

## Resonanz bei harmonischer Anregung eines gedämpften harmonischen Oszillators

•  $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F(t)$

$\Leftrightarrow \dot{\vec{z}} = A\vec{z} + \vec{b}$  für  $\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,

$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \frac{r}{2m}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_{\max}}{\alpha} \end{pmatrix}$

• Wir betrachten den **Schwingungsfall**  $\alpha > \beta$ , also  $\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \in \mathbb{R}$ ,

in welchem für  $F=0$  gilt:  $x(t) = x(0)e^{-\beta t} \cos(\omega_0 t) + \dot{x}(0)e^{-\beta t} \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}$

• Betrachten **harmonische Anregung**  $F(t) = \text{Re} e^{i\omega t}$ , also  $\vec{b}(t) = \text{Re} e^{i\omega t} \vec{b}_0$ ,  $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$

wobei  $\omega \approx \omega_0$ . Laut **Vorkursion** ist das Langzeitverhalten

$\vec{z}(t) \sim \text{Re} \left( r e^{i(\omega t + \delta)} \Pi_{-\beta \pm i\omega_0} \vec{b}_0 \right)$ , wobei  $\begin{cases} r = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\beta}\right) \end{cases}$ .

Nun ist  $-\beta \pm i\omega_0$  Eigenwert von  $A$  mit

Eigenvektor  $\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \mp i\omega_0 \end{pmatrix} = \vec{v}_{\pm}$ . Die

$\left( A - (-\beta \pm i\omega_0) I_2 = \begin{pmatrix} \beta \mp i\omega_0 & \alpha \\ -\alpha & -\beta \mp i\omega_0 \end{pmatrix} \right)$   
hat  $\begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \mp i\omega_0 \end{pmatrix}$  im Kern.

Projektion  $\Pi_{-\beta \pm i\omega_0}$  ist definiert durch  $\Pi_{-\beta \pm i\omega_0} : \begin{matrix} \vec{v}_+ \mapsto \vec{v}_+ \\ \vec{v}_- \mapsto 0 \end{matrix}$ ,

ist also gegeben durch die Matrix

$\Pi_{-\beta \pm i\omega_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha \\ \beta - i\omega_0 & \beta + i\omega_0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \vec{v}_+ & \vec{v}_- \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha \\ \beta - i\omega_0 & \beta + i\omega_0 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \frac{1}{2i\omega_0} \begin{pmatrix} \beta + i\omega_0 & \alpha \\ -\alpha & -\beta + i\omega_0 \end{pmatrix}$ .

$$\Rightarrow \Pi_{-\beta + i\omega_0} \vec{b}_0 = \frac{1}{2i\alpha\omega_0} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta + i\omega_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\alpha\omega_0} \begin{pmatrix} -i\alpha \\ i\beta + \omega_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &\sim \operatorname{Re}(\text{1. Komponente von } re^{i(\omega t + \delta)} \Pi_{-\beta + i\omega_0} \vec{b}_0) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{r}{2\omega\omega_0} e^{i(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2})}\right) \quad (-i = e^{-\frac{i\pi}{2}}) \\ &= \frac{r}{2\omega\omega_0} \cos(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Haben also eine Phasendifferenz von  $\delta - \frac{\pi}{2}$  ( $= -\frac{\pi}{2}$  im Resonanzfall)  
bei harmonischer Anregung mit  $F = \cos(\omega t)$ .

**Zusammenfassend:** die Projektion  $\Pi_{\lambda} \vec{b}_0$  auf den  $\lambda$ -Eigenraum von  $A$   
kann komplexe Komponenten haben (oben:  $-i$ ) — selbst für reelle  
 $\vec{b}_0$  — was zu weiteren beobachteten Phasendifferenzen beiträgt.