

## 4. Starre Körper

Ein **starrer Körper** ist ein System von Masspunkten, deren paarweise Abstände während seiner Bewegung konstant bleiben. (**Idealisierung!**)

**Mathematische Implementierung:** im Bezugssystem des Körpers sind alle Masspunkte ortsfest.

**Freiheitsgrade:** einzig die Verschiebung und Rotation des Bezugssystems des Körpers relativ zu einem Inertialsystem:

$$\vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3, \quad R(t) \in SO(3),$$

(Brauchen uns um Spiegelungen nicht zu kümmern: ein starrer Körper kann nicht auf einmal in sein Spiegelbild übergehen!)

### 4.1. Kreisel

Wir betrachten **Kreisel**: starre Körper, bei denen ein Punkt festgehalten wird.

**Beispiele:** (1) starre Körper, bei denen der Schwerpunkt festgehalten wird.

z.B. isolierter starrer Körper  $\Rightarrow$  Schwerpunktsystem ist inertial.

(2) Kreisel auf einem Tisch, mit fixierten Kontaktpunkt.

**Normalisierung:** im Bezugssystem des Kreisels halten wir  $\vec{y} = \vec{0}$  fest (nicht notwendigerweise den Schwerpunkt!), und dies soll auch der Punkt  $\vec{x} = \vec{0}$  im Inertialsystem sein.

$$\Rightarrow \vec{x} = R(t) \vec{y}, \quad \vec{y} = R(t)^T \vec{x}, \quad (R(t) \in SO(3))$$

Schreiben  $m_i, \vec{y}_i$  für die Massen und Positionen der Masspunkte des starren Körpers (oder  $\rho(\vec{y})$  für die Massendichte im Falle von kontinuierlichen Körpern).  $\Rightarrow$  Positionen im Inertialsystem:  $R(t)\vec{y}_i = \vec{x}_i(t)$ .

• Drehimpuls und Drehmoment. Im Inertialsystem:

$$\vec{L} = \sum m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i =: R \vec{S} \quad (\text{Definition von } \vec{S}).$$

$$\vec{M}_x = \sum m_i \vec{x}_i \times \ddot{\vec{x}}_i =: R \vec{M}_y \quad (\text{Definition von } \vec{M}_y).$$

Bewegungsgleichung des Kreisel (= Gleichung für  $R(t)$ !) ist gegeben durch den Drehimpulssatz: in der Tat folgt aus

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}_x$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} R \vec{M}_y &= \frac{d}{dt} (R \vec{S}) = R \dot{\vec{S}} + \dot{R} \vec{S} \\ \Rightarrow \vec{M}_y &= \dot{\vec{S}} + R^T \dot{R} \vec{S} \\ &= \dot{\vec{S}} + \vec{\omega} \times \vec{S}, \end{aligned}$$

wobei wir uns an die Definition  $\Omega = R^T \dot{R} = \vec{\omega} \times$  erinnern,

$\vec{\omega}$  = Winkelgeschwindigkeit des Kreisels im körperfesten System.

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichung: } \dot{\vec{S}} = \vec{M}_y - \vec{\omega} \times \vec{S}.$$

Trägheitstensor. Betrachten noch einmal

$$\begin{aligned} \vec{S} &= R^T \vec{L} = R^T \sum m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i \\ &= R^T \sum m_i R \vec{y}_i \times \dot{R} \vec{y}_i \end{aligned}$$

$$R(\vec{a} \times \vec{b}) = R\vec{a} \times R\vec{b} \Rightarrow R^T \sum m_i R(\vec{y}_i \times R^T \dot{R} \vec{y}_i)$$

für  $R \in SO(3)$

$$= \sum m_i \vec{y}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{y}_i)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \Rightarrow \sum m_i (\vec{\omega} |\vec{y}_i|^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{y}_i) \vec{y}_i)$$

$$= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= \mathbf{I} \vec{\omega},$$

wobei  $\mathbf{I} := \sum m_i (|\vec{y}_i|^2 \mathbf{I}_3 - \vec{y}_i \vec{y}_i^T) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  den Trägheitstensor bezeichnet.

Bemerkung: (1) Komponenten:  $I_{jk} = \sum m_i (|\vec{y}_i|^2 \delta_{jk} - y_{i,j} y_{i,k})$

$$= I_{kj} \quad (\text{symmetrische Matrix})$$

(2) kontinuierliche Körper:  $\mathbf{I} = \int \rho(\vec{y}) (|\vec{y}|^2 \mathbf{I}_3 - \vec{y} \vec{y}^T) d\vec{y}.$

Kinetische Energie des Kreisel:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i |\dot{R} \vec{y}_i|^2$$

$$R^T \dot{R} = \vec{\omega} \times \Rightarrow \dot{R} = R(\vec{\omega} \times) \uparrow$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i |\vec{\omega} \times \vec{y}_i|^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i (|\vec{\omega}|^2 |\vec{y}_i|^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{y}_i)^2)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega}.$$

Da  $T \geq 0$ , ist also  $\mathbf{I}$  positiv semidefinit. Nehmen an:  $\mathbf{I}$  positiv definit.

( $\Leftrightarrow$  Massenverteilung ist nicht entartet, d.h. nicht alle Massepunkte liegen auf einer Geraden durch  $\vec{y} = \vec{0}$ ).

Hauptachsensystem Da  $I = I^T$  positiv definit ist, hat  $I$  drei orthonormale Eigenvektoren  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$  (Hauptträgheitsachsen)

mit  $I \vec{e}_j = I_j \vec{e}_j, \quad j=1,2,3,$

$I_j > 0$  (Hauptträgheitsmomente).

(für nicht-entartete Massenverteilung)

Im (körperfesten) Hauptachsensystem  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  (körperfest!) gilt also

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } I_{jk} = \delta_{jk} I_j,$$

$$S_j = I_j \omega_j$$

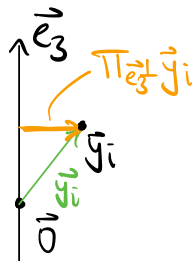
$$T = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} I_j \omega_j^2 = \sum_{j=1}^3 \frac{S_j^2}{2I_j}$$

• Bemerkung: für  $1 \leq i, j, k \leq 3$  gilt  $0 < I_k \leq I_i + I_j$

Beweis:  $\vec{e}_3^T I \vec{e}_3 = \sum m_i (|\vec{y}_i|^2 - |\vec{e}_3 \cdot \vec{y}_i|^2)$

$$= \sum m_i |\Pi_{\vec{e}_3^\perp} \vec{y}_i|^2, \quad \Pi_{\vec{e}_3^\perp} \vec{y} := \vec{y} - (\vec{e}_3 \cdot \vec{y}) \vec{e}_3$$

Projektion auf Ebene  $\perp \vec{e}_3$ .



Schreiben wir im Hauptachsensystem  $\vec{y}_i = \begin{pmatrix} y_{i,1} \\ y_{i,2} \\ y_{i,3} \end{pmatrix}$ ,

so gilt also  $I_3 = \vec{e}_3^T I \vec{e}_3$

$$= \sum m_i (y_{i,1}^2 + y_{i,2}^2).$$

$$\Rightarrow I_2 + I_3 = \sum m_i [(y_{i,1}^2 + y_{i,3}^2) + (y_{i,1}^2 + y_{i,2}^2)]$$

$$= \underbrace{\sum m_i (y_{i,2}^2 + y_{i,3}^2)}_{= I_1} + \underbrace{2 \sum m_i y_{i,1}^2}_{\geq 0}$$

$$\geq I_1.$$