

## 6.5. Erzeugung kanonischer Transformationen

Wir betrachten eine **kanonische Transformation** zwischen den Phasenkoordinaten

$$(q^1, \dots, q^N, p_1, \dots, p_N) \text{ und } (\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^N, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N),$$

$$\begin{cases} q = q(\bar{q}, \bar{p}) \\ p = p(\bar{q}, \bar{p}) \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{q} = \bar{q}(q, p) \\ \bar{p} = \bar{p}(q, p) \end{cases}$$

Wir werden diese Transformation durch eine **erzeugende Funktion** beschreiben.

• **Version 1.** Die 1-Form  $\sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} dq^{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^N \bar{p}_{\alpha} d\bar{q}^{\alpha}$  ist **geschlossen**.

Falls  $q^1, \dots, q^N, \bar{q}^1, \dots, \bar{q}^N$  lokale Koordinaten im Phasenraum sind

( $\iff \det \left( \frac{\partial \bar{q}^{\alpha}}{\partial p_{\beta}} \right)_{\alpha, \beta=1, \dots, N} \neq 0$ ), gibt es also  $F_1 = F_1(q, \bar{q})$  mit

$$\sum p_{\alpha} dq^{\alpha} - \sum \bar{p}_{\alpha} d\bar{q}^{\alpha} = dF_1$$

$$\iff \frac{\partial F_1}{\partial q^{\alpha}} = p_{\alpha}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}^{\alpha}} = -\bar{p}_{\alpha}.$$

Ist umgekehrt  $F_1$  vorgegeben, legen diese Gleichungen  $p_{\alpha}, \bar{p}_{\alpha}$  als Funktionen von  $(q, \bar{q})$  fest. Die Transformation  $(q, \bar{q}) \mapsto (p, \bar{p})$

legt implizit die kanonische Transformation

$$(q, p) = \left( q, \frac{\partial F_1}{\partial q} \right) \mapsto (\bar{q}, \bar{p}) = \left( \bar{q}, \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}} \right)$$

fest.

• **Version 2.** Die 1-Form  $\sum p_{\alpha} dq^{\alpha} + \sum \bar{q}^{\alpha} d\bar{p}_{\alpha}$  ist geschlossen.

Sind  $q^1, \dots, q^N, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N$  lokale Koordinaten im Phasenraum, können wir

diese 1-Form also schreiben als  $dF$ ,  $F = F(q, \bar{p})$ .

$$\Rightarrow p_{\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q^{\alpha}}, \quad \bar{q}^{\alpha} = \frac{\partial F}{\partial \bar{p}_{\alpha}}.$$

Unsere kanonische Transformation ist also implizit gegeben durch

$$(q^\alpha, \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}) \mapsto (\frac{\partial F}{\partial \bar{p}_\alpha}, \bar{p}_\alpha).$$

**Bemerkung.** Diese beiden (und alle weiteren) Varianten sind durch Legendre-Transformationen miteinander verknüpft:

$$\begin{aligned} dF &= \sum p_\alpha dq^\alpha + \bar{q}^\alpha d\bar{p}_\alpha \\ &= \sum (p_\alpha dq^\alpha - \bar{p}_\alpha d\bar{q}^\alpha) + (\bar{q}^\alpha d\bar{p}_\alpha + \bar{p}_\alpha d\bar{q}^\alpha) \\ &= dF_1 + d(\sum \bar{q}^\alpha \bar{p}_\alpha) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  können  $F(q, \bar{p}) = \sum_{\alpha=1}^N \bar{q}^\alpha \bar{p}_\alpha - (-F_1(q, \bar{q}))$  nehmen. (Legendre-Transformation!)

**Beispiele.** (1)  $F(q, \bar{p}) = q\bar{p}$  erzeugt die kanonische Transformation

$$(q, p) = (q, \frac{\partial F}{\partial p}) = (q, \bar{p}) \mapsto (\frac{\partial F}{\partial \bar{p}}, \bar{p}) = (q, \bar{p}) = (\bar{q}, \bar{p}),$$

d.h.  $\bar{q} = q, \bar{p} = p$ . (Die Identitätsabbildung!)

(2) Harmonischer Oszillator  $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} = \frac{1}{2m} (p^2 + m^2 \omega^2 q^2)$ ,

$$\omega := \sqrt{k/m}.$$

$F_1(q, \bar{q}) = \frac{m\omega^2 q^2}{2} \cot \bar{q}$  erzeugt die kanonische Transformation

$$(q, p) = (q, \frac{\partial F_1}{\partial q}) = (q, m\omega q \cot \bar{q}) \mapsto (\bar{q}, \frac{\partial F_1}{\partial \bar{q}}) = (\bar{q}, \frac{m\omega q^2}{2 \sin^2 \bar{q}}) = (\bar{q}, \bar{p})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = \sqrt{\frac{2\bar{p}}{m\omega}} \sin(\bar{q}) & (\text{von } \otimes) \\ p = \sqrt{2m\omega \bar{p}} \cos(\bar{q}) & (\text{von } \otimes) \end{cases}$$

$$\Rightarrow H = \omega \bar{p}.$$

$$\Downarrow \\ \dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}} = \omega, \quad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}} = 0 \\ (\text{Vgl. früheres Beispiel.})$$