

7.6. Lagrange-Formulierung.

Die Weltlinien freier Teilchen sind Geraden.

Behauptung: Bei festen Endpunkten x_0, x_1 , mit $x_1 - x_0$ zukünftig zeitartig, sind auch die stationären Punkte des Funktionals

$$\tau[\gamma] = \int_{\gamma} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2} dt \quad \left(\begin{array}{l} \gamma(t) = (ct, \vec{x}(t)), \\ \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \end{array} \right)$$

Geraden.

Beweis. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrange-Funktion

$$L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}$$

$$\text{Sind } \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left(\frac{-\dot{\vec{x}}/c^2}{\sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}} \right) = 0$$

$$\iff (1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2)^{-\frac{3}{2}} \ddot{\vec{x}} = 0,$$

also $\ddot{\vec{x}} = 0$, d.h. $\dot{\vec{x}} = \vec{v} = \text{const.} \Rightarrow \gamma$ ist eine Gerade. —

• Für Weltlinien $\gamma(t) = (ct, \vec{x}(t))$ verwendet man also die Lagrange-Funktion

$$L_0(\dot{\vec{x}}) = -mc^2 \sqrt{1 - |\dot{\vec{x}}|^2/c^2}, \quad \textcircled{*}$$

($\Rightarrow L_0(\dot{\vec{x}})dt = -mc^2 dt$ ist Lorentz-invariant).

• **Bemerkung.** Warum der Faktor $-mc^2$ in $\textcircled{*}$? Damit

$$L_0(\dot{\vec{x}}) = -mc^2 + \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + \dots$$

mit der Lagrange-Funktion $\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$ eines freien Teilchens in der klassischen Mechanik übereinstimmt, plus eine **irrelevante Konstante** und **relativistische Korrekturen**.

7.6.1. Kopplung mit Elektromagnetismus

- Zunächst: **klassische Theorie**. Elektrisches Feld $\vec{E}(t, \vec{x})$,
magnetisches Feld $\vec{B}(t, \vec{x})$.

Bewegungsgleichung: $m \ddot{\vec{x}} = e \vec{E}(t, \vec{x}) + \frac{e}{c} \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(t, \vec{x})$. \otimes

- **Lagrange-Perspektive**. Verwenden die homogenen Maxwell-Gleichungen, um **elektromagnetische Potentiale** φ, \vec{A} einzuführen.

- Da $\text{div } \vec{B} = 0$, ist $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ (\vec{A} = Vektorpotential)

- Weiterhin gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

also

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

- Definieren die **Lagrange-Funktion**

$$L(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - e \left(\varphi(t, \vec{x}) - \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) \right).$$

- Euler-Lagrange-Gleichung?

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{e}{c} \dot{x}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = m \dot{x}^k + \frac{e}{c} A^k \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} = m \ddot{x}^k + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A^k}{\partial t} + \dot{x}^i \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \right)$$

$$\Rightarrow m \ddot{x}^k = \underbrace{e \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{1}{c} \frac{\partial A^k}{\partial t} \right)}_{= E^k} + \underbrace{\frac{e}{c} \sum_{j=1}^3 \dot{x}^j \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^j} \right)}_{= (\dot{\vec{x}} \times \vec{B})^k},$$

was also genau \otimes ist.

- Jetzt: relativistisch. Wir übernehmen den Zusatzterm unverändert, also

$$L(t, \vec{x}, \vec{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e(\varphi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A}).$$

- Definieren wir das 4er-Potential $A = (\varphi, \vec{A})$, so ist

$$L(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}) dt = -mc^2 dt + \frac{e}{c} (\underbrace{u \cdot A}_{\substack{\parallel \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (c, \vec{v}) \\ \text{(4er-Geschwindigkeit)}}}) dt \stackrel{\parallel}{=} \frac{e}{\sqrt{1-v^2/c^2}} dt$$

$$= (-mc^2 + \frac{e}{c} u \cdot A) dt$$

offenkundig Lorentz-invariant. Also sind die Bahnkurven, die man als stationäre Punkte von $\int_{\text{Start}}^{\text{Ende}} L$ bekommt, unabhängig von der Wahl des Inertialsystems, in welchen man die Bahn ausrechnet.

- Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right). \quad \begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

D.h. im Vergleich zum klassischen Fall \otimes müssen wir nur $m\vec{v}$ durch den relativistischen Impuls $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ersetzen.

- Bemerkung. Für den 4er-Impuls $p = (p^0, \vec{p}) = mu = m\gamma(c, \vec{v})$ gilt

$$-(p^0)^2 + |\vec{p}|^2 = -m^2 c^2 \Rightarrow -p^0 \frac{dp^0}{dt} + \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow c \frac{dp^0}{dt} = c \frac{\vec{p}}{p^0} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \cdot e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \vec{v} \cdot e\vec{E} = \text{Leistung der Lorentzkraft.}$$

$$\Rightarrow c p^0(t) = c p^0(0) + \int_0^t \vec{v} \cdot e\vec{E} \quad (\text{Integral der Leistung!})$$

= relativistische Gesamtenergie des Teilchens.

Das hatten wir bereits früher so definiert; jetzt haben wir also einen weiteren Anhaltspunkt dafür, dass das eine sinnvolle Definition der Energie ist.

• Zum Schluss betrachten wir noch das **4er-Potential** $A = (\varphi, \vec{A})$ genauer.

(i) Die Komponenten von A sind $A^0 = \varphi$, A^i ($i=1,2,3$).

• Wir kreieren daraus eine **1-Form**

$$A_\mu dx^\mu,$$

wobei $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, also $A_0 = -A^0 = -\varphi$, $A_i = A^i$

$$\Rightarrow A_\mu dx^\mu = -\varphi dx^0 + \sum_{i=1}^3 A_i dx^i.$$

• Berechnen die **elektromagnetische 2-Form**

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= d(A_\mu dx^\mu) = dA_\mu \wedge dx^\mu \\ &= dA_0 \wedge dx^0 + \sum_{i=1}^3 dA_i \wedge dx^i \\ &= \left(\frac{\partial A_0}{\partial t} dt + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_0}{\partial x^j} dx^j \right) \wedge dx^0 \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial t} dt \wedge dx^i + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &\stackrel{t = \frac{1}{c} x^0}{\Rightarrow dt = \frac{1}{c} dx^0} = \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_j}{\partial t} \right) dx^j \wedge dx^0 + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{j=1}^3 E_j dx^j \wedge dx^0 + \sum \varepsilon_{ijk} B_i dx^j \wedge dx^k. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{\mu\nu})$, $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu})$, die Matrix

$$(\mathcal{F}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Lorentz-Kraft kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu \\ &:= \frac{e}{c} g^{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} u^\nu \quad \left(g^{\mu\lambda} = \text{Komponenten von } g^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

In der Tat ist dies der 4er-Vektor

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \frac{e}{c} (-F_{0\nu} u^\nu, F_{1\nu} u^\nu, F_{2\nu} u^\nu, F_{3\nu} u^\nu) \\ &= \gamma \left(\frac{e}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}, eE' + \frac{e}{c} (v^2 B^2 - v^3 B^2), \dots \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad u = \gamma(c, \vec{v}) \\ &= \gamma \left(\frac{e}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}, e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right).\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{zur Erinnerung: das Kraftgesetz ist } \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_L, \\ \text{also } \begin{cases} c \frac{dp^0}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \end{cases} \text{ wobei } \vec{p} = (p^0, \vec{p}) = m\gamma(c, \vec{v}). \end{array} \right)$$

(iii) Die Vektorpotentiale sind nicht eindeutig durch \vec{E}, \vec{B} bestimmt; fñhrt man eine Eichtransformation

$$\begin{cases} \varphi \rightsquigarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \\ \vec{A} \rightsquigarrow \vec{A} + \nabla \chi \end{cases} \quad (\oplus)$$

durch, bleiben $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ und $\nabla \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ unverändert.

$$\begin{aligned}\text{Mit } d\chi &= \frac{\partial \chi}{\partial x^0} dx^0 + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x^j} dx^j \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} dx^0 + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \chi}{\partial x^j} dx^j\end{aligned}$$

können wir (\oplus) äquivalent schreiben als

$$A_\mu = (-\varphi, \vec{A}) \leadsto A + d\chi = \left(-\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \vec{A} + \nabla \chi\right).$$

Die elektromagnetische 2-Form dA bleibt dadurch deswegen unverändert, weil $d(A + d\chi) = dA + d(d\chi) = dA$. (Es ist ja $d^2=0$!)

(iv) Wir können leicht die \vec{E} - und \vec{B} -Felder ausrechnen, wenn man sie in anderen Inertialsystemen misst: so ist z.B. bei einem Boost

$$x = \Lambda(\theta) \hat{x}, \text{ d.h. } \begin{cases} x^0 = \cosh(\theta) \hat{x}^0 + \sinh(\theta) \hat{x}^1, \\ x^1 = \sinh(\theta) \hat{x}^0 + \cosh(\theta) \hat{x}^1, \\ x^2 = \hat{x}^2, \\ x^3 = \hat{x}^3, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^0} = \cosh(\theta) \frac{\partial}{\partial x^0} + \sinh(\theta) \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial}{\partial x^1} = \sinh(\theta) \frac{\partial}{\partial x^0} + \cosh(\theta) \frac{\partial}{\partial x^1}, \\ \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x^3}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{E}^1 &= F\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^0}\right) = \cosh^2(\theta) F\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^0}\right) + \sinh^2(\theta) F\left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) \\ &= (\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta)) F\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^0}\right) \\ &= E^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{E}^2 &= F\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^0}\right) = F\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \cosh(\theta) \frac{\partial}{\partial x^0} + \sinh(\theta) \frac{\partial}{\partial x^1}\right) \\ &= \cosh(\theta) E^2 - \sinh(\theta) B^3, \\ F\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^0}\right) &\stackrel{||}{=} F_{20} = E^2 \quad F\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = F_{21} = -B^3 \end{aligned}$$

$$\hat{E}^3 = \cosh(\theta) E^3 + \sinh(\theta) B^2,$$

und so weiter. D.h. \vec{E} - und \vec{B} -Felder werden "vermischt": ist zum Beispiel

$$\vec{E} = \vec{0}, \text{ so ist } \vec{\hat{E}} = \sinh(\theta) (0, -B^3, B^2).$$