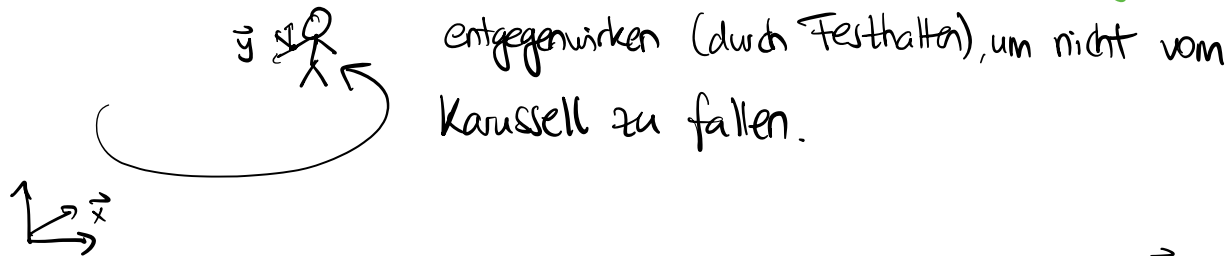


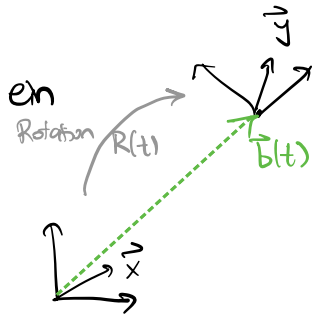
1.4. Beschleunigte Bezugssysteme; Scheinkräfte

Wir werden jetzt die **Scheinkräfte** erklären, die in beschleunigten Bezugssystemen auftreten — einfaches Beispiel: Bezugssystem = ich im Karussell: $\vec{y} = \vec{0}$, aber dennoch muss ich einer **zentrifugalkraft**



Formal betrachten wir ein Inertialsystem \vec{x} und ein beschleunigtes Bezugssystem \vec{y} ,

verknüpft mittels $\vec{x}(t) = R(t) \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$.



Bewegungsgleichung im Inertialsystem: $m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}_x$

Dann: (i) $\vec{y}(t) = R(t)^{-1} (\vec{x}(t) - \vec{b}(t))$

$$\otimes = R^T \vec{x} - R^T \vec{b}$$

$$(R \in O(3)) \Leftrightarrow R^T R = I \\ \Leftrightarrow R^{-1} = R^T$$

(ii) Bewegungsgleichung in \vec{y} -Bezugssystem?

Berechnen $\dot{\vec{x}} = \dot{R} \vec{y} + R \dot{\vec{y}} + \dot{\vec{b}}$ \oplus

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}} = \ddot{R} \vec{y} + 2 \dot{R} \dot{\vec{y}} + R \ddot{\vec{y}} + \ddot{\vec{b}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{y}} = R^T \ddot{\vec{x}} - 2 R^T \dot{R} \dot{\vec{y}} - R^T \ddot{R} \vec{y} - R^T \ddot{\vec{b}}$$

$$\Rightarrow m \ddot{\vec{y}} = \underbrace{R^T \vec{F}_x}_I - \underbrace{2m R^T \dot{R} \dot{\vec{y}}}_{II} - \underbrace{m R^T \ddot{R} \vec{y}}_{III} - \underbrace{m R^T \ddot{\vec{b}}}_{IV}$$

Bedeutung der Terme?

I: $\vec{F}_y = R^T \vec{F}_x$ ist der physikalische Kraftvektor in \vec{y} -Komponenten

(vgl. \otimes).

II: Die Matrix $\Omega := \dot{R}^T R$ ist antisymmetrisch, denn aus $R^T R = I$ folgt $\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0_{3 \times 3}$.

Also: $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$, d.h. $\Omega \vec{y} = \vec{\omega} \times \vec{y}$ ($\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$)

$$\Rightarrow \mathbb{II} = -2m \vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} =: \vec{F}_C \quad (\text{Coriolis-Kraft}).$$

(Bedeutung von $\vec{\omega}$? Betrachten einen Punkt \vec{y}_0 , der im beschleunigten System ruht ($\dot{\vec{y}}_0 = \vec{0}$). Geschwindigkeit im

Inertialsystem: $\dot{\vec{x}} = R \dot{\vec{y}}_0 + \dot{\vec{b}}$. (vgl. $\textcircled{\#}$)

Koordinaten dieses Vektors im

$$\begin{aligned} \vec{y}\text{-System: } R^T \dot{\vec{x}} &= R^T \dot{R} \vec{y}_0 + R^T \dot{\vec{b}} \\ &= \vec{\omega} \times \vec{y}_0 + R^T \dot{\vec{b}}. \end{aligned}$$



$$= \vec{\omega} \times \vec{y}_0 + R^T \vec{b}.$$

$\Rightarrow \vec{\omega} = \vec{y}$ -Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des \vec{y} -Systems relativ zum \vec{x} -System

III:

$$\begin{aligned} R^T \dot{R} &= \dot{\Omega} - \dot{R}^T R = \dot{\Omega} - \dot{R}^T R R^T R \\ &\quad | \quad \Omega = R^T R \\ &= \dot{\Omega} - \Omega^T \Omega \\ &= \dot{\Omega} + \Omega^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{III} = -m \dot{\Omega} \vec{y} - m \Omega^2 \vec{y}$$

$$= -m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{y} - m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}).$$

Eulerkraft
($= \vec{0}$ bei gleich-
mässiger Rotation)

\vec{F}_Z (Zentrifugalkraft)

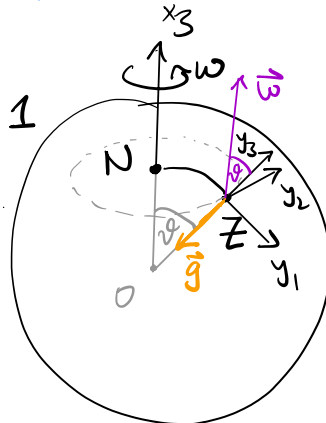
IV: Definieren $\vec{a} = R^T \ddot{\vec{b}}$ für den Beschleunigungsvektor, in \vec{y} -Koordinaten, des Punktes $\vec{y} = 0$.

Zusammengefasst:

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}_g \quad \overbrace{\begin{aligned} & - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}}}_{=\vec{F}_C} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y})}_{=\vec{F}_Z} - m\vec{\omega} \times \vec{y} - \underbrace{m\vec{a}}_{\text{"Führungskraft"}} \end{aligned}}^{\text{Scheinkräfte}}$$

Beispiel: freier Fall in der Nähe der Erdoberfläche.

- Im mitrotierenden Bezugssystem \vec{y} lassen wir ein ruhendes Objekt der Masse 1 aus geringer Höhe $h > 0$ über dem Punkt Z (üridh) fallen; $\vartheta = 42.6^\circ$. Wo trifft es auf der Erde auf?



- Rotationsgeschwindigkeit der Erde: $\omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.

Schwerebeschleunigung: $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

Schreiben $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ (Schwerebeschleunigung in \vec{y} -Koordinaten)

$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} -\omega \sin \vartheta \\ 0 \\ \omega \cos \vartheta \end{pmatrix}$ (Rotationsachse und -beschleunigung im \vec{y} -System)
(siehe obige Figur)

Nehmen an: Fallzeit T ist $\ll \text{Tag}$, d.h. $\omega T \ll 1$.

\Rightarrow Ignorieren Effekte der Ordnung ω^2 und höher.

Bewegungsgleichung?

Können vernachlässigen:

• Zentrifugalkraft $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) = O(\omega^2)$

· Eulerkraft = $\vec{0}$ (da $\vec{\omega} = \text{const.}$)

· Führungskraft: $m\vec{a} = \mathcal{O}(\omega^2)$, da

$$\vec{a} = R^T \ddot{\vec{b}} = R^T \ddot{R} \vec{b}(0) = \underbrace{(\dot{R} + \Omega^2)}_{\substack{0 \\ \mathcal{O}(\omega^2)}} \vec{b}(0) = \mathcal{O}(\omega^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\vec{y}} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} + \mathcal{O}(\omega^2), \\ \dot{\vec{y}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}, \\ \dot{\vec{y}}(0) = \vec{0}. \end{cases}$$

Komponentenweise:

$$\ddot{y}_1 = 2\omega \cos\vartheta \dot{y}_2 \quad (1)$$

$$\ddot{y}_2 = -2\omega \cos\vartheta \dot{y}_1 - 2\omega \sin\vartheta \dot{y}_3 \quad (2)$$

$$\ddot{y}_3 = -g + 2\omega \sin\vartheta \dot{y}_2 \quad (3)$$

+ Anfangsbedingungen

$$(1) \Rightarrow \dot{y}_1(t) = 2\omega \cos\vartheta y_2(t) \quad (\text{keine Integrationskonstante wegen Anfangsbedingungen})$$

$$(3) \Rightarrow \dot{y}_3(t) = -gt + 2\omega \sin\vartheta y_2(t)$$

$$(2) \text{ ist dann } \ddot{y}_2 = -4\omega^2 y_2 + 2\omega g t \sin\vartheta,$$

$$\text{mit Lösung } y_2(t) = A \cos(2\omega t) + B \sin(2\omega t) + \frac{g \sin\vartheta}{2\omega} t^2.$$

← allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $\ddot{y}_2 = -4\omega^2 y_2$

← spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Anfangsbedingungen $y_2(0) = 0 = \dot{y}_2(0)$ ergeben

$$A = 0, \quad B = -\frac{g \sin\vartheta}{4\omega^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{g \sin\vartheta}{2\omega} \left(t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right) = \underbrace{\frac{1}{3} g \omega \sin\vartheta t^3}_{\text{Ortsablenkung}} + \mathcal{O}(\omega^3)$$

$$\approx 2\omega t - \frac{1}{3!} (2\omega t)^3$$

Einsetzen in ⊗ und integrieren:

$$y_1(t) = O(\omega^2)$$

$$y_3(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 + O(\omega^2).$$

$$\Rightarrow \text{Aufprall, wenn } y_3(T) = 0 \text{ d.h. } T = \sqrt{\frac{2h}{g}} + O(\omega^2).$$

$$\Rightarrow \text{Ortsablenkung: } y_2(T) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\omega h^{3/2}}{g^{1/2}} \sin \vartheta + O(\omega^3).$$

$$\text{Zürich, } h = 10 \text{ m: } y_2 \approx 0.47 \text{ mm.}$$

$$100 \text{ m: } y_2 \approx 1.5 \text{ cm.}$$