Axiomatische Mengenlehre Serie 5

Kuratowski-Zorn Lemma & Teichmüllerprinzip Musterlösungen

Im Folgenden bezeichne "$\leq$" eine Partialordnung auf einer Menge P (*d.h.* "$\leq$" ist eine reflexive, antisymmetrische, transitive, binäre Relation auf P).
Eine nicht-leere Menge $K \subseteq P$ welche durch $\leq$ linear geordnet wird heisst *Kette* in P.
Ist $C \subseteq P$ eine nicht-leere Menge und hat $p_0 \in P$ die Eigenschaft, dass für alle $x \in C$ gilt $x \leq p_0$, dann heisst p_0 *obere Schranke* von C.
Ein Element $p \in P$ ist *maximal* in P (bezüglich $\leq$) falls es kein $x \in P$ gibt mit $p < x$ (wobei $p < x \iff p \leq x \land p \neq x$).

> KURATOWSKI-ZORN LEMMA. Sei P eine nicht-leere Menge und sei $\leq$ eine Partialordnung auf P. Hat jede Kette in P eine obere Schranke, so hat P ein bezüglich $\leq$ maximales Element.

Eine Familie $\mathscr{F}$ von Mengen hat *endlichen Charakter*, falls für jede Menge x gilt: $x \in \mathscr{F}$ genau dann wenn jede endliche Teilmenge von x zu $\mathscr{F}$ gehört.

> TEICHMÜLLERPRINZIP. Sei $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen. Hat $\mathscr{F}$ endlichen Charakter, dann hat $\mathscr{F}$ ein, bezüglich Inklusion $\subseteq$, maximales Element.

15. Zeige die folgenden Implikationen:

(a) WOHLORDNUNGSPRINZIP $\Rightarrow$ KURATOWSKI-ZORN LEMMA

(b) KURATOWSKI-ZORN LEMMA $\Rightarrow$ TEICHMÜLLERPRINZIP

(c) TEICHMÜLLERPRINZIP $\Rightarrow$ AUSWAHLAXIOM

Beweis:

(a) Der folgende Beweis stammt von ROY VALENTIN:
Sei P eine nicht-leere Menge und sei $\leq$ eine Partialordnung auf P, so dass jede Kette in P eine obere Schranke besitzt.
Betrachte die Menge

$$\mathscr{K} := \{K \subseteq P \mid K \text{ ist eine Kette.}\},$$

die nach Voraussetzung wohlgeordnet werden kann. Es gibt also $\gamma \in \Omega$ so, dass wir schreiben können:

$$\mathscr{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in \gamma}$$

Für jedes $\alpha \in \gamma + 1$ definieren wir nun eine Kette C_α wie folgt:

i. $C_0 = K_0$

ii. Für $\alpha = \beta + 1 \in \gamma$:

$$C_\alpha = \begin{cases} C_\beta \cup K_\alpha & \text{sofern dies eine Kette ist.} \\ C_\beta & \text{sonst.} \end{cases}$$

iii. Für $\alpha \in \gamma$ Limesordinalzahl:

$$C_\alpha = \begin{cases} \bigcup_{\beta\in\alpha} C_\beta \cup K_\alpha & \text{sofern dies eine Kette ist.} \\ \bigcup_{\beta\in\alpha} C_\beta & \text{sonst.} \end{cases}$$

iv. $C_\gamma = \bigcup_{\beta\in\gamma} C_\beta$

(Die Aufteilung in vier Fälle dient lediglich der Verständlichkeit. Die ersten beiden Fälle liessen sich wie der dritte formulieren.)

Induktiv lässt sich zeigen, dass wir in jedem Schritt eine Kette erhalten. Da C_γ wiederum eine Kette in P ist, besitzt sie eine obere Schranke. Nennen wir diese p.

Behauptung 1. *Dann ist p maximales Element von P.*

Beweis. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es $q \in P$ mit $q > p$. Da p obere Schranke von C_γ ist, folgte:

$$\forall x \in C_\gamma : \ q > x$$

Da für jedes $\beta \in \gamma$ gilt, dass $C_\beta \subseteq C_\gamma$, folgte:

$$\forall \beta \in \gamma : \ \forall x \in C_\beta : \ q > x$$

Nun gäbe es $\alpha \in \gamma$ so, dass $K_\alpha = \{q\}$. Also wäre $\bigcup_{\beta\in\alpha} C_\beta \cup K_\alpha$ eine Kette und wir erhielten $q \in K_\alpha \subseteq C_\alpha \subseteq C_\gamma$, im Widerspruch zur Wahl von q.

$\dashv$

(b) Sei $\mathscr{F}$ eine nicht-leere Familie (von Mengen) mit endlichem Charakter.
Da $\mathscr{F}$ durch die Inklusion partialgeordnet wird, bleibt zu zeigen, dass jede Kette eine obere Schranke besitzt.
Für eine solche Kette $K \subseteq \mathscr{F}$ sei $U_K = \bigcup K$ und sei $B = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\} \subseteq U_K$ eine endliche Teilmenge. Dann existiert für jedes $i \in n$ ein $T_i \in K$ mit $z_i \in T_i$. Da die T_i als Elemente von K linear geordnet sind und da n endlich ist, gibt es $i_0 \in n$ mit $\bigcup_{i\in n} T_i = T_{i_0}$. Somit gilt $B \subseteq T_{i_0} \in \mathscr{F}$ und – da $\mathscr{F}$ endlichen Charakter hat – folgt, dass auch $B \in \mathscr{F}$. Da B beliebig war, gilt $U_K \in \mathscr{F}$. Nun ist U_K aber gerade eine obere Schranke von K. Da K beliebig war, können wir das KURATOWSKI-ZORN LEMMA anwenden und erhalten ein, bezüglich Inklusion, maximales Element von $\mathscr{F}$.

(c) Sei $\mathscr{F}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen. Betrachte

$$\mathscr{E} := \{f \subseteq \mathscr{F} \times \bigcup \mathscr{F} \mid \exists \mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F} : f \text{ ist Auswahlfunktion auf } \mathscr{F}'.\}$$

Dann ist $\mathscr{E}$ nicht leer, denn die leere Funktion ist eine Auswahlfunktion auf der leeren Teilfamilie. Ausserdem hat $\mathscr{E}$ endlichen Charakter. Gemäss TEICHMÜLLER-PRINZIP besitzt $\mathscr{E}$ ein, bezüglich Inklusion, maximales Element f_0. Dieses muss ganz $\mathscr{F}$ als Definitionsbereich haben und ist somit eine Auswahlfunktion auf $\mathscr{F}$.

16. Beweise mit Hilfe des TEICHMÜLLERPRINZIPs, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Beweis:

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Betrachte die folgende Famile:

$$\mathscr{F} := \{B \subseteq V : B \text{ ist linear unabhängig über } K.\}$$

Dann ist $\mathscr{F}$ nicht leer, da $\emptyset \in \mathscr{F}$. Ausserdem hat $\mathscr{F}$ nach der Definition von "linear unabhängig" endlichen Charakter. Also besitzt $\mathscr{F}$ ein, bezüglich Inklusion, maximales Element B_0. Dabei handelt es sich, wie leicht erkennbar ist, um eine Basis:
Wäre B_0 kein Erzeugendensystem von V, dann gäbe es $v \in V$ nicht in der K-linearen Hülle von B_0. Also wäre $B_0 \cup \{v\}$ linear unabhängig und echt grösser als B_0, im Widerspruch zu dessen Maximalität.