Lineare Algebra I

WS 00/01

Übungsblatt 8: Zwischentest

Bemerkung: Jedes Resultat muss begründet werden! D.h. die Resultate alleine, ohne Beweis oder Begründung, werden nicht bewertet.

---

36. Berechne $\mathrm{sgn}(\pi)$, wobei $\pi \in S_8$ folgendermassen definiert ist:

$$\pi(1) = 8,\ \pi(2) = 6,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 7,$$
$$\pi(5) = 5,\ \pi(6) = 1,\ \pi(7) = 3,\ \pi(8) = 2.$$

37. Sei $G = \{a, b, c, d\}$ die abelsche Gruppe mit folgender Gruppentafel:

$\circ$	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

(a) Ist G isomorph zu $\mathbb{Z}_4$ oder zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

(b) Gib einen Isomorphismus an.

(c) Wieviele solche Isomorphismen gibt es?

38. Seien $U, W \subseteq \mathbb{R}^5$ mit

$$U = \left\{ (x_1, \ldots, x_5) : x_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i \right\}$$

und

$$W = \left\{ (x_1, \ldots, x_5) : x_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i \textit{ und } x_2 = -\sum_{i=1}^{5} x_i \right\}.$$

(a) Gib eine Basis des reellen Vektorraums U an.

(b) Gib eine Basis des reellen Vektorraums W an.

(c) Gib eine Basis des Quotientenraums $\mathbb{R}^5/W$ an.

39. Sei $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller unendlichen periodischen reellen Folgen, also:

$$W = \left\{(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists k \in \mathbb{N}^* \; \forall i \in \mathbb{N} \; (x_i = x_{i+k})\right\}.$$

(a) Zeige, dass W ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

(b) Für $k \in \mathbb{N}^*$ sei U_k der Unterraum von W für den gilt:

$$U_k = \left\{(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall i \in \mathbb{N} \; (x_i = x_{i+k})\right\}.$$

Bestimme die Dimension des Unterraums U_k und gib eine Basis an.

40. Sei $\mathbb{P} = \{p_0, p_1, \ldots, p_i, \ldots\}$ die Menge aller Primzahlen, wobei $p_i < p_{i+1}$ (für $i \in \mathbb{N}$). Für jede unendliche 0-1–Folge $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sei die Menge $M(x)$ wie folgt definiert:

$$M(x) := \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \; mit \; n = \prod_{i=0}^{k} p_i^{x_i} \right\}.$$

(a) Bestimme die 4 kleinsten Elemente der Menge $M\big((1,0,1,0,1,0,1,\ldots)\big)$.

(b) Zeige: Sind x und y zwei verschiedene unendliche 0-1–Folgen, so ist die Menge $M(x) \cap M(y)$ endlich.

(G) Gib 5 linear unabhängige Vektoren des Quotientenraums ℓ_∞ / c_0 an.