpha \in F_i} U_\alpha).$$

$$\Rightarrow Q_i \cup O_e \subseteq \bigcap_{\alpha \in F_i} U_\alpha.$$

Wir erhalten also

$$q := \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \dots, \langle Q_i \cup O_e, F_i\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle \overset{\text{da } (Q_i \cup O_e) \cap O_k \neq \emptyset}{\in} E_{i,k}$$

und damit ist $E_{i,k}$ dicht in P.

Aufgabe 38e

Sei $x \in \bigcap_{n \in \omega} V_n$ und sei $\alpha \in \kappa$. Ziel ist es zu zeigen, dass $x \in U_\alpha$ ist.

Sei $p = \langle\langle Q_0, F_0\rangle, \langle Q_1, F_1\rangle, \dots, \langle Q_{n-1}, F_{n-1}\rangle\rangle \in G \cap D_\alpha$. Das heisst, es gibt ein $i \in n$ mit $\alpha \in F_i$. Weiter ist $Q_i \subseteq \bigcap_{\beta \in F_i} U_\beta \subseteq U_\alpha$.

Sei $q \in G$. Da G directed ist, gibt es ein $r \in G$ mit $q \leq r \geq p$. Das heisst,

$$q_i(0) \leq \underset{\underset{\bigcup_{\beta \in r_i(1)} U_\beta}{\cap\!\shortmid}}{r_i(0)} \geq p_i(0)$$

$$\bigcup_{\beta \in r_i(1)} U_\beta \subseteq \underset{\uparrow \alpha \in r_i(1),\ \text{da}\ \alpha \in p_i(1)}{U_\alpha}$$

Daraus folgt, dass $V_i \subseteq U_\alpha$ ist, also ist $x \in V_i \subseteq U_\alpha$.

Aufgabe 38f

Sei $\mathcal{F} = \{W_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ eine Familie nirgends dichter Mengen mit $|\mathcal{F}| = \kappa < c$. Wir wollen zeigen, dass $\bigcup \mathcal{F}$ mager ist. Denn dann folgt sofort $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = c$. Sei für jedes $\alpha \in \kappa$

$$U_\alpha = (\overline{W_\alpha})^{c} \quad \leftarrow \text{Komplement}$$

Die Mengen U_α sind offen und dicht. Mit MA(σ-centered) gibt es gemäss Teilaufgabe e V_n's, $n \in \omega$ mit

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq \bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha.$$

Bemerke, dass die V_n's alle offen und dicht sind. Wir erhalten also

offen: $\uparrow$ Vereinigung offener Mengen; dicht: weil G jedes $E_{i,k}$ nicht trivial schneidet

$$\bigcup_{\alpha \in \kappa} W_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in \kappa} \overline{W_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \kappa} U_\alpha^c = \Big(\bigcap_{\alpha \in \kappa} U_\alpha\Big)^c \subseteq \Big(\bigcap_{n \in \omega} V_n\Big)^c =$$

$$= \bigcup_{n \in \omega} \underbrace{V_n^{c}}_{\text{abgeschlossen nirgends dicht.}}$$

Das heisst, $\bigcup_{\alpha \in \kappa} W_\alpha$ ist in einer mageren Menge enthalten und daher mager.

Aufgabe 38g

Siehe Musterlösung zu Serie 6. Wir haben dort lediglich $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = c$ gebraucht um ein magic set zu konstruieren.