

4.3 Eulerwinkel

- Vorbereitung zur Betrachtung von Kreisel, auf die externe Kräfte wirken
— dann müssen wir nämlich die momentane Rotation $R(t)$ des Kreisels relativ zum Inertialsystem kennen!

- Wie üblich: $\vec{x} = \text{Inertialsystemkoordinaten} = R \vec{y}$,
Normalisierung $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ (Kreisel!),
 $R \in SO(3)$.
Koordinaten im körperfesten Bezugssystem

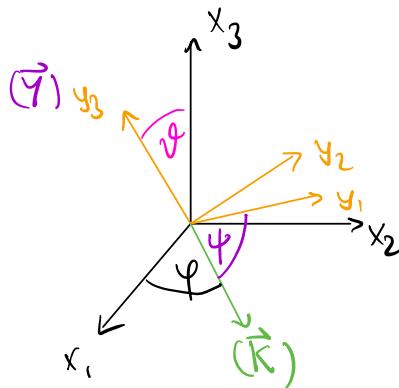
Behauptung: jedes $R \in SO(3)$ kann geschrieben werden als

$$R = R(\varphi, \vartheta, \psi) := R_3(\varphi) R_1(\vartheta) R_3(\psi),$$

wobei $R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Rotation um \vec{e}_3 -Achse)

$$R_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (\text{Rotation um } \vec{e}_1\text{-Achse})$$

Äquivalent: $R = R_\gamma(\psi) R_K(\vartheta) R_3(\varphi)$, $K = R_3(\varphi) \vec{e}_1$
 $\gamma = R_K(\vartheta) \vec{e}_3$



(\vec{K} spannt die Gerade auf, die die Schnittmenge der x_1, x_2 - und y_1, y_2 -Ebenen ist.)

Beweis: $R_3(\varphi)$ (x -Achsen) und $R_\gamma(-\psi)$ (y -Achsen) haben beide als 1. Achse gerade K , und werden durch $R_K(\vartheta)$ ineinander überführt
 $\Rightarrow R_K(\vartheta) R_3(\varphi)$ (x -Achsen) = $R_\gamma(-\psi)$ (y -Achsen).

Geltungsbereich der Koordinaten: $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$
 $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Genannt **Eulerwinkel**.

Rotationsachsen (im körperfesten System) bei Änderungen der Eulerwinkel:

(i) $R(\varphi_0, \vartheta_0, \psi(t))$ beschreibt Rotation um die Achse

$$\vec{e}_\psi = \vec{e}_3 \quad (= \text{Einheitsvektor entlang } y_3\text{-Achse}).$$

(ii) $\vec{e}_\vartheta = \cos(\psi)\vec{e}_1 - \sin(\psi)\vec{e}_2 \quad (= \vec{k}).$

Beweis: $\frac{d}{dt} R(\varphi, \vartheta(t), \psi) \vec{y}$

$$= \frac{d}{dt} R_3(\varphi) R_1(\vartheta(t)) R_3(\psi) \vec{y}$$

$$= \dot{\vartheta} R_3(\varphi) R_1(\vartheta) (\vec{e}_{x_1} \times R_3(\psi) \vec{y}) \quad \vec{e}_{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \dot{\vartheta} R_3(\varphi) R_1(\vartheta) \vec{e}_{x_1} \times R_3(\varphi) R_1(\vartheta) R_3(\psi) \vec{y}$$

$$= \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta \times R(\varphi, \vartheta, \psi) \vec{y},$$

wobei $\vec{e}_\vartheta = R_3(\varphi) R_1(\vartheta) \vec{e}_{x_1}$ im \vec{x} -System, also

im \vec{y} -System: $\vec{e}_\vartheta = R(\varphi, \vartheta, \psi)^{-1} (R_3(\varphi) R_1(\vartheta) \vec{e}_{x_1})$

$$= R_3(\psi)^{-1} \vec{e}_{x_1} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{---}$$

(iii) $\vec{e}_\varphi = \sin(\vartheta) \sin(\psi) \vec{e}_1 + \sin(\vartheta) \cos(\psi) \vec{e}_2 + \cos(\vartheta) \vec{e}_3 \quad (= x_3\text{-Achse; im } \vec{y}\text{-System}).$

Beweis: $\frac{d}{dt} R(\varphi(t), \vartheta, \psi) = \dot{\varphi} \vec{e}_{x_3} \times R(\varphi, \vartheta, \psi)$

$$\Rightarrow \vec{e}_\varphi = R(\varphi, \vartheta, \psi)^{-1} \vec{e}_{x_3} = R_3(-\psi) R_1(-\vartheta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad \text{---}$$

\Rightarrow Winkelgeschwindigkeit (im körperfesten System) ist

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \dot{\psi} \vec{e}_\psi = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \quad \otimes$$

Warnung: $\vec{e}_\psi, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi$ sind zwar Einheitsvektoren, aber nicht orthogonal:
 $\vec{e}_\psi \cdot \vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\vartheta = 0$, aber $\vec{e}_\psi \cdot \vec{e}_\varphi = \cos(\vartheta)$.

