Axiomatische Mengenlehre

Serie 1

Ordinalzahlen

Musterlösungen

Im Folgenden bezeichnet Ω die Klasse aller Ordinalzahlen. In der Sprache der Mengenlehre ist $\alpha \in \Omega$ bloss eine abgekürzte Schreibweise für "α ist eine Ordinalzahl", was wiederum bloss eine abgekürzte Schreibweise ist für "α ist eine transitive Menge, welche durch die Relation $\in$ wohlgeordnet wird".

3. Sei $\delta_0 \in \Omega$, $x \subseteq \delta_0$, und $\alpha \in x$.

(a) Zeige: $x \cap (\alpha \cup \{\alpha\}) \neq \emptyset$.

(b) Sei γ das $\in$-minimale Element von $x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})$.
Zeige, dass γ das $\in$-minimale Element von x ist.

Beweis:

Durch transfinite Induktion lässt sich zeigen, dass jede Ordinalzahl eine Menge von Ordinalzahlen ist. Somit ist auch x, als Teilmenge einer Ordinalzahl, eine Menge von Ordinalzahlen.

(a) Dies gilt, da $\alpha \in x$ und $\alpha \in (\alpha \cup \{\alpha\})$ und somit $\alpha \in x \cap (\alpha \cup \{\alpha\})$.

(b) Da x eine nicht-leere Menge von Ordinalzahlen ist, besitzt es ein minimales Element γ'. Da $\gamma \in x$ und γ' minimal ist, gilt $\gamma' \not\ni \gamma$. Aus der Trichotomie der Ordinalzahlen folgt, dass entweder $\gamma' = \gamma$ oder $\gamma' \in \gamma$; also $\gamma' \subseteq \gamma$, wegen Transitivität. Weiter gilt $\gamma' \subseteq \alpha$, also $\gamma' \in (\alpha \cup \{\alpha\})$. Somit ist γ' auch im obigen Durchschnitt und wir haben $\gamma' = \gamma$.

4. Zeige: Gilt $\emptyset \in \alpha \in \beta \in \Omega$, dann ist $(\beta \setminus \alpha) \notin \Omega$.

Beweis:

Aus der Trichotomie folgt, dass eine Ordinalzahl entweder leer ist oder die leere Menge enthält. Nun gilt aber $\alpha \in (\beta \setminus \alpha)$, also $(\beta \setminus \alpha) \neq \emptyset$, sowie $\emptyset \in \alpha$, also $\emptyset \notin (\beta \setminus \alpha)$.

5. Zeige: Ist $\alpha \in \beta \in \Omega$, dann ist $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$.

Beweis:

Einerseits gitl $\alpha \in \beta$, also $\{\alpha\} \subseteq \beta$. Anderseits folgt aus Transitivität $\forall \gamma \in \alpha : \gamma \in \beta$, also $\alpha \subseteq \beta$.

6. Sei $\alpha \in \Omega$. Zeige, dass folgendes gilt:

(a) $\cup\alpha \subseteq \alpha$

(b) $\cup\alpha \in \Omega$

(c) $\cap\alpha = \emptyset$, *d.h.* $\cap\alpha \in \Omega$

Beweis:

(a) Sei $x \in \cup\alpha$. Das heisst $\exists y \in \alpha : x \in y$. Wiederum aus Transitivität folgt, dass $x \in \alpha$.

(b) Dies folgt aus Aufgabe 8.

(c) Entweder ist α leer oder enthält die leere Menge. In beiden Fällen folgt, dass $\cap\alpha$ leer ist.

7. Seien α und β beliebige Ordinalzahlen.

Zeige, dass die folgenden Mengen ebenfalls Ordinalzahlen sind.

(a) $\bigcup(\beta \setminus \alpha)$

(b) $\bigcap(\beta \setminus \alpha)$

(c) $\alpha \cup \beta$

(d) $\alpha \cap \beta$

Beweis:

Dies folgt aus Aufgabe 8, wenn wir für x einmal $(\beta \setminus \alpha)$ und einmal $\{\alpha, \beta\}$ setzen.

8. Zeige: Ist x eine Menge von Ordinalzahlen, so gilt $\cup x \in \Omega$ und $\cap x \in \Omega$.

Beweis:

Wir zeigen dies, indem wir beweisen, dass die entsprechenden Mengen entweder leer oder wohlgeordnet und transitiv sind.

- Ohne Einschränkung sei $\cup x$ nicht leer. Insbesondere gilt also $x \neq \emptyset$. Jedes Element y von x ist eine Ordinalzahl, also insbesondere eine Menge von Ordinalzahlen. Somit ist $\cup x$ eine Menge von Ordinalzahlen, also insbesondere wohlgeordnet.
  Sei nun $y \in \cup x$. Das heisst es gibt $z \in x$ mit $y \in z$. Nun ist z eine Ordinalzahl, also insbesondere transitiv. Somit gilt $y \subseteq z$, also $y \subseteq \cup x$. Da y beliebig war, zeigt dies die Transitivität von $\cup x$.
- Ohne Einschränkung sei $\cap x$ nicht leer. Als Teilmenge von $\cup x$ ist $\cap x$ wohlgeordnet. Analog wie oben sieht man auch, dass $\cap x$ transitiv ist.