

6.2. Struktur des Phasenraums I: Poisson-Klammern

- Wir nennen $\{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\}$ den **Phasenraum**.
- Observablen** sind Funktionen auf dem Phasenraum: $F = F(q, p)$ (oder auch $F = F(t, q, p)$). (**Beispiele**: $F(q, p) = q^\alpha =$ Ortskoordinate einer Teilchens, $F(q, p) = p_\alpha =$ eine Komponente des Gesamt-drehimpulses, etc.)
- Zeitentwicklung** von Observablen: löst $(q(t), p(t))$ die Hamiltonschen Gleichungen, so berechnet man für $F = F(q(t), p(t))$:

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \\ &= \{F, H\},\end{aligned}$$

wobei wir die **Poisson-Klammer** zweier Funktionen f, g von (q, p) als

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q^\alpha}$$

definieren.

- Für $F = F(t, q(t), p(t))$ gilt $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}$.
(Also $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ nw, wenn H keine explizite Zeitabhängigkeit hat.)
- Als Spezialfall können wir die **Hamiltonschen Gleichungen** schreiben als

$$\dot{q}^\alpha = \{q^\alpha, H\}, \quad \dot{p}_\alpha = \{p_\alpha, H\}.$$

- Wir halten **weitere Eigenschaften** der Poisson-Klammer fest:

(1) **kanonische Poisson-Klammern**:

$$\{q^\alpha, q^\beta\} = 0, \quad \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \quad \{q^\alpha, p_\beta\} = \delta_\beta^\alpha.$$



(2) Antisymmetrie:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

(3) Produktregel und Linearität: für f, g, h (Funktionen von p, q) und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h,$$

$$\{f, \lambda g + \mu h\} = \lambda \{f, g\} + \mu \{f, h\}.$$

Also: $\{f, \cdot\}$ verhält sich wie ein Ableitungsoperator, der also eine Richtungsableitung im Phasenraum ist entlang des **Hamiltonschen Vektorfeldes zu f** ,

$$X_f = \{f, \cdot\} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\alpha}.$$

(Man kann X_f , wie jedes Vektorfeld, auch als Operator $g \mapsto X_f(g) = \{f, g\}$ verstehen — einen Differentialoperator erster Ordnung.)

(4) Jacobi-Identität: für alle f, g, h gilt

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

(Beweis: Rechnung!)

Bemerkung. (i) (2) – (4) sind die definierenden Eigenschaften einer **Poisson-Algebra** (hier den Raum der glatten Funktionen auf dem Phasenraum).

(ii) Mittels X_\cdot können wir die Hamiltonschen Gleichungen schreiben

$$\text{als } \frac{d}{dt} z = -X_H|_z \quad (z = (q, p)).$$

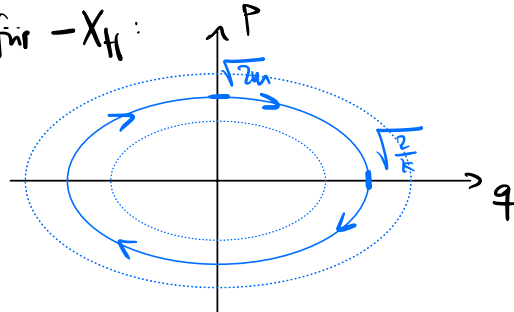
D.h. Lösungen $z=z(t)$ der Bewegungsgleichungen sind Integralkurven von $-X_H$ (=Vektorfeld im Phasenraum).

• Beispiel zu (3): harmonischer Oszillator (in einer Dimension).

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \quad (q=x)$$

$$\text{Daher ist } X_H = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} = kq \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{m} p \frac{\partial}{\partial q}.$$

Phasendiagramm für $-X_H$:



• Anwendung von (4): Erhaltungsgrößen. Wir betrachten ein System mit Hamiltonfunktion $H = H(q, p)$. Angenommen, $F = F(p, q)$ und $G = G(p, q)$ sind Erhaltungsgrößen, also $\{F, H\} = \{G, H\} = 0$.

Dann ist auch $\{F, G\}$ eine Erhaltungsgröße, da

$$\{\{F, G\}, H\} = \underbrace{\{\{F, H\}, G\}}_{=0} - \underbrace{\{\{G, H\}, F\}}_{=0} = 0.$$

Beispiel: Teilchen mit Ort \vec{x} und konjugierten Impuls \vec{p} . Schreiben $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$.

(i) Sind $L_1 = \vec{L} \cdot \vec{e}_1$ und $L_2 = \vec{L} \cdot \vec{e}_2$ erhalten, so auch L_3 .

(ii) Sind $p_i = \vec{p} \cdot \vec{e}_i$ und zwei Komponenten von \vec{L} erhalten, so ist \vec{p} erhalten.