Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 2: Aufgaben zu den Gruppenaxiomen

---

6. Auf der Menge M sei eine assoziative Verknüpfung "$\circ$" gegeben. Zeige mit Induktion, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ genau eine Möglichkeit gibt ein "Produkt" von n Elementen $a_1, \ldots, a_n$ aus M so zu definieren, dass Folgendes gilt:

   (i) $(a_1) = a_1$

   (ii) $(a_1 a_2) = a_1 \circ a_2$

   (iii) Für jede natürliche Zahl i mit $1 < i < n$ gilt:

   $$(a_1 \cdots a_n) = (a_1 \cdots a_i) \circ (a_{i+1} \cdots a_n)$$

7. Sei G eine Gruppe. Zeige:

   (a) G besitzt genau ein Neutralelement.

   (b) Jedes Element aus G besitzt genau ein Inverses.

   (c) Ist y das Inverse von x, dann ist x das Inverse von y.

   (d) Sind a, b, c drei (nicht notwendig verschiedene) Elemente aus G, so gilt: Aus $ab = ac$ folgt $b = c$, und aus $ac = bc$ folgt $a = b$.

8. Sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung "$\circ$" für die folgendes gilt:

   (i) $\exists e \forall x$: $x \circ e = x$ (die Menge M besitzt ein Rechtsneutrales)

   (ii) $\forall x \exists y$: $x \circ y = e$ (jedes Element aus M besitzt ein Rechtsinverses)

   Zeige: $(M, e, \circ)$ ist eine Gruppe.

(A) Im Folgenden sei D_n bzw. W bzw. I die Gruppe aller Drehungen im Raum welche ein regelmässiges n-Eck (für $n \geq 3$) bzw. einen Würfel bzw. ein Ikosaeder in sich abbilden. Zeige:

   (a) $|D_n| = 2n$ (b) D_n ist nicht kommutativ

   (c) $|W| = 24$ (d) W ist nicht kommutativ

   (e) $|I| = 60$ (f) I ist nicht kommutativ

9. Auf der Menge $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^* := (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0,0)\}$ definieren wir die Verknüpfung "$\bullet$" folgendermassen:

   $$(p_1, q_1) \bullet (p_2, q_2) := (p_1 p_2 - q_1 q_2,\ p_1 q_2 + q_1 p_2)$$

   Zeige: $\big((\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^*, \bullet\big)$ ist eine abelsche Gruppe.

10. Ist H eine Untergruppe von $(G, e, \circ)$, so gilt Folgendes:

   (a) Ist $a \in H$ und $b \in H$, dann ist auch $a \circ b \in H$.

   (b) $e \in H$, d.h. H hat dasselbe Neutralelement wie G.

   (c) Ist $a \in H$ und ist a^{-1} das Inverse von a in der Gruppe G, dann ist $a^{-1} \in H$.