

4.2. Freie Kreisel

- Ein Kreisel ist **frei**, wenn kein äußeres Drehmoment auf ihn wirkt:

$$\vec{M}_x = \vec{0}, \text{ also } \dot{\vec{S}} = -\vec{\omega} \times \vec{S}.$$

- Im **Hauptachsensystem** ($\vec{S} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_1 \\ I_2 \omega_2 \\ I_3 \omega_3 \end{pmatrix}$) gelten also die

$$\text{Eulersche Gleichungen} \quad \begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

(Gekoppeltes System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen für $\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)$.)

- Unter Verwendung von

$$\dot{R}(t) = R(t) \Omega(t), \quad \Omega(t) \vec{y} = \vec{\omega}(t) \times \vec{y},$$

bekannt als Lösung der
Eulerschen Gleichungen

können wir dann aus der Kenntnis von $\vec{\omega}(t)$ auch die Rotation $R(t)$ des körperfesten Bezugssystems relativ zum Inertialsystem durch Integration bestimmen.

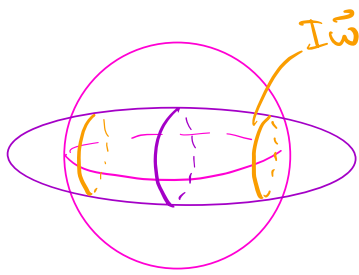
- Energieerhaltung:** $T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_j \omega_j^2$ erfüllt (wie erwartet)

$$\dot{T} = \sum_{j=1}^3 \omega_j I_j \dot{\omega}_j = \omega_1 \omega_2 \omega_3 [(I_2 - I_3) + (I_3 - I_1) + (I_1 - I_2)] = 0$$

- Drehimpulserhaltung:** $\vec{S}^2 = \sum_{j=1}^3 I_j^2 \omega_j^2$ erfüllt (wie erwartet)

$$\frac{d}{dt} \vec{S}^2 = \sum_{j=1}^3 2 I_j^2 \omega_j \dot{\omega}_j = 2 \omega_1 \omega_2 \omega_3 [I_1 (I_2 - I_3) + I_2 (I_3 - I_1) + I_3 (I_1 - I_2)] = 0.$$

$T = \text{const}, \vec{S}^2 = \text{const} \Rightarrow \vec{\omega}$ liegt in der Schnittmenge **zweier** koaxialer Ellipsoide = 1-dimensionale Menge (für generische



Werte von I_1, I_2, I_3 ;

- $I\vec{\omega}$ liegt auf der **Sphäre** $|I\vec{\omega}|^2 = \vec{S}^2$ und dem **Ellipsoid** $\sum \frac{1}{2I_j} (I\vec{\omega})_j^2 = T$

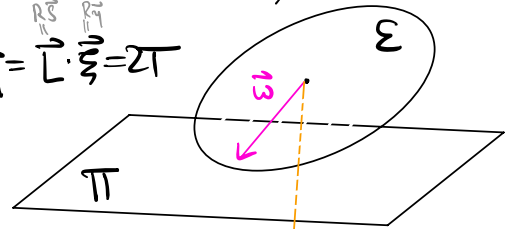
- Geometrische Bestimmung der Bewegung (bei fixiertem T, \vec{L}) mittels Konstruktion von Poincaré:

zum einen: körperfestes Trägheitsellipsoid $\mathcal{E} := \{ \vec{\omega} : \vec{\omega}^T I \vec{\omega} = 2T \}$

zum anderen: raumfeste Ebene $\Pi := \{ \vec{\xi} : \vec{L} \cdot \vec{\xi} = 2T \}$.
im \vec{y} -System
im \vec{x} -System; $\vec{x} = R\vec{y}$
 R = momentane Rotationsmatrix

Behauptung: \mathcal{E} und Π schneiden sich in nur einem Punkt, nämlich $\vec{\omega}$.

Ist nämlich $\vec{\xi} = R\vec{\eta} \in \Pi$, so gilt $\vec{S} \cdot \vec{\eta} = \vec{L} \cdot \vec{\xi} = 2T$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{\eta}^T I \vec{\eta} &= (\vec{\omega} + (\vec{\eta} - \vec{\omega}))^T I (\vec{\omega} + (\vec{\eta} - \vec{\omega})) \\ &= \underbrace{\vec{\omega}^T I \vec{\omega}}_{= 2T} + 2 \underbrace{(\vec{\eta} - \vec{\omega})^T I \vec{\omega}}_{= 2(\vec{\eta} - \vec{\omega}) \cdot \vec{S}} + \underbrace{(\vec{\eta} - \vec{\omega})^T I (\vec{\eta} - \vec{\omega})}_{\geq 0} \\ &= 2(2T - 2T) = 0 \end{aligned}$$

$$\geq 2T,$$

und Gleichheit erfordert $\vec{\eta} - \vec{\omega} = \vec{0}$, also $\vec{\eta} = \vec{\omega}$.

$\Rightarrow \Pi$ ist die Tangentialebene von \mathcal{E} an $\vec{\omega}$.

instantane Drehachse

$\Rightarrow \mathcal{E}$ rollt auf Π ab, ohne zu gleiten.

4.2.1. Permanente Rotationen

Einfache Lösung der Eulerschen Gleichungen: Rotation um eine Hauptachse, o.B.d.A. \vec{e}_3 -Achse:

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}. \quad \left(\begin{array}{l} \Rightarrow \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0, \text{ und} \\ \omega_2 \omega_3 = \omega_1 \omega_3 = \omega_1 \omega_2 = 0. \\ \Rightarrow \text{Eulersche Gleichungen sind erfüllt.} \end{array} \right)$$

Stabilität? Betrachten $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_0 + \omega_3(t) \end{pmatrix}, \quad |\omega_j(t)| \ll 1.$

(1) Lineare Approximation der Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) (\omega_2 \cdot (\omega_0 + \omega_3)) \approx (I_2 - I_3) \omega_0 \omega_2 \\ I_2 \dot{\omega}_2 \approx (I_3 - I_1) \omega_0 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 \approx 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{I_2 - I_3}{I_1} \\ \frac{I_3 - I_1}{I_2} & 0 \end{pmatrix} \omega_0.$$

Eigenwerte von A : $\pm \lambda$, wobei

$$\lambda^2 = \frac{(I_2 - I_3)(I_3 - I_1)}{I_1 I_2} \omega_0^2.$$

Fall 1: $I_{1/2} < I_3 < I_{2/1}$ (d.h. Störung einer Rotation um die Hauptachse mit dem mittleren Hauptträgheitsmoment)

$\Rightarrow \lambda^2 > 0 \Rightarrow \exists$ exponentiell anwachsende Lösung; instabil!

Fall 2: $I_3 < I_1, I_2$ oder $I_3 > I_1, I_2$ (d.h. Störung einer Rotation um die Hauptachse mit dem kleinsten oder grössten Hauptträgheitsmoment)

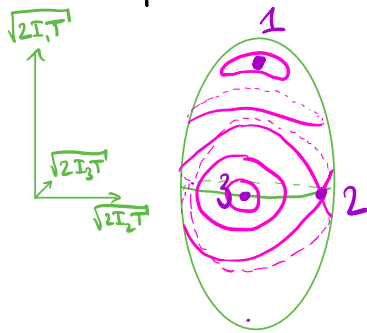
$\Rightarrow \lambda^2 < 0 \Rightarrow$ oszillierende, beschränkte Lösungen; stabil!

(2) **Orne** lineare Näherung: da $S = |\vec{S}|$ erhalten ist, ist die Trajektorie von $\vec{S} = R^T \vec{L}$ enthalten im Schnitt der

Drehimpulssphäre $S^2 = \sum_{j=1}^3 S_j^2 = L^2$ und des

Trägheitsellipsoids $T = \sum_{j=1}^3 \frac{S_j^2}{2I_j}$

Graphische Darstellung der Schnittkurven bei festem T und variierendem L :



• Die Schnittkurven nahe **1** und **3** sind geschlossen

$\Rightarrow \vec{S}$, also $\vec{\omega}$ und auch R , bleiben nah

an ihren ungestörten Werten $\vec{\omega} = \vec{e}_1 / \vec{e}_3$

$\vec{S} = I_1 \vec{e}_1 / I_3 \vec{e}_3$.

($I_1 > I_2 > I_3$.)

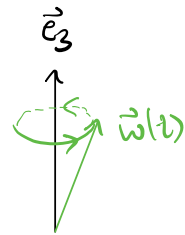
• Die Schnittkurven nahe **2** umkreisen eine der anderen beiden Hauptachsen (kehren aber periodisch wieder in die Nähe von **2** zurück).

4.2.2 Symmetrischer freier Kreisel

Für einen Kreisel, der rotationssymmetrisch um o.B.d.A. die \vec{e}_3 -Achse ist, gilt $I_1 = I_2$.

Eulersche Gleichungen sind jetzt

$$\begin{cases} \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3(t) = \omega_3(0), \\ \dot{\omega}_1 = -\alpha \omega_2 \quad (\alpha := \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3) \\ \dot{\omega}_2 = \alpha \omega_1 \end{cases}$$

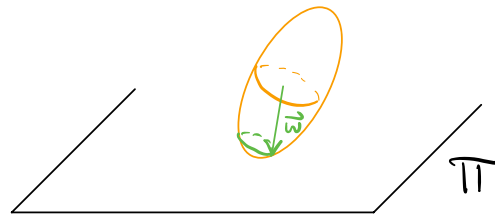


$$\Rightarrow \omega_1(t) + i\omega_2(t) = (\omega_1(0) + i\omega_2(0)) e^{i\alpha t}$$

$\Rightarrow \vec{\omega}(t)$ dreht sich um die \vec{e}_3 -Achse mit Winkelgeschwindigkeit α .

(Konsistent mit Poincaré: das Trägheitsellipsoid \mathcal{E} ist jetzt ein **Rotationsellipsoid**, dessen Kontaktpunkt mit Π also eine **Kreisbahn** auf \mathcal{E} beschreibt.

Diese **Präzession** von $\vec{\omega}(t)$ erfolgt relativ zu den Körperachsen, die sich selbst mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ im Raum drehen.



Benotung: Präzessionsfrequenz: $|\alpha| = \left| 1 - \frac{I_3}{I_1} \right| |\vec{\omega}| \leftarrow$ hier zeitunabhängig
ist \leq Rotationsfrequenz $|\vec{\omega}|$ des $\underbrace{\leq 1, \text{ da } 0 < I_3 \leq I_1 + I_2 = 2I_2}_{\text{Kreisel, und umso kleiner, je kleiner die Differenz } |I_1 - I_3| \text{ ist.}}$

Beispiel 1: Erde — \approx symmetrisch um Polachse $=: \vec{e}_3$,
an den Polen leicht abgeplattet $\Rightarrow \frac{I_1 - I_3}{I_1} \approx -\frac{1}{300}$.

\Rightarrow Periode der **Präzessionsbewegung**:

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{|\dot{\omega}|} \frac{I_1}{I_3 - I_1} \stackrel{|\dot{\omega}| \approx \omega_3}{\approx} \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_3}}_{= 1 \text{ Tag}} \cdot 300 = 300 \text{ Tage.}$$

⇒ Rotationsachse beschreibt einen Kreis um den Nordpol in ≈ 10 Monaten.

- Beobachtung:**
- Drehachse wandert nie mehr als 4.5m vom Nordpol weg
 - sehr unregelmässige Bahn der Drehachse
 - Grundperiode ≈ 433 Tage. "Chandler wobble."

Differenzen durch:

- Verschiebungen der Massverteilung
- elastische Eigenschaften der Erde (die eben kein starrer Körper ist)

Beispiel 2: Neben der kräftefreien Präzession der Rotationsachse relativ zum erdfesten Bezugssystem gibt es noch die Präzession der Erdachse relativ zur Ekliptik (Periode: 26000 Jahre), ausgelöst durch Drehmomente, die Sonne und Mond auf die (nicht perfekt kugelförmige) Erde ausüben.