

## 7.2. Lorentzgruppe und Poincarégruppe

- Wir betrachten zwei Inertialsysteme

$$\begin{cases} S \\ \hat{S} \end{cases} \text{ mit Koordinaten } \begin{cases} t, x, y, z \\ \hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \end{cases}.$$

$S$  und  $\hat{S}$  mögen sich mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  zueinander bewegen.  
Der Ursprung in  $S$  und  $\hat{S}$  beschreibe dasselbe Ereignis.

- (1) Ein Lichtblitz, der vom Ursprung in  $S$  ausgeht, breitet sich aus auf dem Lichtkegel

$$L = \{-c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0\}.$$

Gleiches muss in  $\hat{S}$  gelten, d.h. derselbe Lichtkegel muss in  $\hat{S}$  gegeben

sein durch  $\hat{L} = \{-c^2 \hat{t}^2 + \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = 0\}$  (2. Postulat!)

$\Rightarrow$  Die Koordinatentransformation von  $(t, x, y, z)$ - auf  $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ -Koordinaten muss  $L$  auf  $\hat{L}$  abbilden.

- In 4-er Notation  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z)$

und mit  $g = (g_{\mu\nu})_{\mu, \nu=0, \dots, 3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  heisst das, dass

$$x \cdot x := x^T g x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

implizieren muss

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = 0.$$

- (2) Weitere Information über die Koordinatentransformation erhalten wir wie folgt: ein (kräfte)freies Teilchen bewegt sich im Inertialsystem  $S$

mit konstanter Geschwindigkeit, d.h. seine Bahn in  $S$  ("Weltlinie") ist eine Gerade.

1. Postulat  $\Rightarrow$  auch in  $\hat{S}$  ist die Weltlinie eine Gerade.

$\Rightarrow$  Die Transformation muss linear sein:  $\hat{x} = Ax + b$ , oder

$$\hat{x}^\mu = A^\mu_\nu x^\nu + b^\mu \quad (A^\mu_\nu, b^\mu \in \mathbb{R} \text{ für } \mu, \nu = 0, \dots, 3)$$

Da wir angenommen haben, dass  $x=0$  auch  $\hat{x}=0$  entspricht, ist  $b^\mu=0$ .

(3)  $\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{x}^T g \hat{x} \stackrel{\hat{x}=Ax}{=} x^T A^T g A x$  soll  $=0$  sein genau dann, wenn  $x^T g x = 0$  ist. Man kann zeigen, dass das genau dann gilt, wenn  $A^T g A = \alpha(\vec{v}) g$  für eine Konstante  $\alpha(\vec{v})$  gilt.

Behauptung:  $\alpha(\vec{v})$  muss  $=1$  sein infolge von physikalischen und Stetigkeitsüberlegungen.

Begründung: (i)  $\alpha(\vec{0})=1$ : für  $\vec{v}=\vec{0}$  sind  $S$  und  $\hat{S}$  ein und dasselbe Bezugssystem, also  $A=I$ !

(ii) Sinnvolle Annahme:  $\alpha(\vec{v})$  ist stetig in  $\vec{v}$ .

$$\text{Da } \det(A^T g A) = \det(A)^2 \det(g) = -\det(A)^2$$

$$\det(\alpha(\vec{v})g) = \alpha(\vec{v})^4 \det(g) = -\alpha(\vec{v})^4,$$

ist  $\alpha(\vec{v}) \neq 0$ .

$\Rightarrow \alpha(\vec{v}) > 0$  (wegen Stetigkeit und (i)).

$$(iii) \alpha(\vec{v}+\vec{w}) g = A[\vec{v}+\vec{w}]^T g A[\vec{v}+\vec{w}]$$

Physik  $\Rightarrow$  Transformation in System mit Geschwindigkeit  $\vec{v}+\vec{w}$

$$= (A[\vec{v}] A[\vec{w}])^T g A[\vec{v}] A[\vec{w}]$$

$$= A[\vec{\omega}]^T \underbrace{A[\vec{v}]^T g A[\vec{v}]}_{= \alpha(\vec{v}) g} A[\vec{\omega}]$$

$$= \alpha(\vec{\omega}) \alpha(\vec{v}) g.$$

$$\Rightarrow \alpha(\vec{v} + \vec{\omega}) = \alpha(\vec{v}) \alpha(\vec{\omega})$$

$$\Rightarrow \log(\alpha(\vec{v} + \vec{\omega})) = \log(\alpha(\vec{v})) + \log(\alpha(\vec{\omega})),$$

Also ist  $\vec{v} \mapsto \log \alpha(\vec{v})$  linear, also von der

Form  $\log \alpha(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{z}$  für einen bestimmten

Vektor  $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ . Da aber (Physik!) keine Raumrichtung ausgezeichnet ist, kann  $\vec{z}$  nur  $\vec{0}$  sein!

$$\Rightarrow \alpha(\vec{v}) = \exp(\vec{v} \cdot \vec{0}) = \exp(0) = 1 \quad \forall \vec{v}. \quad \text{---}$$

• Definition: Eine Lorentz-Transformation ist eine lineare Abbildung

$\Lambda: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit der Eigenschaft  $\Lambda^T g \Lambda = g$ .

(Index-Notation:  $\Lambda^\mu_\nu g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma_\rho = g_{\nu\rho} \oplus$ .)

• Wir schreiben  $L := \{ \Lambda \text{ Lorentz-Transformation} \}$  für die

Lorentzgruppe. ( $I \in L; \Lambda \in L \Rightarrow \Lambda^{-1} \in L; \Lambda_1, \Lambda_2 \in L \Rightarrow \Lambda_1 \Lambda_2 \in L$ )

• Definition: Poincaré-Gruppe ist  $\{ x \mapsto \Lambda x + b: \Lambda \in L, b \in \mathbb{R}^4 \}$ .

(Mathematisch ist dies ein semidirektes Produkt  $L \ltimes \mathbb{R}^4$ .)

### 7.2.1. Struktur der Lorentzgruppe $L$

(1) Es gilt  $(\det \Lambda)^2 = 1$  für alle  $\Lambda \in L$ .

$$-(\Lambda^0_0)^2 + \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 = -1 \quad (\text{die } (\mu, \nu) = (0, 0)\text{-Komponente von } \otimes).$$

$\Rightarrow L$  hat 4 Komponenten. Die "interessanteste" ist

$$L_+^\uparrow = \{ \Lambda \in L : \det \Lambda = +1, \Lambda^0_0 \geq 1 \}$$

(eigentliche orthochrone Lorentzgruppe).

Bemerkung. Nicht in  $L_+^\uparrow$  sind

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in L \quad (\text{Zeitumkehr})$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in L \quad (\text{Raumspiegelung})$$

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in L.$$

Es gilt die Zerlegung  $L = L_+^\uparrow \sqcup T L_+^\uparrow \sqcup P L_+^\uparrow \sqcup PT L_+^\uparrow$ .

(2) Spezielle Elemente in  $L_+^\uparrow$ .

(2.1) Räumliche Rotationen:  $\Lambda(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ ,  $R \in \text{SO}(3)$  (Rotationsmatrix in  $\mathbb{R}^3$ )

(2.2) Lorentz-Boosts ("hyperbolische Rotation")

$$\Lambda(\theta) := \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ heisst Rapidität.}$$

(Überprüfung: (für Inverse))  $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L_+^T$  genau dann, wenn  $a \geq 1$ ,  $ad - bc = 1$ ,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -a^2+c^2 & -ab+cd \\ -ab+cd & -b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{cd}{a} \quad \text{und} \quad d^2 \left( -\frac{c^2}{a^2} + 1 \right) = 1 = a^2 - c^2$$

$$\frac{d^2}{a^2} (a^2 - c^2) = a^2 - c^2,$$

also  $a = \pm d$ ,  $b = \pm c$ ,  $a^2 = c^2 + 1$ ; schreiben

$c = \sinh \theta$ ,  $a = \cosh \theta$  (da  $a \geq 1$ ) und dann  $d=a$ ,  $b=c$  (damit  $ad-bc=1$ ). \_\_\_\_\_

(3) Jedes  $\lambda \in L_+^\uparrow$  kann geschrieben werden als

$$\Lambda = \Lambda(R_1) \Lambda(\theta) \Lambda(R_2)$$

für geeignete  $R_1, R_2 \in SO(3)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

/ Beweis: Sei  $\lambda \in L_+^1$ . Betrachte  $V := \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 = (\lambda x)^0 = 0\}$ .

(für Interesse) Fall 1:  $\dim V = 3$ . Dann ist  $(\Lambda x)^0 = 0$ , wenn  $x^0 = 0$ , also

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{ notwendigweise } +1 \text{ und } R \in \text{SO}(3),$$

da  $\Lambda \in L_{+}^{\uparrow}$ .

Fall 2:  $\dim V = 2$ . Nach Drehung von rechts, um die  $yz$ -Ebene auf  $M$  abzubilden, und Drehung von links, um  $M$  auf die  $yz$ -Ebene abzubilden, hat  $\Lambda$  dann die Blockform  $\Lambda = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ,  $A, B$   $2 \times 2$ -Matrizen,  $\det A = \det B = \pm 1$  (da  $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ ).

2.1.  $\det A = \det B = +1$ .

$$\Rightarrow \Lambda = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}}_{=\Lambda(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{=\Lambda(R)}$$

2.2.  $\det A = \det B = -1$ .

$$\Rightarrow \text{Für } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ gilt } \Lambda = \underbrace{\begin{pmatrix} AC & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}}_{=\Lambda(\theta)} \underbrace{\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}}_{=\Lambda(R)}$$

Beispiel.  $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$ ,  $|\vec{e}|=1$ . Lorentz-Boost  $\Lambda(\theta \vec{e})$  in Richtung  $\vec{e}$  mit Rapidität  $\theta$  (oder kurz: mit Rapidität  $\theta \vec{e}$ ) ist

$$\Lambda(\theta \vec{e}) = \Lambda(R^{-1}) \Lambda(\theta) \Lambda(R),$$

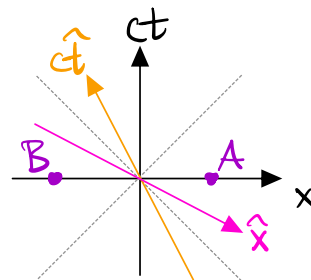
wobei  $R \in SO(3)$  eine Rotationsmatrix ist mit  $R\vec{e} = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(z.B. ist  $\Lambda(\theta \vec{e}_1) = \Lambda(\theta)$  ein Lorentz-Boost in Richtung  $\vec{e}_1$ .)

Die interessanten neuen Transformationen sind hier also die Lorentz-Boosts, die wir jetzt genauer untersuchen wollen.

$\hat{x} = \Lambda(\theta)x$  heisst in Koordinaten  $(ct, x, y, z)$  und  $(c\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ :

$$\begin{cases} c\hat{t} = (\cosh \theta) ct + (\sinh \theta) x \\ \hat{x} = (\sinh \theta) ct + (\cosh \theta) x \\ \hat{y} = y \\ \hat{z} = z \end{cases}$$



Gleichzeitigkeit in  $S$  (d.h.  $ct = \text{const.}$ ) ist **nicht dasselbe** wie Gleichzeitigkeit in  $\hat{S}$  (d.h.  $c\hat{t} = \text{const.}$ ):  $A, B$  sind gleichzeitig in  $S$ , aber  $A$  passiert nach  $B$  in  $\hat{S}$ .

$\hat{x} = 0$  heisst  $x = -(\tanh \theta) ct$ ,  
( $c\hat{t}$ -Achse)

$c\hat{t} = 0$  heisst  $x = -(\coth \theta) ct$   
( $x\hat{t}$ -Achse)

Ein freies Teilchen im  $S$ -System mit Koordinaten  $t \in \mathbb{R}, (x, y, z) = 0$  hat im  $\hat{S}$ -System die Koordinaten  $\hat{x} = ct \tanh(\theta), \hat{y} = \hat{z} = 0$ , bewegt sich also mit Geschwindigkeit  $v(\theta) = c \tanh(\theta)$ .  $\otimes$

**Bemerkung.** Da  $|\tanh(\theta)| < 1 \forall \theta$ , ist insbesondere  $|v(\theta)| < c$ : das Teilchen bewegt sich in allen Inertialsystemen mit weniger als der Lichtgeschwindigkeit!

• Aus  $\otimes$  folgt  $\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} := \gamma$   
 $\sinh \theta = \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \beta \gamma \quad (\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}})$

$$\Rightarrow \Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

und daher  $\hat{t} = \frac{t + xv/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = t + \mathcal{O}(\frac{v}{c^2})$  (wenn  $|x| = \mathcal{O}(1)$ )

$$\hat{x} = \frac{x + vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = x + vt + \mathcal{O}(\frac{v^2}{c^2}).$$

Der Lorentz-Boost geht also für  $\frac{v}{c} \rightarrow 0$  in eine Galilei-Transformation über.

• Addition von Geschwindigkeiten.

Es gilt  $\Lambda(\theta_1) \Lambda(\theta_2) = \Lambda(\theta_1 + \theta_2)$ : die Rapidity ist additiv bei Verküpfungen von Boosts (in dieselbe Richtung, merke!).

Die Geschwindigkeit ist nicht additiv, sondern:

$$v = c \tanh(\theta_1 + \theta_2) = c \frac{\tanh \theta_1 + \tanh \theta_2}{1 + \tanh \theta_1 \tanh \theta_2}$$

$$= \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \quad (\text{Relativistisches Additionsgesetz für Geschwindigkeiten.})$$

Insbesondere gilt:  $|v_1|, |v_2| < c \Rightarrow |v| < c!$