Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 12: Bild, Kern und Rang linearer Abbildungen

---

56. Eine lineare Abbildung $\psi : V \to V$ heisst *Projektion* wenn gilt $\psi^2 = \psi$.
Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung welcher bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ folgende Matrix entspricht:
$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
(a) Zeige, dass ψ eine Projektion ist.
(b) Bestimme $\mathrm{Kern}(\psi)$ und interpretiere die Abbildung ψ geometrisch.
(c) Finde zwei linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ für die gilt: $\psi(v_1) = v_1$ und $\psi(v_2) = v_2$.

57. Sei $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung und sei
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$
die Matrix von φ bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.
(a) Bestimme eine Basis des Raums $\mathrm{Kern}(\varphi)$.
(b) Bestimme den Rang der Abbildung φ und eine Basis des Raums $\mathrm{Bild}(\varphi)$.
(c) Bestimme eine Basis des Quotientenraums $V/\mathrm{Kern}(\varphi)$.

58. Sei φ^* die zur Abbildung φ aus obiger Aufgabe duale Abbildung.
(a) Bestimme eine Basis des Raums $\mathrm{Kern}(\varphi^*)$.
(b) Bestimme eine Basis des Raums $\mathrm{Bild}(\varphi^*)$.

59. Es seien U und W zwei beliebige Unterräume eines gegebenen Vektorraums. Wir definieren
$$U + W := \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in K \wedge x \in U \wedge y \in W\},$$
d.h. $U + W$ ist die lineare Hülle der Vektoren aus $U \cup W$.
(a) Zeige, dass die Quotientenräume $(U + W)/U$ und $W/(U \cap W)$ isomorph sind.
(b) Zeige, dass gilt: $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$.

60. Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $\varphi^* : W^* \to V^*$ die zu φ duale Abbildung. Es wurde gezeigt:
$$w^* \in \mathrm{Kern}(\varphi^*) \;\Leftrightarrow\; \forall x \in V : w^*\big(\varphi(x)\big) = 0_K\,.$$
Zeige, dass Folgendes gilt:
$$\dim\big(\mathrm{Kern}(\varphi^*)\big) = \dim(W) - \mathrm{Rang}(\varphi)\,.$$