

## 7.5. Relativistische Effekte

### 7.5.1. Zerfälle.

Vorher:

(M)

$$P_0 = Mu = (Mc, \vec{0}).$$

Nachher:



$$P_1 = P_+ + P_-,$$

$$P_{\pm} = mu_{\pm} = \frac{m}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} (c, \pm \vec{v})$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} (2mc, \vec{0}).$$

- Impulserhaltung sagt  $P_0 = P_1$ , also (durch Vergleich der 0-ten, also Energiekomponenten)

$$2m = M \sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2} < M:$$

die Gesamtmasse ist **nicht** erhalten!

- Der **Massendefekt**  $M - 2m$  bestimmt die Geschwindigkeit  $\vec{v}$ :

$$(M - 2m) c^2 = 2m \left( \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} - 1 \right) c^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 + O\left(\frac{|\vec{v}|^4}{c^2}\right).$$

Für  $|\vec{v}| \ll c$  ist dies gleich der **klassischen (kinetischen) Energie der Zerfallsprodukte**. Ein Teil der Ruheenergie  $Mc^2$  des ursprünglichen Teilchens ist also in kinetische Energie der Produkte umgewandelt worden.

### 7.5.2. Zeitdilatation

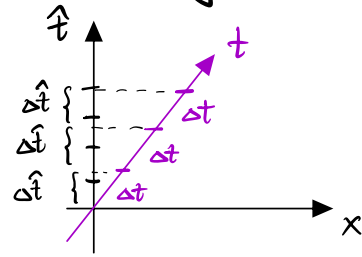
- Gedankenexperiment in einer räumlichen Dimension. Betrachten 2 Inertialsysteme.

**System 1:** Uhr am Ursprung  $\vec{x} = \vec{0}$ , tickt einmal in  $\Delta t$  Zeitschritten; d.h.

zwei aufeinanderfolgende Ticks sind durch den 4er-Vektor  $\Delta X = (c \Delta t, \vec{0})$  getrennt.

System 2: bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zu System 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{t} = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \hat{x} = \frac{vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$



$\Rightarrow$  Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ticks:

$$\Delta \hat{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta t.$$

D.h. von der Perspektive des 2. Systems läuft die Uhr langsamer.  
("Zeitdilatation.")

• **Bemerkung.** Umgekehrt genauso: tickt im 2. System eine Uhr alle  $\Delta \hat{t}'$  Zeitschritte, ist das im 1. System gemessene Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ticks  $\Delta t' = \frac{\Delta \hat{t}'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \Delta \hat{t}'$ !

$\Rightarrow$  Uhren in 1 ticken aus der Perspektive von 2 langsamer,  
Uhren in 2 ticken aus der Perspektive von 1 langsamer.

• **Experimentelle Beobachtung:**

(1) Zwei gleiche Uhren. Eine fest an  $\vec{x} = \vec{0}$ , die andere bewegt sich, kehrt aber wieder zum Ausgangspunkt zurück. Zeitvergleich.

(Hafele-Keating 1972. Auch Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie spielen eine Rolle.)

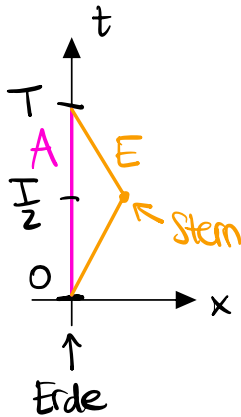
(2) Relativistischer Dopplereffekt.

(3) Messung der von der Uhr zurückgelegten Strecke  $\Delta \vec{x} = \frac{v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > v \Delta t$ .  
(Siehe auch: Längenkontraktion.)

Zeitintervall, das  
die Uhr anzeigt

### 7.5.3. Zwillingsparadoxon

Adam wartet eine Zeit  $T$  auf der Erde, während Eva mit Geschwindigkeit  $v$  wegfliegt und wieder zurückkommt.



• Während Adam um  $\frac{T}{2}$  altert, misst er für Eras

$$\text{Alterung } \frac{T}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{T}{2\gamma},$$

wenn Eva also zurückkehrt, ist sie nur um

$$T_E = 2 \cdot \frac{T}{2\gamma} = \frac{T}{\gamma} < T$$

gealtert.

• Alternative Beschreibung mittels Eigenzeit:

$$x_A(t) = (ct, \vec{0}) \quad (0 \leq t \leq T)$$

$$x_E(t) = \begin{cases} (ct, tv) & (0 \leq t \leq \frac{T}{2}) \\ (ct, (T-t)v) & (\frac{T}{2} \leq t \leq T) \end{cases}$$

Eigenzeit, die entlang von  $x_E$  vergeht:

$$T_E = \frac{1}{c} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} \sqrt{c^2 - v^2} dt + \int_{\frac{T}{2}}^T \sqrt{c^2 - (-v)^2} dt \right) = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$\parallel \sqrt{-\frac{dx_E}{dt} \cdot \frac{dx_E}{dt}} dt$$

entlang von  $x_A$ :  $\parallel \sqrt{-\frac{dx_A}{dt} \cdot \frac{dx_A}{dt}} dt$

$$T = \frac{1}{c} \int_0^T \sqrt{c^2} dt = T.$$

• Paradoxon: Die Situation scheint symmetrisch zu sein: von Eras Perspektive fliegt Adam weg und kommt wieder. Aber: Adam ist in Ruhe in einem Inertialsystem; Eva nicht.

#### 7.5.4. Längenkontraktion

- Myonen haben in ihrem Ruhesystem eine mittlere Lebensdauer von

$$\tau = (2.19703 \pm 0.00004) \mu\text{s}.$$

(Sie zerfallen in ein Elektron und zwei Neutrinos.)

- Misst man die mittlere Weglänge von Myonen in einem Teilchenstrahl mit Geschwindigkeit  $v$ , erhält man

$$L = v \cdot (\gamma \tau), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

(Das ist grösser als die klassische Erwartung  $v\tau$ .)

- Erklärung 1: Zeitdilatation. Im ruhenden Laborsystem leben die schnellen Myonen länger.

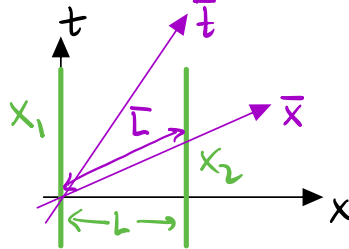
- Erklärung 2: Längenkontraktion. Im Ruhesystem der Myonen (mittlere Lebensdauer  $\tau$ !) erscheint die Weglänge  $x$ , die im Laborsystem gemessen wird, als verkürzt,

$$\bar{L} = \frac{L}{\gamma} = L \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L.$$

Rechnung: Im Laborsystem: statisch markierte Punkte

$$x_1(\lambda) = (\lambda, 0)$$

$$x_2(\lambda) = (\lambda, L)$$



Myonen-System: Relativgeschwindigkeit  $v$ , selber Koordinatenursprung

$$\Rightarrow \bar{x}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} x_1(\lambda) \quad \left( \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \beta = -\frac{v}{c} \right)$$

$$= (\gamma\lambda, -\gamma\frac{v\lambda}{c})$$

$$\bar{x}_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} x_2(\lambda)$$

$$= (\gamma\lambda - \gamma\frac{vL}{c}, -\gamma\frac{v\lambda}{c} + \gamma L).$$

Müssen Längenmessung an fixierten Zeitpunkt  $\bar{t}$  durchführen; etwa  $\bar{t}=0$ .

$\Rightarrow$  Betrachten  $\bar{x}_1(0)$  (mit  $\bar{x}_1^0(0)=0$ )

und  $\bar{x}_2(\frac{vL}{c})$  (mit  $\bar{x}_2^0(\frac{vL}{c})=0$ )

und berechnen  $\bar{x}_2(\frac{vL}{c}) - \bar{x}_1(0) = (0, -\gamma\frac{v^2L}{c^2} + \gamma L) = (0, \bar{L})$

mit  $\bar{L} = (1 - \frac{v^2}{c^2})\gamma L = \frac{L}{\gamma}$ .

- Bemerkung. Die Längenkontraktion betrifft nur Längen in Bewegungsrichtung. Längen orthogonal zur Bewegungsrichtung sind in beiden Systemen gleich.

### 7.5.5. Doppler-Effekt

- B bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  relativ zu A.
- B sendet alle 1s ein Lichtsignal aus. Zusätzlich zur Zeitdilatation braucht das Lichtsignal noch zusätzlich Zeit, um A zu erreichen.
- Bewegt sich B von A weg, erreichen die Lichtsignale von B also A in Zeitintervallen  $> 1s$ .

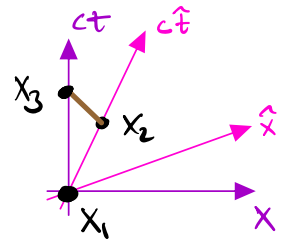
• Quantitative Beschreibung. (1+1 Dimensionen.)

(i)  $x_1 = (0, 0)$

$\bar{x}_1 = (0, 0)$

— Abreise der Uhr (A-System)

(B-System)



(ii)  $\bar{x}_2 = (c\tau, 0)$

— Aussendung des Lichtsignals nach der Zeit  $\tau$   
(B-System)

$x_2 = \Lambda \bar{x}_2 = (\gamma c\tau, \gamma v\tau)$

(A-System,

$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$  mit  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ ,  $\beta = \frac{v}{c}$ .)

(iii)  $x_3 = (cT, 0)$

— Ankunft des Lichtsignals (A-System).

Berechnung von  $T$ :  $x_3 - x_2$  ist lichtartig, also

$0 = (x_3 - x_2) \cdot (x_3 - x_2)$

$= (c(T - \gamma\tau), \gamma v\tau) \cdot (c(T - \gamma\tau), \gamma v\tau)$

$= -c^2 (T - \gamma\tau)^2 + \gamma^2 v^2 \tau^2$

$\Rightarrow T = \gamma \frac{v}{c} \tau + \gamma \tau$

$= \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tau$

$= \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tau.$

(die zweite Lösung  $-\gamma \frac{v}{c} \tau + \gamma \tau$  ist nicht relevant, da  $x_3 - x_2$  zukünftig ist)

Ist  $\tau$  die Periode einer Welle, d.h.  $\frac{1}{\tau}$  ist die Frequenz

$\tau c$  ist die Wellenlänge,

so ist  $T$  die Periode, wie sie in A gemessen wird, d.h.

$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \frac{1}{\tau}$

$T c = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tau c.$

- Bewegt sich die Quelle B von A weg ( $v > 0$ ), so ist also die Frequenz  $\frac{1}{T}$ , die A misst, um den Faktor  $\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$  kleiner als die von B ausgesandte Frequenz  $\frac{1}{T}$   $\leadsto$  Rotverschiebung.
- $v < 0$  (B bewegt sich zu A hin)  $\leadsto$  Blauverschiebung.