

## Ableitung der Determinante

Wir betrachten eine parameterabhängige  $n \times n$ -Matrix  $P(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Behauptung:  $\frac{d}{dt} \det P(t) = \operatorname{tr} \left( P(t)^{-1} \frac{d}{dt} P(t) \right) \det P(t)$ .

(Insbesondere ist  $\det P(t) = \text{const.}$ , falls  $\frac{d}{dt} P(t) = A(t)P(t)$  mit  $\operatorname{tr} A(t) = 0$ .)

Beweis: Es genügt, die Formel für  $t=0$  zu überprüfen.

(1) Angenommen,  $P(0) = I_{n \times n}$ ; dann gilt

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1+tq_{11} & tq_{12} & \dots & tq_{1n} \\ tq_{21} & 1+tq_{22} & \dots & tq_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tq_{n1} & tq_{n2} & \dots & 1+tq_{nn} \end{pmatrix} + O(t^2),$$

$$\text{also } \det P(t) = (1+tq_{11})(1+tq_{22}) \dots (1+tq_{nn}) + O(t^2)$$

$$= 1 + t(q_{11} + \dots + q_{nn}) + O(t^2)$$

$$= 1 + t \operatorname{tr} \left( \frac{d}{dt} P(t) \Big|_{t=0} \right) + O(t^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \det P(t) \Big|_{t=0} = \operatorname{tr} \left( \frac{d}{dt} P(t) \Big|_{t=0} \right).$$

(2) Im allgemeinen Fall gilt  $P(t)P(0)^{-1} = I$  für  $t=0$ , also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det P(t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \det (P(t)P(0)^{-1}P(0)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \det (P(t)P(0)^{-1}) \Big|_{t=0} \det P(0) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \operatorname{tr} \left( \frac{d}{dt} (P(t)P(0)^{-1}) \Big|_{t=0} \right) \det P(0)$$

$$= \operatorname{tr} \left( \left. \frac{d}{dt} P(t) \right|_{t=0} P(0)^{-1} \right) \det P(0)$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \Rightarrow \operatorname{tr} \left( P(0)^{-1} \left. \frac{d}{dt} P(t) \right|_{t=0} \right) \det P(0). \quad \text{_____}$$