Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 6: Lineare Unabhängigkeit und Dimension von Vektorräumen

---

26. (a) Zeige, dass die drei Vektoren $(2,1),(5,3),(1,1) \in \mathbb{R}^2$ im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear abhängig sind.

    (b) Zeige, dass die Vektoren $(1,1,1),(1,-1,1),(-1,1,-1),(0,1,0) \in \mathbb{R}^3$ im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

27. Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei V die Menge aller reellen n-Tupel $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, welche die Bedingung $x_1+\ldots+x_n = 0$ erfüllen. Zeige, dass V ein reeller Vektorraum ist und bestimme seine Dimension.

28. Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei V_1 der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}$ und V_2 der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$. Bestimme die Dimensionen der Vektorräume V_1 und V_2.

29. Sei V der Vektorraum $\mathbb{Z}_5^4$ über $\mathbb{Z}_5$ und sei

    $$M = \{(1,1,1,1),(3,2,3,3),(1,0,0,0),(1,3,1,1),(0,0,1,0)\}$$

    eine Menge von 5 Vektoren aus Z_5^4. Bestimme alle maximalen Teilmengen von linear unabhängigen Vektoren aus der Menge M.

30. Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$. Finde in V eine unendliche Menge von linear unabhängigen Vektoren.
    Hinweis: Betrachte die Menge $\{\log p : p \text{ prim}\}$.

(E) Sei V die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \big(f(x) = f(x+1)\big)\,.$$

Für $f_1, f_2 \in V$ sei

$$(f_1+f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)\,,$$

und für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in V$ sei

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)\,.$$

Zeige, dass V ein reeller Vektorraum ist und finde in V eine unendliche Menge von linear unabhängigen Vektoren.