

6.4. Struktur des Phasenraums II: symplektische Form

Neben der eher algebraischen Perspektive auf den Phasenraum (Poisson-Klammern) können wir auch eine geometrische Perspektive nehmen.

Wir betrachten den Phasenraum

$$M \subset \mathbb{R}^n$$

und erlauben uns, verschiedene Koordinatensysteme auf M zu wählen.

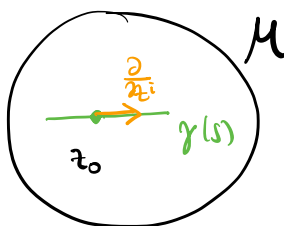
- Definition. Für $z_0 \in M$ ist der **Tangentenraum** $T_{z_0}M$ der n -dimensionale Vektorraum aller "infinitesimalen Verschiebungen" auf M ausgehend vom Punkt z_0 , d.h. der Raum aller $\gamma'(0)$, wobei $\gamma: (-1, 1) \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = z_0$.

Für den Tangentialvektor $\gamma'(0)$, wobei $\gamma(s) = z_0 + s\vec{e}_i$, schreibt man $\frac{\partial}{\partial z^i}$.

Ein allgemeiner Vektor $v \in T_{z_0}M$

ist also von der Form

$$v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad v^i \in \mathbb{R}.$$



$$\Rightarrow T_{z_0}M = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n} \right\} \cong \mathbb{R}^n \quad (\text{Tangentenraum am Punkt } z_0.)$$

Definition. Ein **Vektorfeld** ist eine Abbildung v , sodass

$$v(z_0) \in T_{z_0}M \quad \forall z_0 \in M.$$

Bemerkung. $v \in T_{z_0}M$ fungiert auch als **Richtungsableitung**: ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine

Funktion, so ist $v(f) \in \mathbb{R}$ die Ableitung von f an z_0 in Richtung v .

Beispiel. (1) Zu einem Fluss $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ auf M assoziiert ist das erzeugende Vektorfeld $v(z_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_\lambda(z_0)|_{\lambda=0} \in T_{z_0}M$.

(2) Mit $H = H(q, p)$ ist das Vektorfeld X_H auf dem Phasenraum assoziiert. Aufgefasst als Ableitungsoperator ist $X_H f = \{H, f\}$.

• Definition. Ein duales Vektorfeld (oder 1-Form) ψ ist eine Abbildung mit $\psi(z_0) \in (T_{z_0}M)^*$, d.h. $\psi(z_0): T_{z_0}M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

Beispiel. Die Differentiale dz^1, \dots, dz^n bilden eine Basis von $T_{z_0}^*M = (T_{z_0}M)^*$; sie sind definiert durch

$$dz^i\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right) = \delta^i_j. \quad (\text{Also } T_{z_0}^*M = \text{span}\{dz^1, \dots, dz^n\} \cong \mathbb{R}^n)$$

Sie geben also "infinitesimalen Änderungen" der z^i einen rigorosen Sinn.

Beispiel. Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist

df
die 1-Form $df(z_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^i}(z_0) dz^i$.

Für einen Tangentialvektor $v = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ ist also

$$df(z_0)(v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial z^i}(z_0) = v(f) \quad (\text{Richtungsableitung}).$$

Definition. (i) Eine k -Form ψ ist eine Abbildung

$$\psi(z_0): T_{z_0}M \times \dots \times T_{z_0}M \longrightarrow \mathbb{R},$$

die multilinear und total antisymmetrisch ist. (" $\psi(z_0) \in \wedge^k T_{z_0}^*M$ ".)

(ii) Für 1-Formen ψ_1, \dots, ψ_k schreiben wir $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$ für die k -Form

$$(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \psi_1(v_1) & \dots & \psi_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_k(v_1) & \dots & \psi_k(v_k) \end{pmatrix}.$$

(Alle k -Formen sind Linearkombinationen von solchen speziellen k -Formen.)

Physikalische Beispiele. (1) Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}$ (Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^3$) \Rightarrow die infinitesimale Arbeit ist eine 1-Form

$$W(\vec{x}) = F_1(\vec{x}) dx^1 + F_2(\vec{x}) dx^2 + F_3(\vec{x}) dx^3 \in T_{\vec{x}}^* \mathbb{R}^3.$$

Bei infinitesimaler Bewegung $v = \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ verrichtet F das "Arbeitsquant"

$$W(v) = \sum_{i=1}^3 v^i F_i. \quad (\text{D.h.: Arbeit entlang der Kurve } \gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ist } \int_{\gamma} W := \int_0^1 W|_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt.)$$

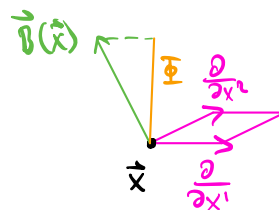
(2) Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x}) \rightsquigarrow$ infinitesimaler magnetischer Fluss

$$\Phi(\vec{x}) = B_1(\vec{x}) dx^2 \wedge dx^3 + B_2(\vec{x}) dx^3 \wedge dx^1 + B_3(\vec{x}) dx^1 \wedge dx^2 \in \wedge^2 T_{\vec{x}}^* \mathbb{R}^3.$$

Infinitesimaler Fluss durch das infinitesimale Parallelogramm aufgespannt durch

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2} \in T_{\vec{x}} \mathbb{R}^3: \quad \Phi(\vec{x})\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right) = B_3(\vec{x}).$$

(Fluss durch die Fläche $\Sigma: \int_{\Sigma} \Phi$.)



Es gibt eine allgemeine bilineare Operation $\varphi \wedge \psi = (k+l)$ -Form, wenn $\varphi = k$ -Form, $\psi = l$ -Form, mit $\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \varphi$.

• Definition. Die äußere Ableitung d bildet k - auf $(k+1)$ -Formen ab und ist definiert durch:

$$(i) \quad df(z_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^i} dz^i \quad (\text{wie oben})$$

$$(ii) \quad d(\underbrace{\varphi}_{k\text{-Form}} \wedge \underbrace{\psi}_{l\text{-Form}}) = (d\varphi) \wedge \psi + (-1)^k \varphi \wedge (d\psi)$$

$$(iii) \quad d(d\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow d(f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = df_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k.$$

Beispiel. zum Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$ assoziieren wir die 1-Form

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i dx^i. \quad \text{Dann ist}$$

$$\begin{aligned} dA &= d(A_1 dx^1) + d(A_2 dx^2) + d(A_3 dx^3) \\ &= \underbrace{\frac{\partial A_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^1}_{=0} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial A_1}{\partial x^3} dx^3 \wedge dx^1 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3$$

$$+ \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1$$

$$= B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2$$

$$\text{mit } \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Lemma (Poincaré). Sei ψ eine **geschlossene k -Form** ($d\psi=0$) auf einem zusammenhängenden Gebiet M . Dann gibt es eine $(k-1)$ -Form φ mit $d\varphi=\psi$.

Beispiel (1) Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow$ infinitesimale Arbeit $W = \sum F_i dx^i$. Dann gilt $dW=0$ ($\Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x^j} - \frac{\partial F_j}{\partial x^i} = 0 \forall i,j$) genau dann, wenn $W = -dV$ ($\Leftrightarrow F_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}$).

(2) Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x}), \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow B = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + \dots$ ist geschlossen genau dann, wenn $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial B_i}{\partial x^i} = 0$ ($\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) ($\Leftrightarrow B = dA$ ($\Leftrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$)).

Definition. **Symplektische Form** im Phasenraum $M \subset \mathbb{R}^{2N} \ni (q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N)$:

$$\omega = \sum_{\alpha=1}^N dq^\alpha \wedge dp_\alpha.$$

(i) $d\omega=0$, und es gilt $\omega = -d(\sum p_\alpha dq^\alpha) = d(\sum q^\alpha dp_\alpha)$.

(ii) $\omega(X_f, X_g) = \{f, g\}$.

Prüfen der nur für $f, g =$ Koordinatenfunktionen:

$$\omega(X_{q^\alpha}, X_{q^\beta}) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \frac{\partial}{\partial p_\beta}\right) = 0 \stackrel{!}{=} \{q^\alpha, q^\beta\} \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \omega(X_{q^\alpha}, X_{p_\beta}) &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, -\frac{\partial}{\partial q^\beta}\right) = \sum_{\gamma=1}^N \underbrace{(dq^\gamma \wedge dp_\gamma)}_{\det \begin{pmatrix} 0 & -\delta_\beta^\gamma \\ \delta_\gamma^\alpha & 0 \end{pmatrix}} \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \frac{\partial}{\partial q^\beta}\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 0 & -\delta_\beta^\gamma \\ \delta_\gamma^\alpha & 0 \end{pmatrix} \\ &= \delta_\beta^\alpha \stackrel{!}{=} \{q^\alpha, p_\beta\} \quad \checkmark. \end{aligned}$$

$$\omega(X_{p_\alpha}, X_{p_\beta}) = 0.$$

Folgerung. Eine Abbildung $\bar{z} = \bar{z}(z) = (\bar{q}(q, p), \bar{p}(q, p))$ ist kanonisch, wenn $\sum_{\alpha=1}^N d\bar{q}^\alpha \wedge d\bar{p}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N dq^\alpha \wedge dp_\alpha (= \omega)$ gilt.

(Denn das gilt genau dann, wenn $X_{\bar{q}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\alpha}$, $X_{\bar{p}_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial \bar{q}^\alpha}$, und also $\{\bar{q}^\alpha, \bar{p}_\beta\} = X_{\bar{q}^\alpha} \bar{p}_\beta = \delta_\beta^\alpha = \{q^\alpha, p_\beta\}$, gleichermassen für die anderen kanonischen Poisson-Klammern.)

Definition. Eine 2-Form ω , die geschlossen ($d\omega=0$) und nicht-entartet ($\omega(v, w)=0 \forall w \in T_{z_0} M \Rightarrow v=0$) ist, nennt man symplektisch.

Satz von Darboux: Jede symplektische Form ist von der Form $\sum dq^\alpha \wedge dp_\alpha$ für geeignete lokale Koordinaten $q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N$ auf M .

Wozu das Ganze? Mittels der symplektischen Form lässt sich einfach rechnen.

Beispiel. Ist $(q, p) \mapsto (\bar{q}(q, p), \bar{p}(q, p))$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $\sum \bar{p}_\alpha d\bar{q}^\alpha = \sum p_\alpha dq^\alpha$, so ist sie kanonisch.

(Denn es gilt dann auch $d(\sum \bar{p}_\alpha d\bar{q}^\alpha) = \sum d\bar{p}_\alpha \wedge d\bar{q}^\alpha = d(\sum p_\alpha dq^\alpha) = \sum dp_\alpha \wedge dq^\alpha$.)

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \bar{q}^\alpha &= \bar{q}^\alpha(q), \quad \bar{p}_\alpha(q, p) := \sum_{\beta=1}^N p_\beta \frac{\partial q^\beta}{\partial \bar{q}^\alpha} \\ \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \bar{p}_\alpha d\bar{q}^\alpha &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} p_\beta \underbrace{\frac{\partial q^\beta}{\partial \bar{q}^\alpha} \frac{\partial \bar{q}^\alpha}{\partial q^\gamma}}_{\sum_{\alpha} (\dots) = \delta_\gamma^\beta} dq^\gamma = \sum_{\beta=1}^N p_\beta dq^\beta. \end{aligned}$$