Axiomatische Mengenlehre Serie 2

Modell der Peano Arithmetik Musterlösungen

9. Konstruiere mit den Axiomen 0–6 ein Modell der Peano Arithmetik PA mit Bereich ω.

Konstruktion:

- $\mathbb{N} := \omega$, $0^{\mathbb{N}} := \emptyset$
- $\mathrm{s}^{\mathbb{N}} := \{\langle x, y\rangle \in \omega \times \omega \;:\; y = x \cup \{x\}\}$
  Diese Menge ist eine Funktion, denn es gilt:
  - $\forall x \in \omega : x \cup \{x\} \in \omega$, da ω induktiv ist.
  - $\forall x_1, x_2 \in \omega$: Wenn $x_1 = x_2$, dann folgt aus Extensionalität, dass $x_1 \cup \{x_1\} = x_2 \cup \{x_2\}$.

  Wir können also $\mathrm{s}^{\mathbb{N}} x = y$ für $\langle x, y\rangle \in \mathrm{s}^{\mathbb{N}}$ schreiben.
  Ausserdem sind die folgenden beiden Axiome erfüllt:
  - $\mathsf{PA}_0 : \forall x(\mathrm{s}x \neq 0)$
    Angenommen, es gäbe ein x in ω so, dass $\mathrm{s}^{\mathbb{N}} x = 0^{\mathbb{N}}$ (also $x \cup \{x\} = \emptyset$), dann gälte $x \in \emptyset$, ein Widerspruch.
  - $\mathsf{PA}_1 : \forall x \forall y(\mathrm{s}x = \mathrm{s}y \to x = y)$
    Seien x und y in ω so, dass gilt: $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$. Entweder gilt $x \in y$, $x = y$ oder $x \ni y$.
    Angenommen, es gälte $x \in y$. Dann hätten wir $\{x\} \subseteq y$ und wegen Transitivität $x \subseteq y$. Beides zusammen gäbe uns $x \cup \{x\} \subseteq y$, woraus schliesslich folgte:
    $$y \in y \cup \{y\} = x \cup \{x\} \subseteq y,$$
    also $y \in y$; ein Widerspruch, da sich eine Ordinalzahl nicht selbst enthält.
    Analog folgt $x \not\ni y$, also gilt $x = y$.

- Für Teilmengen A von $\omega \times \omega \times \omega$ definieren wir das Prädikat $\varphi_+(A)$ wie folgt:
  $$\forall x \in \omega : \langle\langle x, \emptyset\rangle, x\rangle \in A \quad \text{und} \quad \forall x, y, z \in \omega : (\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \in A \to \langle\langle x, \mathrm{s}^{\mathbb{N}} y\rangle, \mathrm{s}^{\mathbb{N}} z\rangle \in A).$$
  Sei $+^{\mathbb{N}} := \bigcap\{A \subseteq \omega \times \omega \times \omega \;:\; \varphi_+(A)\}$.

  Behauptung 1. *Dann ist $+^{\mathbb{N}}$ eine Funktion von ω nach $\omega \times \omega$.*

  Beweis.
  - Die Menge $+^{\mathbb{N}}$ ist nicht leer, denn es gilt $\varphi_+(\omega \times \omega \times \omega)$.
  - Angenommen, es gäbe x und y in ω so, dass für alle z in ω gilt: $\langle\langle x, y\rangle, z\rangle \notin +^{\mathbb{N}}$. Sei y minimal mit dieser Eigenschaft. Nun gilt $y \neq \emptyset$, da $x +^{\mathbb{N}} \emptyset = x$. Also gibt es b in ω so, dass $\mathrm{s}^{\mathbb{N}} b = y$. Da y minimal ist, gibt es $c \in \omega$ so, dass $x +^{\mathbb{N}} b = c$. Dann gilt aber auch $x +^{\mathbb{N}} y = x +^{\mathbb{N}} \mathrm{s}^{\mathbb{N}} b = \mathrm{s}^{\mathbb{N}} c$, im Widerspruch zur Annahme.

- Angenommen, es gäbe x, y und $z_1 \neq z_2$ in ω so, dass gilt

  $$\langle\langle x, y\rangle, z_1\rangle, \langle\langle x, y\rangle, z_2\rangle \in +^{\mathbb{N}}.$$

  Sei wiederum y minimal mit dieser Eigenschaft.
  Entweder $y = \emptyset$: Ohne Einschränkung sei $z_2 \neq x$. Dann gälte aber $\varphi_+(+^{\mathbb{N}} \setminus \{\langle\langle x, y\rangle, z_2\rangle\})$, im Widerspruch zur Definition von $+^{\mathbb{N}}$.
  Oder $y \ni \emptyset$: Dann gäbe es b und c in ω so, dass gilt $\mathrm{s}^{\mathbb{N}}b = y$, $\langle\langle x, b\rangle, c\rangle \in +^{\mathbb{N}}$ und ohne Einschränkung $\mathrm{s}^{\mathbb{N}}c \neq z_2$, was zum analogen Widerspruch führen würde wie der erste Fall.

  $\dashv$

  Nun folgen die nächsten beiden Axiome direkt aus der Definition von $+^{\mathbb{N}}$.

  - $\mathsf{PA}_2 : \forall x(x + 0 = x)$
  - $\mathsf{PA}_3 : \forall x \forall y(x + \mathrm{s}y = \mathrm{s}(x + y))$

- Wenn man für $\varphi_.(A)$ analog vorgeht, erhält man PA_4 und PA_5.

- PA_6 : Für jede $\mathscr{L}_{\mathsf{PA}}$-Formel mit $x \in \textit{frei}(\varphi)$ ist das folgende ein Axiom:
  $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(\mathrm{s}x)) \to \forall x \varphi(x)$
  Dies lässt sich auf mindestens zwei Arten beweisen:

  - Da ω die kleinste induktive Menge ist und $\omega_\varphi := \{x \in \omega \ : \ \varphi(x)\} \subseteq \omega$ ebenfalls induktiv ist, muss $\omega_\varphi = \omega$ gelten.
  - Sei C_φ die folgende Klasse von Ordinalzahlen: $\Omega \setminus \{x \in \omega \ : \ \neg\varphi(x)\}$. Ausserdem gelte die Voraussetzung in PA_6. Dann gilt für alle $\alpha \in C_\varphi$, dass $\alpha \cup \{\alpha\} \in C_\varphi$, und alle Limesordinalzahlen sind in C_φ. Also gilt $C_\varphi = \Omega$, insbesondere $\forall x \in \omega : \varphi(x)$.