

- $\bar{\varphi}$ ist eindeutig und $\bar{\varphi}[R/\alpha] = \varphi[R]$: das ist analog zum Beweis von Lem. 4.4 für Gruppen.

- $\ker(\bar{\varphi}) = \ker(\varphi)/\alpha$:

$$\begin{aligned}\ker(\bar{\varphi}) &= \{x + \alpha \in R/\alpha : \varphi(x) = 0\} \\ &= \{x + \alpha \in R/\alpha : x \in \ker(\varphi)\} = \ker(\varphi)/\alpha\end{aligned}$$

Folgerung: Für $\alpha = \ker(\varphi)$ erhalten wir mit

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & \varphi[R] \subseteq S \\ \bar{\pi} \downarrow & \nearrow \bar{\varphi} & \\ R/\ker(\varphi) & & \end{array}$$

dass gilt: $\varphi[R] \cong R/\ker(\varphi)$.

Bew. Weil gilt $\ker(\bar{\varphi}) = \underbrace{\ker(\varphi)/\ker(\varphi)}_{=\{0\}}$, ist $\bar{\varphi}$ injektiv,

und aus $\bar{\varphi}[R/\ker(\varphi)] = \varphi[R]$ folgt $\bar{\varphi}$ ist surjektiv; also ist $\bar{\varphi}$ ein Isomorphismus.

Theorem 10.6 (1. Isomorphiesatz)

Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ ein Unterring und $\alpha \subseteq R$ ein Ideal.

Dann ist $S + \alpha = \{x + a : x \in S \wedge a \in \alpha\}$ ein Unterring von R der α als Ideal enthält und es gilt:

$$S/S \cap \alpha \cong (S + \alpha)/\alpha$$

Beweis: • $S + \alpha$ ist Unterring von R :

$$(x + a) \cdot (y + b) = \underbrace{x \cdot y}_{\in S} + \underbrace{x \cdot b}_{\in \alpha} + \underbrace{a \cdot y}_{\in \alpha} + \underbrace{a \cdot b}_{\in \alpha} \in S + \alpha$$

- $\alpha \subseteq S + \alpha$ ist ein Ideal: klar

- Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\varphi} & & \\ S & \hookrightarrow & S + \alpha & \xrightarrow{\bar{\pi}} & S + \alpha / \alpha \\ x & \mapsto & x + 0 & \mapsto & (x + 0) + \alpha \end{array}$$

Bem: S ist Unterring von $S + \alpha$

Bsp. (Thm. 10.6) $R = \mathbb{Z}[X]$ (Ring der Polynome in X mit Koeff. in $\mathbb{Z}$; später ausführlich)

• $\alpha = (2\mathbb{Z}) \in R$

α sind Polynome in X mit Koeff. in $2\mathbb{Z}$. $\begin{matrix} X^0 & X^1 \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{matrix}$

• $S \subseteq R$: die Polynome in X^2 mit Koeff. in $\mathbb{Z}$.

(nur gerade Potenzen von X) $\begin{matrix} X^0 & X^1 \\ \mathbb{Z} & 0 \end{matrix}$

• $S + \alpha$: Polynome in X mit Koeff. in $2\mathbb{Z}$
bei X^k mit k ungerade, in $\mathbb{Z}$ bei k gerade.

• $(S + \alpha) / \alpha$: $\begin{matrix} X^0 & X^1 & X^2 \\ \text{Koeff: } \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} & \dots \end{matrix}$

• $S \cap \alpha$: $\begin{matrix} X^0 & X^1 & X^2 \\ \text{Koeff: } \begin{matrix} 2\mathbb{Z} & 0 & 2\mathbb{Z} \end{matrix} \end{matrix}$

• $S / S \cap \alpha$: $\begin{matrix} X^0 & X^2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & 0 \end{matrix}$

- φ ist Ringhomom.:

$$\varphi(x+y) = (\underbrace{(x+y)+0}_{(x+0)+(y+0)}) + \alpha = (\underbrace{(x+0)+\alpha}_{\varphi(x)} + \underbrace{(y+0)+\alpha}_{\varphi(y)})$$

$$\varphi(x \cdot y) = (\underbrace{(x \cdot y)+0}_{(x+0) \cdot (y+0)}) + \alpha = (\underbrace{(x+0)+\alpha}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{(y+0)+\alpha}_{\varphi(y)})$$

$$\varphi(1) = (1+0) + \alpha = 1_{S+\alpha/\alpha}$$

- $\ker(\varphi) = \{x \in S : x+0 \in \alpha\} = \{x \in S : x \in \alpha\} = S \cap \alpha$;
insbesondere ist $S \cap \alpha$ ein Ideal in S .

- $\varphi[S] = \{x+0+\alpha : x \in S\} = \{x+a+\alpha : x \in S \wedge a \in \alpha\}$

ergibt dieselben Nebenklassen

also ist $\varphi[S] = S+\alpha/\alpha$. Wir erhalten somit:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & S+\alpha/\alpha = \varphi[S] \\ \downarrow \pi & & \nearrow \cong \text{ mit Folgerung aus Lem. 10.5} \\ \underbrace{S/S \cap \alpha}_{= S/\ker(\varphi)} & & \end{array}$$

somit gilt: $S/S \cap \alpha \cong S+\alpha/\alpha$ $\quad \dashv$

Theorem 10.7 (2. Isomorphiesatz)

Seien R, S Ringe, $\varphi: R \rightarrow S$ ein surjektiver Ringhomom.,
und $\alpha \subseteq R$ ein Ideal mit $\ker(\varphi) \subseteq \alpha$. Dann ist

$$R/\alpha \cong S/\varphi[\alpha].$$

[Beweis in den Übungen.]

Beispiel: $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{Z} \times \{0\}$, $\alpha = 3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \varphi: R &\rightarrow S && \ker(\varphi) = \{0\} \times \mathbb{Z} \\ (x, y) &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$