

2.1. Allgemeine Zweiteilchenprobleme

Die Bewegungsgleichungen für ein isoliertes System von 2 wechselwirkenden Teilchen sind (notwendigerweise! Vgl. § 1.2) von der Form

$$\ddot{\vec{x}}_1 = -\frac{1}{m_1} \partial_{\vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

$$\ddot{\vec{x}}_2 = +\frac{1}{m_2} \partial_{\vec{x}_1} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|).$$

(z.B. $V(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$ für zwei Himmelskörper).

Relativkoordinaten. Der Schwerpunkt $\vec{X} = \frac{m_1}{M} \vec{x}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{x}_2$ ($M = m_1 + m_2$)

bewegt sich geradlinig gleichförmig: $\ddot{\vec{X}} = \vec{0}$ (vgl. § 1.3).

Relative Position $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ erfüllt

$$\ddot{\vec{x}} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \partial_{\vec{x}} V(|\vec{x}|)$$



$$\Leftrightarrow \mu \ddot{\vec{x}} = -\partial_{\vec{x}} V(|\vec{x}|) = -V'(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ reduzierte Masse.}$$

(Bewegungsgleichung für 1 Teilchen im Zentralpotential $V(|\vec{x}|)$!)

(Umgekehrt gilt $\vec{x}_1 = \vec{X} + \frac{m_2}{M} \vec{x}$, $\vec{x}_2 = \vec{X} - \frac{m_1}{M} \vec{x}$.)

Erhaltungsgrößen. (Schwerpunkt wurde bereits "herausgerechnet".)

(1) Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{x} \times \mu \dot{\vec{x}}$ ist erhalten.

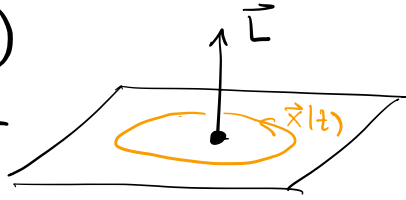
$$\text{(Beweis 1: } \dot{\vec{L}} = \underbrace{\dot{\vec{x}} \times \mu \dot{\vec{x}}}_{=0} + \vec{x} \times \mu \ddot{\vec{x}} = \underbrace{-\vec{x} \times V'(|\vec{x}|) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}}_{=0}.$$

Beweis 2: $L_{\text{tot}} = m_1 \vec{x}_1 \times \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \vec{x}_2 \times \dot{\vec{x}}_2$ ist erhalten (vgl. § 1.3).

$$\begin{aligned} \text{Berechnen } L_{\text{tot}} &= m_1 \left(\vec{X} + \frac{m_2}{M} \vec{x} \right) \times \left(\dot{\vec{X}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{x}} \right) + m_2 \left(\vec{X} - \frac{m_1}{M} \vec{x} \right) \times \left(\dot{\vec{X}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{x}} \right) \\ &= \underbrace{M \vec{X} \times \dot{\vec{X}}}_{\text{erhalten}} + \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}} \Rightarrow \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}} \text{ erhalten.} \end{aligned}$$

erhalten (Schwerpunkt verhält sich wie isoliertes 1-Teilchen-System!)

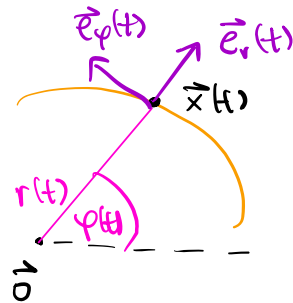
- Da $\vec{x} \cdot \vec{L} = 0$, liegt $\vec{x}(t)$ in der Ebene senkrecht zu \vec{L} .
(Wir betrachten hier nicht den Fall $\vec{L} = \vec{0}$, in welchem sich $\vec{x}(t)$ auf einer Geraden bewegt.)
- In Polarkoordinaten r, φ auf der Bahnebene drücken wir die Bahn aus als $(r(t), \varphi(t))$.



Einheitsvektoren: $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$

$$\Rightarrow \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

(Ist die Bahnebene die xy -Ebene,
 $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.)



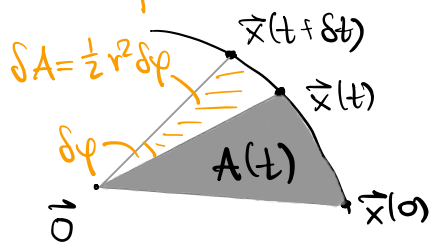
Also $\vec{x} = r \vec{e}_r,$

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \mu r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \text{ hat Länge}$$

$$L := |\vec{L}| = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

\Rightarrow Zweites Keplersches Gesetz (Flächensatz):



Ist $A(t)$ die vom Vektor $\vec{x}(t)$ überstrichene Fläche seit $\vec{x}(0)$,

so gilt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{L}{2\mu} = \text{const.}$$

(Gilt also allgemein für Bewegung in Zentralpotentialen, nicht nur für den Keplerschen Fall der Gravitation.)

(2) Gesamtenergie: $E = T + V = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2 + V(|\vec{x}|)$
 $\stackrel{\otimes}{=} \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r)$

ist erhalten. (Beweis: durch Berechnung von \dot{E} aus der ersten Zeile;
 oder durch Rückführung auf Energiesatz im Zweikörperproblem.)

Integration der Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} \left(E - V(r) - \frac{\mu r^2 \dot{\varphi}^2}{2} \right) = \frac{2}{\mu} (E - U(r)), \quad U(r) = V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

effektives Potential. (Da $U(r) \nearrow +\infty$, wenn $r \searrow 0$, läuft $r(t)$ nicht durch 0.)

$$(i) \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{L}{\pm r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}}$$

(\pm gemäß Stetigkeits-
 überlegungen, siehe Phasenportrait)

$$\Rightarrow \varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \int_{r_0}^r \frac{L}{r'^2 \sqrt{2\mu(E - U(r'))}} dr' \quad (\otimes) \text{ (funktioniert nur, wenn } \dot{r} \neq 0!)$$

Können also die Bahnkurve (ungeachtet des zeitlichen Verlaufs)
 durch Integration bestimmen.

$$(ii) \quad \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r))} = \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\mu^{-1} (E - U)}}$$

$$\Rightarrow t(r) - t(r_0) = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r'))}}. \quad (\otimes\otimes)$$

Können also $t(r)$, somit $r(t)$ und dann auch (mittels (i))
 $\varphi(t)$ bestimmen.

Zusammenfassend: Bestimmung von $(r(t), \varphi(t))$ ist auf Auswertung
 von Integralen zurückführbar: das System ist integrabel.