Iteriertes Forcing

Plan für das Seminar

- Zwei-Schritt Iterationen (S. 421-427), Anwendung: Dekomposition von Mathias forcing ($\mathbb{M} \approx \mathbb{U} * \mathbb{M}_{\mathcal{U}}$ (Lemma 26.10)).
- Allgemeine Iterationen (S. 429 - 432), folgendes Lemma:

  Lemma [siehe z.B. Kunen [2], Lemma 5.14]. Sei $\mathbf{V}$ das Grundmodell und $\mathbb{P}_\alpha := \langle \underset{\sim}{\mathbb{Q}}_\xi : \xi < \alpha \rangle$ eine finite- (bzw. countable-) support Iteration der Länge α, sodass $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega$ (bzw. $\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega_1$ im Fall countable support), i.e., der Support jeder Bedingung ist beschränkt in α. Sei G $\mathbb{P}_\alpha$-generisch über $\mathbf{V}$ and $S \in \mathbf{V}$ so, dass $\mathbf{V}[G] \models |S| < \mathrm{cf}(\alpha)$. Dann existiert für jedes $X \in \mathbf{V}[G]$ mit $X \subseteq S$ ein $\beta \in \alpha$ mit $X \in \mathbf{V}[G|_\beta]$.
- ccc ist erhalten unter finite-support Iterationen (Prop. 18.10), Anwendung: Modell mit $\omega_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = \kappa$ via finite-support Iteration von Hechler forcing (siehe z.B. [1]).
- Konsistenz von $\mathsf{MA} + \neg\mathsf{CH}$ (siehe z.B. [2][S. 278]).
- Ziel: Konsistenz von $\omega_1 = \mathfrak{d} < \mathfrak{c} = \omega_2$. Problem: Cohen reals bei FSI (Lemma 18.11), brauchen deshalb countable support $\rightarrow$ CSI von Sacks forcing. Problem: nicht ccc, deshalb: properness, Erhalt von properness unter CSI (S. 470-478). **Ohne Beweis von Erhalt von ω^ω-bounding.**
- Keine P-points in countable-support Produkt von Silver forcing [5].
- Keine Q-points im Mathias Modell (Referenz: ChatGPT)
- Konsistenz von $\mathfrak{b} = \beta < \mathfrak{d} = \mathfrak{c} = \mu$ (nichtlineare FSI von Hechler forcing.) (siehe [3] oder [4][S. 12-14] für $\kappa := \omega$)

References

[1] James Baumgartner, Peter Dordal, **Adjoining dominating functions**, The Journal of Symbolic Logic, 1985.

[2] Kenneth Kunen, **Set theory: an introduction to independence proofs**, 1992, Elsevier.

[3] Maxim Burke, **A proof of Hechler's theorem on embedding $\aleph_1$-directed sets cofinally into** $(\omega^\omega, <^*)$, Archive for Mathematical Logic, 1997, Springer.

[4] Vera Fischer, Silvan Horvath, **Generalized Tower Spectra**, The Journal of Symbolic Logic, 2025, Cambridge University Press.

[5] Chodounskỳ, David and Guzmán, Osvaldo and Verner, Jonathan, **An easy proof that there may be no P-points**, arXiv preprint arXiv:2608.26454, 2026.