

## 5.8. Prinzip von Maupertuis

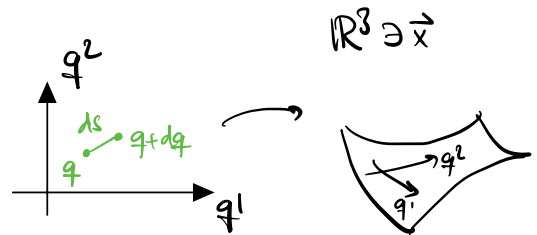
Im Kepler-Problem haben wir die Planetenbahnen bestimmen können, ohne die Zeitabhängigkeit der Bewegung explizit bestimmen zu müssen. Das Prinzip von Maupertuis ermöglicht dasselbe für eine bestimmte Klasse allgemeiner mechanischer Systeme mit verallg. Koordinaten  $q^1, \dots, q^N$ .

Annahmen: (i)  $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$ ,  $(g_{\alpha\beta}(q))_{\alpha, \beta=1, \dots, N}$  positiv definit.  
(ii)  $V = V(q^1, \dots, q^N)$ .

(Dann ist die Gesamtenergie  $E = T + V (= \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \dot{q}^\alpha - L, L = T - V)$  eine Erhaltungsgrösse; vgl. § 5.6.)

Im Konfigurationsraum definieren wir das

Linienelement  $ds^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta}(q) dq^\alpha dq^\beta$ .



D.h. einer Kurve  $\tau \mapsto q(\tau)$  weisen wir die Länge

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \underbrace{\left( \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(q(\tau)) \frac{dq^\alpha}{d\tau} \frac{dq^\beta}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=ds} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{T(q(\tau), \frac{dq}{d\tau}(\tau))} d\tau$$

zu. Die Länge einer Kurve ist unabhängig von der Parametrisierung.

Prinzip von Maupertuis: Bei vorgegebenen Endpunkten  $q^{(0)}, q^{(1)}$  und vorgegebener Gesamtenergie  $E$  ist die Bahnkurve  $\mathcal{C} = \{q(\tau) : \tau \in [\tau_0, \tau_1]\}$  (mit  $q(\tau_0) = q^{(0)}, q(\tau_1) = q^{(1)}$ ) charakterisiert durch

$$\delta M[\mathcal{C}] = 0, \quad M[\mathcal{C}] = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{E - V(q)} ds.$$

Bemerkungen. (1)  $M[\mathcal{C}]$  hängt nicht von der Parametrisierung von  $\mathcal{C}$  ab.

Ist nämlich  $\tilde{q}(\tilde{\tau}) = q(\tau(\tilde{\tau}))$  eine Reparametrisierung, mit  $\tau_j = \tau(\tilde{\tau}_j)$

( $j=0,1$ ), so ist

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{E-V(q(\tau))} \overbrace{\sqrt{T(q(\tau), \frac{dq}{d\tau}(\tau))}}^{=ds} d\tau \\
 & \stackrel{\tau=\tau(\tilde{\tau})}{=} \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} \sqrt{E-V(\tilde{q}(\tilde{\tau}))} \underbrace{\sqrt{T(\tilde{q}(\tilde{\tau}), \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{d\tau})}}_{=T(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{\tau}}) \left(\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau}\right)^2} \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} d\tilde{\tau} \\
 & \stackrel{\frac{d\tilde{\tau}}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} = 1}{=} \int_{\tilde{\tau}_1}^{\tilde{\tau}_2} \sqrt{E-V(\tilde{q}(\tilde{\tau}))} \underbrace{\sqrt{T(\tilde{q}, \frac{d\tilde{q}}{d\tilde{\tau}})}}_{=ds} d\tilde{\tau}.
 \end{aligned}$$

(2)  $\delta M[\mathcal{C}] = 0$  heißt: ist  $q(\tau; \lambda)$  eine Schar von Kurven, mit  $q(\tau_j(\lambda); \lambda) = q^{(j)}$  ( $j=0,1$ ), und  $\mathcal{C}(\lambda) = \{q(\tau; \lambda) : \tau \in [\tau_0(\lambda), \tau_1(\lambda)]\}$ , so ist  $\frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} M[\mathcal{C}(\lambda)] = 0$ .

(3) Ist die **Bahnkurve bekannt**, parametrisiert via  $q(\tau)$ , so kann die **Zeitabhängigkeit** durch die **Energieerhaltung** rekonstruiert werden: schreiben  $\tau = \tau(t)$  und verlangen

$$E - V(q(\tau(t))) = T(q(\tau(t)), \frac{d}{dt} q(\tau(t))) = T(q, \frac{dq}{d\tau}) \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

Dies bestimmt  $\frac{d\tau}{dt}$ , also durch Integration  $\tau(t)$  und damit auch  $t(\tau)$ .

**Beweis, dass das Prinzip von Maupertuis gültig ist** (also dieselben Bahnen produziert wie das Prinzip der stationären Wirkung): wenn wir Variationen betrachten, für die jeweils  $q(\tau_0) = q_{(0)}$ ,  $q(\tau_1) = q_{(1)}$  gilt (was wir

o.B.d.A. durch Reparametrisierung immer einrichten können), sind die Euler-Lagrange-Gleichungen für  $\int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{E-V(q)} \sqrt{T(q, \dot{q})} dt$ :

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\sqrt{E-V}}{2\sqrt{T}} g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta \right] + \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{E-V}} \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} - \frac{\sqrt{E-V}}{4\sqrt{T}} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\beta \dot{q}^\gamma$$

(Summenkonvention:  $= \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^N g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta$ ,  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$   
automatische Summation  
über gleiche Indizes, hier also  $\sum_{\beta=1}^N$ )

$$= \frac{\sqrt{E-V}}{2\sqrt{T}} g_{\alpha\beta} (\ddot{q}^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta \dot{q}^\gamma \dot{q}^\delta) + \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\sqrt{E-V}}{2\sqrt{T}} \right] g_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta + \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{E-V}} \frac{\partial V}{\partial q^\alpha}.$$

Hierbei definieren wir  $\Gamma_{\gamma\delta}^\beta := \frac{1}{2} (g^{-1})^{\beta\mu} \left( \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial q^\delta} + \frac{\partial g_{\delta\mu}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial q^\mu} \right)$ , also

$$g_{\alpha\beta} \Gamma_{\gamma\delta}^\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial q^\delta} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial q^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial q^\alpha} \right)$$

("Christoffel-Symbole der Riemannschen Metrik  $g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$ ").

Legen wir jetzt die Parametrisierung von  $q$  gemäss der Energiebeziehung  $E = T + V$  fest, erhalten wir also

$$g_{\alpha\beta} (\ddot{q}^\beta + \Gamma_{\gamma\delta}^\beta \dot{q}^\gamma \dot{q}^\delta) = - \frac{\partial V}{\partial q^\alpha}, \quad \alpha=1, \dots, N. \quad \textcircled{*}$$

Dies sind genau die Euler-Lagrange-Gleichungen für  $L = T - V$  (wie man durch direkte Rechnung prüfen kann).

**Bemerkung.** Gleichung  $\textcircled{*}$  im Fall  $V = \text{const.}$  ist gerade die **Geodäten-Gleichung**, deren Lösungen Kurven (lokal) minimaler Länge im Konfigurationsraum  $\{q\}$  mit Metrik  $g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$  beschreiben.

Im Allgemeinen sagt  $\otimes$ , dass die Beschleunigung der Kurve  $q(t)$  gerade durch die Kraft  $-\frac{\partial V}{\partial q}$  gegeben ist. ( $\rightarrow$  Differentialgeometrie, Allgemeine Relativitätstheorie.)

Beispiel: freies Teilchen (mit Zwangsbedingungen, kodiert durch Wahl der verallgemeinerten Ortskoordinaten).

$V=0$ . Maupertuis:  $\delta \int_{q^{(0)}}^{q^{(1)}} ds = 0$ , d.h.  $q(t)$  beschreibt eine Bahn extremaler Länge von  $q^{(0)}$  nach  $q^{(1)}$ .

Sind  $q = (q^1, q^2, q^3)$  kartesische Koordinaten, so ist  $q(t)$  eine Gerade.

Sind  $q = (\theta, \phi)$  Polarkoordinaten auf der Sphäre von Radius  $R$ , so ist  $q(t)$  ein Grosskreis.

Beispiel: Kepler. Parametrisieren die Bahn in der Bahnebene in Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$ ,  $\varphi = \varphi(r)$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} r \cos \varphi(r) \\ r \sin \varphi(r) \end{pmatrix} \Rightarrow |x'|^2 = \begin{vmatrix} \cos \varphi - r \varphi' \sin \varphi \\ \sin \varphi + r \varphi' \cos \varphi \end{vmatrix}^2 = 1 + r^2 \varphi'^2$$

Potential:  $V = -\frac{GM\mu}{r}$ .

Maupertuis: Bahn ist stationärer Punkt von

$$M[\varphi] = \int_{r_1}^{r_2} \underbrace{\sqrt{E - V(r)} \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2}}_{= S(r, \varphi, \varphi')} dr$$

$\rightarrow$  Euler-Lagrange-Gleichungen:  $\frac{d}{dr} \frac{\partial S}{\partial \varphi'} = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$

$$\Rightarrow \frac{\partial s}{\partial \varphi'} = \sqrt{E-V} \frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{1+r^2 \varphi'^2}} = C \quad \begin{matrix} \parallel \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \varphi' = \frac{C}{r^2 \sqrt{E + \frac{GM_\mu}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} \quad , \text{ wie zuvor (siehe § 2.1, 2.2).}$$