

## 1.2. Inertialsysteme; Relativitätsprinzip

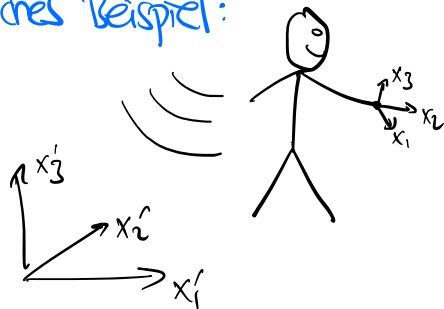
- Indem wir Teilchen durch Positionen  $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ , beschreiben, haben wir ein **Bezugssystem** ausgewählt, zentriert am Punkt  $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$  (und mit der Wahl  $t=0$  des zeitlichen Ursprungs). Man kann aber auch viele andere Wahlen treffen, sogar zeitabhängige — allerdings wollen wir (fürs Erste) nicht völlige Willkür walten lassen. Und zwar bemerken wir, dass **Zeitabstände**  $|t_2 - t_1|$  zweier Ereignisse  $(t_1, x_1), (t_2, x_2)$  **Raumabstände**  $|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|$  zweier **gleichzeitiger** Ereignisse  $(t, \vec{x}_1), (t, \vec{x}_2)$  eine vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung haben.

⇒ lassen nur Transformationen des Bezugssystems zu, welche diese Größen invariant lassen. Diese sind:

$$t' = \lambda t + a \quad (\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R})$$

$$\vec{x}' = R(t) \vec{x} + \vec{b}(t) \quad (R(t) \in O(3) \text{ — orthogonale } 3 \times 3\text{-Matrix, } \vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3)$$

### • Praktisches Beispiel:



$\vec{b}(t)$  = Ursprung des Rechte-Hand-Koordinatensystems (ausgedrückt im raumfesten Koordinatensystem  $\vec{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ )

$R(t)$  = Orientierung

- Inertialsysteme sind diejenigen, in denen sich **freie Teilchen\*** geradlinig bewegen. Ist  $(t, \vec{x})$  ein solches System, so sind alle anderen

solchen Systeme gegeben durch

$$t' = \lambda t + a,$$

$$\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x}' = R \vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}$$

$$R \in O(3), \vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

(unabhängig von  $t$ !)

(Beweis: für  $\vec{x}'(t) = R(t) \vec{x}(t) + \vec{b}(t)$  mit  $\ddot{\vec{x}} = \vec{0}$  (geradlinig!))

$$\frac{d^2}{dt'^2} \vec{x}' = \ddot{\vec{x}}' = \ddot{R} \vec{x} + 2\dot{R} \dot{\vec{x}} + \underbrace{R \ddot{\vec{x}}}_{=0} + \ddot{\vec{b}} \quad (\cdot = \frac{d}{dt})$$

$$\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{d\vec{x}'}{dt} \frac{dt}{dt'}$$

Dies soll  $= \vec{0}$  sein für beliebige Anfangsbedingungen  $\vec{x}, \dot{\vec{x}}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{b}} = 0, \dot{R} = 0, \text{ also } \vec{b}(t) = \vec{v}t + \vec{b}(0)$$

$R = t$ -unabhängig. —)

$$t = \lambda(t' - a) \Rightarrow \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \lambda \frac{d\vec{x}'}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = \lambda^2 \frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}'$$

\* **Freies Teilchen**: keinen (äusseren) Kräften ausgesetzt, siehe Beispiel (1) oben.

**Beispiele**: je nach Situation! Laborfestes Bezugssystem; Erdoberfläche; Schwerpunkt des Sonnensystems mit Ausrichtung nach Fixsternen; etc.  
(Inertialsysteme sind Idealisierungen!)

• Die Menge der geradentreuen Abbildungen

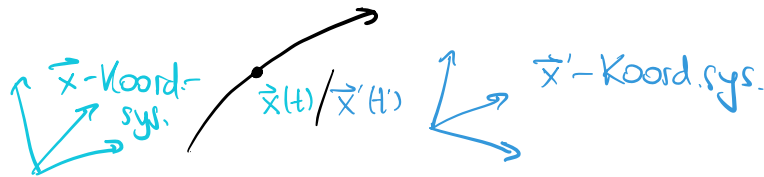
$$\mathbb{R}^4 \ni (t, \vec{x}) \mapsto (t', \vec{x}') = (\lambda t + a, R \vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}) \in \mathbb{R}^4$$

bilden eine **Gruppe**, genannt Galileigruppe (oder Gruppe der Galilei-Transformationen).

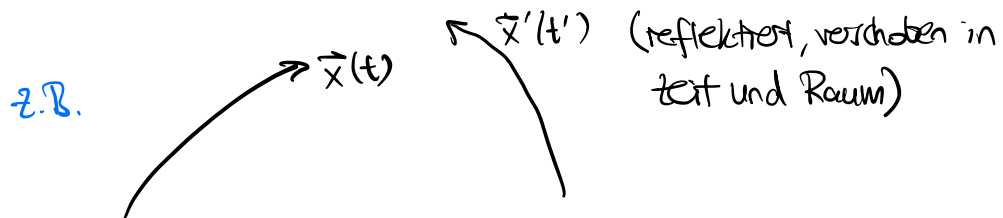
• Das Galileische Relativitätsprinzip: Die **Bewegungsgleichungen** eines isolierten mechanischen Systems (keine äusseren Kräfte) haben **dieselbe Form in allen Inertialsystemen**. (D.h.: alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt.)

2 Perspektiven: (1) "Passiv": beschreiben  $\vec{x}_i(t)$ ,  $\vec{x}'_i(t')$  dieselben Trajektorien in zwei Inertialsystemen, so lösen sie **dieselben** Bewegungsgleichungen: z.B.

$$m_k \ddot{\vec{x}}_k = \vec{F}_k(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \Rightarrow \frac{d^2}{dt'^2} m_k \vec{x}'_k = \vec{F}_k(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_N)$$



(2) "Aktiv": ist  $\vec{x}_i(t)$  eine Lösung der Bewegungsgleichungen, so auch  $\vec{x}'_i(t') = R\vec{x}_i(\lambda t' + a) + \vec{v}t' + \vec{b}$  for all  $\lambda = \pm 1$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $R \in O(3)$ ,  $\vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ .



• Konsequenz der passiven Perspektive 1: angenommen, die Kraft zwischen zwei Teilchen  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  ist  $\vec{F}_1(t, \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t))$ :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 & \xrightarrow{\vec{F}_1} \vec{x}_2 \\ m_1 \ddot{\vec{x}}_1(t) &= \vec{F}_1(t, \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)) \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2(t) &= \vec{F}_2(t, \vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)) \end{aligned}$$

• Transformation 1:  $t = t' + a$ ,  $\vec{x}_i = \vec{x}'_i$ . (D.h.  $\vec{x}'_i(t') = \vec{x}_i(t' + a)$ .)

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{x}}'_i(t') &= m_i \ddot{\vec{x}}_i(t' + a) = \vec{F}_i(t' + a, \vec{x}_1(t' + a), \vec{x}_2(t' + a)) \\ &= \vec{F}_i(t' + a, \vec{x}'_1(t'), \vec{x}'_2(t')) \end{aligned}$$

|| Rel. Prinzip

$$\vec{F}_{12}(t', \vec{x}'_1(t'), \vec{x}'_2(t')) \xrightarrow{\forall a \in \mathbb{R} \downarrow} \vec{F}_1(t, \vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ hängt nicht explizit von } t \text{ ab!}$$

$$\text{Also: } \vec{F}_1 = \vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2).$$

• Transformation 2:  $t=t'$ ,  $\vec{x}=\vec{x}'+\vec{b}$ . Also  $\ddot{\vec{x}}_1 = \mp(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \mp(\vec{x}_1+\vec{b}, \vec{x}_2+\vec{b})$

$\Rightarrow \vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{F}_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{0})$  hängt nur von  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$  ab;  
schreiben  $\vec{F}_1 = \vec{F}_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ .

- Transformation 3:  $t=t'$ ,  $\vec{x} = R \vec{x}'$ , wobei  $R$  = beliebige Rotation um die  $\vec{x}_1$ - $\vec{x}_2$ -Achse ist. Also

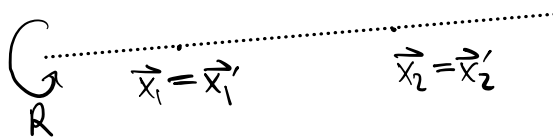
$$m_i \ddot{\vec{x}}_i' = m_i R^{-1} \ddot{\vec{x}}_i = R^{-1} \vec{F}_i (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = R^{-1} \vec{F}_i (\vec{x}_1' - \vec{x}_2')$$

$$\stackrel{||}{=} \vec{F}_i (\vec{x}_1' - \vec{x}_2')$$

$$\Rightarrow R \vec{F}_1 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{F}_1 (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

$\forall$  soldne  $Re \in O(3)$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} f(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$



• Jetzt noch (#4)  $R \in O(3)$  beliebig  $\Rightarrow f_1(R(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)) = f_1(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ ,  
also  $f_1 = f_1(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ .

- Unter der Annahme von actio = reactio:  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\Rightarrow \text{Zusammengefasst: } \begin{cases} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_1 = f(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_2 = f(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} \end{cases}$$

D.h.: als Folge des Relativitätsprinzips müssen Zweiteilchenkräfte

(i) entlang der Verbindungsachse  $\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$  der beiden Teilchen wirken,

(ii) und ihre Grösse hängt nur vom Abstand  $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$  ab.

Bemerkung: Solche Kräfte lassen sich mittels eines Potentials  $V$  schreiben:

$$\vec{F}_k = - \frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|), \quad V'(r) = -f(r)$$

(Beispiel:  $\vec{F}_1 = -G m_1 m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|),$   
 $V(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}.$ )

Dies gilt dann auch für ein System, in dem ausschließlich  
 Zweikörperkräfte auftreten:  $\vec{F}_k = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V, \quad V = \sum_{j < k} V_{jk}(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|).$

• Konsequenz der passiven Perspektive 2: Sind die Kräfte in einem  
 mechanischen System konservativ, d.h.

$$\vec{F}_k = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N),$$

so muss aufgrund des Relativitätsprinzips gelten

$$V(R\vec{x}_1 + \vec{b}, \dots, R\vec{x}_N + \vec{b}) = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad \forall R \in O(3), \vec{b} \in \mathbb{R}^3.$$