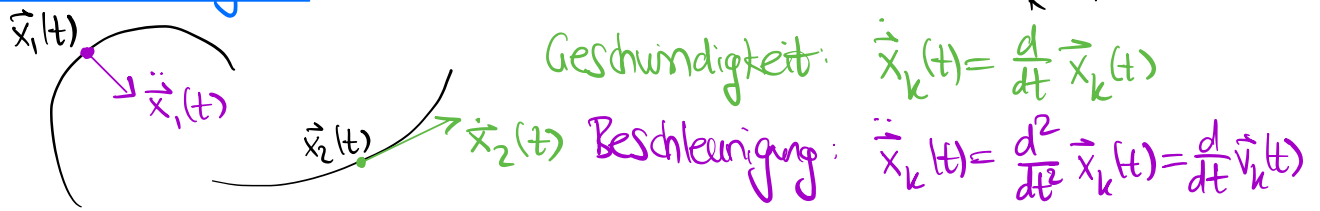


## 1.1. Mechanische Systeme

- Beschreibung eines **Punktteilchens**, das sich im 3-dimensionalen Raum bewegt: für jeden Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  eine Position  $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$ .

Mehrteilchensystem:  $N \in \mathbb{N}$  Teilchen mit Positionen  $\vec{x}_k(t)$ ,  $k=1, \dots, N$ .



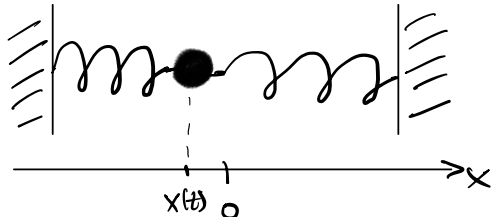
- Newtons Prinzip der Determiniertheit: Wir betrachten ein fixes mechanisches System (d.h. Wechselwirkungen sind vorgegeben). Die Trajektorien  $\vec{x}_k(t)$ ,  $k=1, \dots, N$ , sind für alle  $t \in \mathbb{R}$  eindeutig bestimmt, wenn alle Positionen  $\vec{x}_i(t_0)$  und Geschwindigkeiten  $\dot{\vec{x}}_i(t_0)$  zu einem Zeitpunkt  $t=t_0$  bekannt sind.

Folgerung:  $\ddot{\vec{x}}_k(t)$  müssen Funktionen von  $t$ ,  $\vec{x}_i(t)$ ,  $\dot{\vec{x}}_i(t)$  sein, d.h.  $\ddot{\vec{x}}_k(t) = f_k(t, \vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \dot{\vec{x}}_1(t), \dots, \dot{\vec{x}}_N(t))$ .  $\otimes$

Bem.: Die Funktionen  $f_k$  hängen natürlich vom betrachteten mechanischen System ab und sind i.d.R. experimentell zu bestimmen. In unserer Vorlesung, im Sinne der theoretischen Physik, drehen wir dies allerdings meist um: jemand gibt uns die Funktionen  $f_k$ , und wir wollen die Zeitentwicklung  $(\vec{x}_k(t))$  des Systems verstehen.

$\otimes$  sind fast die Newtonschen Bewegungsgleichungen; es fehlt noch der Begriff der  **Masse**.

Masse: Betrachten einen Körper (Punktteilchen) zwischen zwei identischen Federn:



Experiment 1:  $\ddot{x}(t) = -c x(t)$ ;  $c > 0$  hängt von Körper und Feder ab.

Experiment 2: Für 2 verschiedene Körper, beschrieben durch  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  mit  $x_1(0) = x_2(0) = x_0$ , hängt das Beschleunigungsverhältnis  $\frac{\ddot{x}_1(0)}{\ddot{x}_2(0)}$  ( $= \frac{c_1}{c_2}$ ) nicht von  $x_0$  oder von der Feder ab, sondern nur von den beiden Körpern.  
(d.h. solange wir jeweils dieselbe Feder für beide Körper verwenden!)

Fixieren als Körper #1 z.B. das Urkilogramm; nennen dann

$\frac{\ddot{x}_1(0)}{\ddot{x}_2(0)} =: m_2$  die <sup>(träge)</sup> Masse von Körper 2 (gemessen in Vielfachen des Urkilogramms — Körper #1 hat also Masse 1).

Beachte:  $m \ddot{x}(0)$  (bei fixem  $x(0)$ ) hängt nicht vom Körper ab, sondern nur von der Feder; dies ist die Kraft, mit der die Feder auf den Körper wirkt. (In der Tat gilt ja  $m_1 \ddot{x}_1(t) = m_2 \ddot{x}_2(t)$ , wenn  $x_1(t) = x_2(t)$ .)

⇒ Newtonsche Bewegungsgleichungen für ein mechanisches System von  $N$  Teilchen mit Massen  $m_1, \dots, m_N$ :

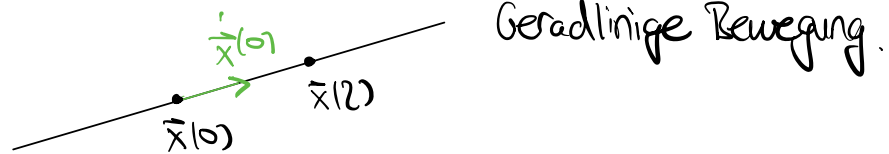
$$m_k \ddot{\vec{x}}_k(t) = \vec{F}_k(t, \vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t), \dot{\vec{x}}_1(t), \dots, \dot{\vec{x}}_N(t)) \quad (\vec{F}_k: \text{Kraft, die auf das } k\text{-te Teilchen wirkt.})$$

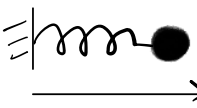
Impuls des  $k$ -ten Teilchens:  $\vec{p}_k(t) = m_k \dot{\vec{x}}_k(t)$ . ( $\Rightarrow \dot{\vec{p}}_k = \vec{F}_k$ .)

Bem. In der Mathematik wird gezeigt, dass zu gegebenen Kräften  $F_k$  und Anfangsbedingungen  $\vec{x}_i(t_0), \dot{\vec{x}}_i(t_0)$  ( $i=1, \dots, N$ ) eine eindeutige Lösung  $\vec{x}_k(t)$  der Bewegungsgleichungen existiert (zumindest für  $t \approx t_0$ ).

Besprek (1) Freies Teilchen. Keine Kraft, d.h.  $\vec{F} = 0$

$$\Leftrightarrow \ddot{\vec{x}}(t) = 0 \Leftrightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{x}}(0) + t \ddot{\vec{x}}(0),$$



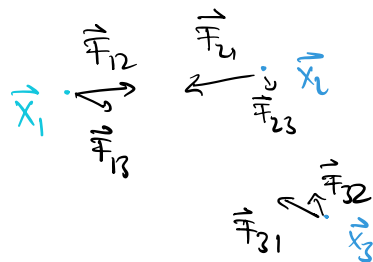
(2) Feder.   $m\ddot{x}(t) = F(x(t)) = -k x(t)$   
→ x  
Federkonstante

(3) Sonnensystem. N Körper (Sonne, Planeten), Positionen  $\vec{x}_k(t)$ .

$$m_k \ddot{\vec{x}}_k = -G \sum_{i \neq k} m_k m_i \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_i}{|\vec{x}_k - \vec{x}_i|^3}$$

$=: \vec{F}_{ki}$  : Zweiteilchen-

Kraft, hängt nur von  $\vec{x}_i, \vec{x}_k$  ab.



(4) Isoliertes System mit Zweiteilchen-Kräften.

$$m_k \ddot{\vec{x}}_k = \sum_{i \neq k} \underbrace{\vec{F}_{ki}}_{\text{Kraft von } i\text{-tem auf } k\text{-tes Teilchen}}(\vec{x}_k, \vec{x}_i). \quad \text{In der Regel gilt } \text{actio} = \text{reactio},$$

d.h.  $\vec{F}_{ki}(\vec{x}_k, \vec{x}_i) + \vec{F}_{ik}(\vec{x}_i, \vec{x}_k) = 0.$

(5) Gedämpfter Oszillator mit externer Anregung.

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) = -kx - r\dot{x} + F_{\text{ext}}(t). \quad (\text{Nicht isoliert!})$$

Näherung! ( $-r\dot{x}$  ignoriert Dynamik des dämpfenden Körpers.)