Axiomatische Mengenlehre Serie 0

Kardinalzahlcharakteristiken Musterlösungen

Sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, sei $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ die Menge der Teilmengen von $\mathbb{N}$, und sei $\mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ die Menge der *unendlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$.

Eine Menge A heisst *abzählbar*, falls eine Surjektion $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ existiert. Ist eine Menge nicht abzählbar, so heisst sie *überabzählbar*.

Eine Menge $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{N})$ hat die *Kardinalität* $\mathfrak{c}$, falls eine Injektion $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathscr{C}$ existiert.

0. Eine Menge $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ ist eine *reaping family* falls gilt:

$$\forall x \subseteq \mathbb{N}\, \exists y \in \mathscr{F} (y \cap x = \emptyset \vee y \subseteq x)$$

Zeige: Jede reaping family $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.

Beweis:

Sei $\mathscr{F} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ eine abzählbare Familie.

Behauptung 1. *Dann ist $\mathscr{F}$ nicht reaping.*

Beweis. Seien $a_0, b_0 \in y_0$ mit $a_0 < b_0$ und für alle $n > 0$ seien $a_n, b_n \in y_n$ mit $b_{n-1} < a_n < b_n$. Betrachte $\alpha := \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $y_n \cap \alpha \ni a_n$, also $y_n \cap \alpha \neq \emptyset$, und $y_n \setminus \alpha \ni b_n$, also $y_n \nsubseteq \alpha$. $\dashv$

1. Für Funktionen g, f von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ definieren wir:

$$g <^* f \;:\Longleftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \geq k\big(g(n) < f(n)\big)$$

Gilt $g <^* f$, so sagen wir, dass f die Funktion g *dominiert*. Eine Familie $\mathscr{F}$ von Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ heisst *dominierend*, falls für jede Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein $f \in \mathscr{F}$ existiert mit $g <^* f$. Eine Familie $\mathscr{F}$ von Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ heisst *unbeschränkt*, falls es keine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, welche alle Funktionen aus $\mathscr{F}$ dominiert.

(a) Zeige: Jede dominierende Familie von Funktionen ist unbeschränkt.

(b) Zeige: Jede unbeschränkte Familie von Funktionen ist überabzählbar.

Beweis:

(a) Sei $\mathscr{D}$ eine dominierende Familie, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion. Dann gibt es $d \in \mathscr{D}$ mit $f <^* d$. Also gilt $d \not<^* f$.
Da f beliebig war, ist $\mathscr{D}$ unbeschränkt.

(b) Sei $\mathscr{F} = \{f_n\}_{n \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N})} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ eine abzählbare Familie.

Behauptung 2. *Dann ist $\mathscr{F}$ nicht unbeschränkt.*

Beweis. Betrachte

$$f_\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \max_{i=1,\dots,n} \{f_i(n) + 1\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} : f_n <^* f_\omega$, also wird $\mathscr{F}$ durch f_ω beschränkt. $\dashv$

2.* Eine Familie $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ heisst *fast disjunkt* falls gilt:

$$\forall x \in \mathscr{A}\, \forall y \in \mathscr{A} \big(x \neq y \to (x \cap y) \text{ ist endlich}\big)$$

(a) Konstruiere eine fast disjunkte Familie $\mathscr{A}_\mathfrak{c} \subseteq \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$ der Kardinalität $\mathfrak{c}$.

(b) Konstruiere eine unendliche Menge $x_0 \subseteq \mathbb{N}$, welche mit jeder Menge $y \in \mathscr{A}_\mathfrak{c}$ einen endlichen Durchschnitt hat (*d.h.* die Familie $\mathscr{A}_\mathfrak{c}$ ist nicht maximal).

Konstruktion:

(a) **Behauptung 3.** $\mathbb{N}$ *steht in Bijektion zu* $\mathrm{fin}(\mathbb{N}) := \mathscr{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$.

Beweis. Betrachte

$$b : \mathrm{fin}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}, A \mapsto \sum_{a \in A} 2^a.$$

Dabei handelt es sich um eine Bijektion, da jede natürliche Zahl eine eindeutige Binärdarstellung besitzt. $\dashv$

Setze nun für alle $x \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$

$$x_{<n} := x \cap \{0, \dots, n-1\}$$

und

$$e_x := \big\{b^{-1}(a) \mid \exists a \in \mathrm{fin}(\mathbb{N}) : \exists n \in \mathbb{N} : a = x_{<n}\big\}.$$

Sei $\mathscr{A}_\mathfrak{c} := \{e_x \mid x \in \mathscr{P}^*(\mathbb{N})\}$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$, dass

$$x \neq y \Rightarrow |e_x \cap e_y| \leq \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_{<n} \neq y_{<n}\}.$$

Also ist $\mathscr{A}_\mathfrak{c}$ fast disjunkt mit $|\mathscr{A}_\mathfrak{c}| = \mathfrak{c}$, was zu konstruieren war.

(b) Betrachte $e_0 = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{P}^*(\mathbb{N})$. Für alle $e_x \in \mathscr{A}_\mathfrak{c}$ gilt: $e_x \cap e_0 = \{2^{\min x}\}$.