

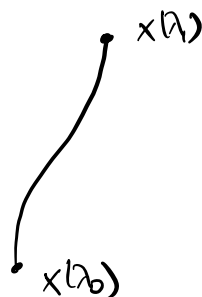
7.4. Relativistische Mechanik

- **Eigenzeit.** Teilchen/Beobachter bewegen sich entlang von Weltlinien $x(\lambda) = (x^0(\lambda), \vec{x}(\lambda))$ für die $x'(\lambda)$ für alle λ zukünftig licht-/zeitartig ist.

Die Zeit, die für diesen Beobachter verstreicht zwischen $x(\lambda_0)$ und $x(\lambda_1)$, ist die **Eigenzeit**

$$\tau = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{1}{c} \sqrt{-x'(\lambda) \cdot x'(\lambda)} d\lambda$$

(Beweis: das gilt für geradlinige γ , also auch allgemein durch Approximation von γ durch abschnittsweise geradlinige Weltlinien.)



Bemerkung. (1) τ hängt von der gesamten Bahn ab, aber nicht von der Parametrisierung.

(2) Die Eigenzeit ist unabhängig vom **Inertialsystem**, in dem sie berechnet wird. (Denn in einem anderen System ist die Weltlinie

$\hat{x}(\lambda) = \Lambda x(\lambda)$ für ein **fixiertes** $\Lambda \in L$, und daher $\hat{x}'(\lambda) = \Lambda x'(\lambda)$ und

$$\begin{aligned} \hat{x}'(\lambda) \cdot \hat{x}'(\lambda) &= \hat{x}'(\lambda)^T g \hat{x}'(\lambda) = x'(\lambda)^T \Lambda^T g \Lambda x'(\lambda) \\ &= x'(\lambda)^T g x'(\lambda) = x'(\lambda) \cdot x'(\lambda) \end{aligned}$$

- Das **Bogenlängenelement** ist also

$$ds^2 = - \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{dx}{d\lambda} d\lambda^2 = -dx \cdot dx = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- Wenn wir die Kurve nach t parametrisieren, d.h. $x(t) = (ct, \vec{x}(t))$, und die Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

einführen, gilt also $dx^0 = c dt$, $dx^i = v^i dt$ ($i=1, \dots, 3$), also

$$ds^2 = - \left(c^2 - \sum_{i=1}^3 (v^i)^2 \right) dt^2,$$

und daher ist das **Eigenzeitelement**

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} dt.$$

(In demjenigen Bezugssystem, in dem das Teilchen momentan in Ruhe ist $[\vec{v} = \vec{0}]$, gilt also $d\tau = dt$; daher der Begriff "Eigenzeit".)

• 4er-Geschwindigkeit, -Impuls, -Kraft.

Für ein Teilchen der Masse $m > 0$ (intrinsische Eigenschaft des Teilchens; unabhängig vom Inertialsystem; auch genannt Ruhemasse), das sich entlang der Weltlinie x bewegt, setzen wir:

• 4er-Geschwindigkeit: $u := \dot{x} := \frac{dx}{d\tau}$ ($u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$)
 in Koordinaten, mit $x(t) = (ct, \vec{x}(t))$: $\frac{d}{d\tau} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt}$
 $\Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (c, \vec{v}).$

• 4er-Impuls: $p := m u$ ($p^\mu = m u^\mu$)
 in Koordinaten $p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (mc, m\vec{v}).$

• 4er-Kraft: $F = \dot{p} = \frac{dp}{d\tau}$ ($F^\mu = \dot{p}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$).

Bemerkungen. (1) Schreiben wir $p = (p^0, \vec{p})$, ist also der "räumliche" Teil des 4er-Impulses $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

(vs. $\vec{p} = m\vec{v}$ in Newtonscher Theorie).

$$(2) cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{Newtonsche kinetische Energie}} + \underbrace{\frac{3mv^4}{8c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^6}{c^4}\right)}_{\text{relativistische Korrekturen; wichtig für } v \nearrow c!}$$

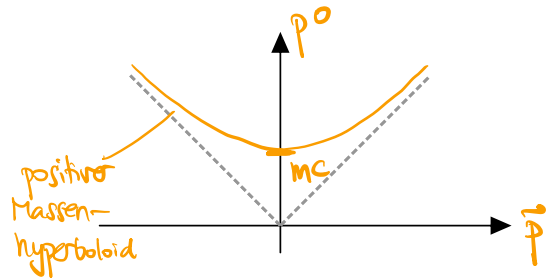
Nennen $E := cp^0$ die relativistische Energie. ($E \nearrow \infty$, wenn $v \nearrow c$.)

Der konstante Term $E_0 = mc^2$ wird **Ruheenergie** genannt. Relevant für Zerfallsprozesse (siehe unten).

(3) Per Definition: $-u \cdot u = c^2$,

$$-p \cdot p = (p^0)^2 - |\vec{p}|^2 = m^2 c^2,$$

$$p^0 > 0.$$



Haben weiterhin $-c p \cdot c p = (c p^0)^2 - c^2 |\vec{p}|^2 = m^2 c^4 \Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2$.

(4) **Masselose Teilchen**: $p \cdot p = 0$, $E^2 = c^2 |\vec{p}|^2$: nicht-triviale Lösungen!

(Anders als in Newtonscher Mechanik mit $2mE = |\vec{p}|^2$.) Nämlich:

$$E = c |\vec{p}|, \quad p = (|\vec{p}|, \vec{p})$$

Ein solches Teilchen trägt also Energie und Impuls. Da p lichtartig ist (in jedem Inertialsystem!), ist seine Geschwindigkeit immer $= c$.

(Dem $m=0$, $|\vec{v}| < c$ würde $p = m u = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (c, \vec{v}) = 0$ ergeben!)

Beispiel: Photon. (Die Energie $E = h\nu$ des Photons muss ausserhalb der speziellen Relativitätstheorie begründet werden.)

(5) **Postulat**: Der Gesamtimpuls P^μ eines isolierten Systems ist erhalten.

(6) Der **räumliche Teil** von $\dot{p} = F$ ist $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (ganz analog zum Newtonschen Fall).

Die **zeitliche Komponente** von $\dot{p} = F$ enthält **keine weitere Information**:

da $p \cdot p = -m^2 c^2$, ist

$$0 = p \cdot \dot{p} = p \cdot F = m u \cdot F,$$

d.h. F ist orthogonal zu $u = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (c, \vec{v})$,

$$\text{also } -c F^0 + \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow P := c F^0 = \vec{F} \cdot \vec{v} = \text{Leistung.}$$

(7) (i) Die 4er-Geschwindigkeit transformiert sich **kontravariant** unter orthochronen Lorentz-Transformationen. D.h. ist $\Lambda \in L$, $\Lambda^0_0 \geq 1$, und $x(\lambda)$ eine Weltlinie in einem Inertialsystem und $\hat{x}(\lambda) = \Lambda x(\lambda)$ dieselbe Weltlinie, aber ausgedrückt im transformierten Inertialsystem, so gilt

$$\hat{u} = \frac{d\hat{x}}{d\tau} = \Lambda u.$$

Da u und \hat{u} unabhängig von der Parametrisierung der Weltlinie sind, kann man das am einfachsten sehen, indem man x nach der Eigenzeit parametrisiert: $x = x(\tau)$ (also $\frac{1}{c} \sqrt{-\frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau}} = 1$); dann ist

auch $\hat{x}(\tau) = \Lambda x(\tau)$ nach der Eigenzeit parametrisiert

(da $\frac{d}{d\tau}(\Lambda x) \cdot \frac{d}{d\tau}(\Lambda x) = \Lambda \frac{dx}{d\tau} \cdot \Lambda \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{dx}{d\tau}$), daher also

$$\hat{u}(\tau) = \frac{d\hat{x}}{d\tau} = \Lambda \frac{dx}{d\tau} = \Lambda u(\tau).$$

(ii) Dasselbe gilt offensichtlich auch für den 4er-Impuls:

$$\hat{p} = \Lambda p.$$

Und nach derselben Argumentation dann auch für die 4er-Kraft:

$$\hat{F} = \Lambda F.$$