

5.2. Euler-Lagrange-Gleichungen

Die Überlegungen im vorigen Abschnitt lassen sich sofort verallgemeinern:

wir betrachten **Funktionale**

$$S[f] = \int_{x_1}^{x_2} s(x, f(x), f'(x)) dx,$$

wobei $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit vorgegebenen Werten an x_1, x_2 ,

und $s: [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist f ein Minimierer, oder allgemeiner ein Extremal- oder kritischer Punkt von S , so muss gelten

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S[f + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{für alle } h: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } h(x_1) = h(x_2) = 0.$$

$$\text{Also: } 0 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\varepsilon} s(x, f(x) + \varepsilon h(x), f'(x) + \varepsilon h'(x)) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial s}{\partial f}(x, f(x), f'(x)) \cdot h(x) + \frac{\partial s}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) \cdot h'(x) dx$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial y}(x, y, z) \right|_{\substack{y=f(x) \\ z=f'(x)}}$$

$$\left. \frac{\partial s}{\partial z}(x, y, z) \right|_{\substack{y=f(x) \\ z=f'(x)}}$$

partielle Integration

$$= \underbrace{\left. \frac{\partial s}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) h(x) \right|_{x_1}^{x_2}}_{=0 \text{ wegen der Randbedingungen von } h} + \int_{x_1}^{x_2} h(x) \left[\frac{\partial s}{\partial f}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial s}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) \right) \right] dx.$$

Damit dies für alle erlaubten Variationen h gilt, muss also gelten:

$$\frac{\partial S}{\partial f}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial S}{\partial f'}(x, f(x), f'(x)) \right) = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung.})$$

- Allgemeiner: ist $S(f_1, \dots, f_n) = \int_{x_1}^{x_2} s(x, f_1(x), \dots, f_n(x), f'_1(x), \dots, f'_n(x)) dx$,
so ist (f_1, \dots, f_n) ein Extremist nur genau dann, wenn $\forall j=1, \dots, n$ gilt:

$$\frac{\partial s}{\partial f_j}(x, f_1(x), \dots, f_n(x), f'_1(x), \dots, f'_n(x)) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial s}{\partial f'_j}(x, f_1(x), \dots, f_n(x), f'_1(x), \dots, f'_n(x)) \right) = 0,$$

(Gekoppeltes System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.)

Beispiel 1: kürzeste Verbindungen in der Ebene.

$\vec{x}_0 \cdot \overset{\vec{x}(s)}{\text{---}} \cdot \vec{x}_1$ Suchen $\vec{x}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{x}(s) = (x(s), y(s))$,
 $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$,
 $\vec{x}(1) = \vec{x}_1$,

so dass $L[\vec{x}] = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}}_{= \ell(s, x(s), y(s), x'(s), y'(s))} ds$ minimal ist.

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial \ell}{\partial x} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \ell}{\partial x'} = - \frac{d}{ds} \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$0 = \frac{\partial \ell}{\partial y} - \frac{d}{ds} \frac{\partial \ell}{\partial y'} = - \frac{d}{ds} \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

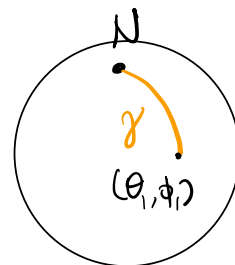
Nun ist $\vec{v}(s) = \frac{1}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}} \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}'(s)}{|\vec{x}'(s)|}$ der Einheitsvektor in
 Kurvenrichtung; und $\vec{v}'(s) = 0$, also $\vec{v}(s) = \vec{v}(0) = \text{konstant}$.

$\Rightarrow \vec{x}(s)$ ist eine Gerade, $\vec{x}(s) = \vec{x}_0 + \sigma(s)(\vec{x}_1 - \vec{x}_0)$, wobei
 $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$ die (beliebige, monotone) Parametrisierung dieser
 Geraden beschreibt.

Beispiel 2: kürzeste Verbindungen auf der Einheitskugel.

Parametrisierung der Kugel mittels Kugelkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$



Kurve: $\gamma: [0,1] \ni s \mapsto (\theta(s), \phi(s))$. Verlangen $\gamma(0) = (0,0)$ (Nordpol).

Längenelement: $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} ds = \sqrt{\theta'^2 + \phi'^2 \sin^2 \theta} ds$.

$$\begin{aligned} x' &= \theta' \cos \theta \cos \phi - \phi' \sin \theta \sin \phi \\ y' &= \theta' \cos \theta \sin \phi + \phi' \sin \theta \cos \phi \\ z' &= -\theta' \sin \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Länge: } L[\gamma] = \int_0^1 \underbrace{\sqrt{\theta'(s)^2 + \phi'(s)^2 \sin^2 \theta(s)}}_{= L(s, \theta(s), \phi(s), \theta'(s), \phi'(s))} ds.$$

Bemerkung: Die Zwangsbedingung, dass wir nur Kurven betrachten, die entlang der Oberfläche verlaufen, ist automatisch eingebaut.

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \phi'} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\phi' \sin^2 \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \phi'^2 \sin^2 \theta}} \right).$$

Da wir $\theta(0)=0$ verlangen, ist also $\frac{\phi' \sin^2 \theta}{\sqrt{\theta'^2 + \phi'^2 \sin^2 \theta}} = 0$

$$\Rightarrow \phi' = 0 \Rightarrow \phi = \text{const.} \quad \otimes$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \theta'} = \frac{\sin \theta \cos \theta \phi'^2}{\sqrt{\theta'^2 + \phi'^2 \sin^2 \theta}} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \phi'^2 \sin^2 \theta}} \right).$$

Dies gilt bereits wegen \otimes .

$\Rightarrow \gamma(s) = (\theta_1, \underbrace{\sigma(s)}, \phi_1)$ beschreibt einen Großkreis.
(Parametrisierung)