

5.6. zyklische Koordinaten, konjugierte Impulse

Ist die Lagrange-Funktion $L = L(t, q^1, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^N)$ unabhängig von q^j , d.h. $\frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$, so nennen wir q^j eine **zyklische Koordinate**. Der **konjugierte Impuls**

$$p_j := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$$

ist dann erhalten, da ja die Euler-Lagrange-Gleichungen sagen, dass

$$\frac{d}{dt} p_j = \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0.$$

Beispiel 1: sphärisches Pendel (§5.5):

$$L = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2) + m g l \cos \theta.$$

Also ist ϕ eine **zyklische Variable** ($\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$), und der **konjugierte Impuls** $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}$ ist erhalten.

Bemerkung: $p_\phi = 3$. Komponente des Drehimpulses

$$m \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = m l^2 \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \phi \dot{\phi} \\ \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \phi \dot{\phi} \\ -\sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix};$$

erhalten, da das Drehmoment infolge der Schwerkraft orthogonal zur x_3 -Achse steht.

Beispiel 2: schwerer symmetrischer Kreisel. (Vgl. §4.4.)

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2 - m g l \cos \vartheta$$

ist unabhängig von φ und ψ

$\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = L_3$ und $p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = S_3$ sind erhalten.

Wenn L unabhängig von t ist ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$), so bekommen wir als Erhaltungsgröße

$$E := \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} - L(q, \dot{q}).$$

$$\stackrel{=}{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}}$$

Beweis. $\frac{dE}{dt} = \sum_{\alpha=1}^N \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \right)}_{= \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}}} \dot{q}^{\alpha} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \ddot{q}^{\alpha}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} \dot{q}^{\alpha}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} \ddot{q}^{\alpha}} = 0. \quad \text{—}$

Beispiel. Ist $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N a_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^{\alpha} \dot{q}^{\beta}$, $V = V(q)$, so ist

$$\sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \dot{q}^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \left(\sum_{\beta=1}^N a_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^{\beta} \right) \dot{q}^{\alpha} = 2T,$$

also ist $E = 2T - (T - V) = T + V$ die Gesamtenergie.