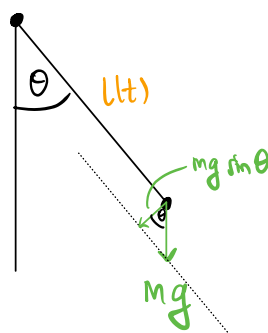


### 3.2. Parametrische Resonanz

Statt eine Schwingung durch externe Anregungen zu erzwingen, werden wir jetzt sehen, dass auch frei schwingende Systeme mit periodischer Zeitabhängigkeit Resonanzen zeigen können:

$$\dot{\vec{z}}(t) = A(t) \vec{z}(t), \quad A(t+T) = A(t) \quad (T = \text{Periode}), \quad \textcircled{*}$$

Beispiel: Schaukeln im Stehen. Wir geben  $L(t)$  vor,  $L(t+T) = L(t)$ .



Wollen  $\theta(t)$  bestimmen, Drehimpuls:  $L(t) = m L(t)^2 \dot{\theta}(t)$ .

Drehimpulssatz:  $\frac{d}{dt} (m L(t)^2 \dot{\theta}) = -mgL \sin \theta$ .

Kleine Auslenkungen  $\theta$ :  $\sin \theta \approx \theta$

$\Rightarrow \vec{z}(t) := \begin{pmatrix} \theta(t) \\ L(t) \end{pmatrix}$  erfüllt  $\textcircled{*}$

$$\text{für } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m L(t)^2} \\ -mg L(t) & 0 \end{pmatrix}$$

• Frage: langfristiges Verhalten von  $\vec{z}(t)$  in  $\textcircled{*}$ ?

Wegen  $A(t+T) = A(t)$  gilt für den Propagator:  $P(t+T, s+T) = P(t, s)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(t+nT, s) &= P(t+nT, s+T) P(s+T, s) \\ &= P(t+(n-1)T, s) P(s+T, s) \\ &= \dots = P(t, s) P(s+T, s)^n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(nT) := P(nT, 0) = P(T)^n.$$

Fall 1:  $P(T)$  hat einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda| > 1$ .

Ist  $P(T) \vec{z}_0 = \lambda \vec{z}_0$ , so wächst  $P(nT) \vec{z}_0 = \lambda^n \vec{z}_0 = e^{nT \frac{\log \lambda}{T}} \vec{z}_0$

exponentiell mit der Zeit  $nT$ .

Fall 2:  $P(T)$  hat nur Eigenwerte mit  $|\lambda| \leq 1$  und ist diagonalisierbar.

$\Rightarrow P(nT)$  (und daher  $P(t,s)$ ) ist für alle  $n$  (und  $t,s$ ) beschränkt.

•  $P(T)$  ist schwierig zu bestimmen (ohne Computer). Können aber berechnen:

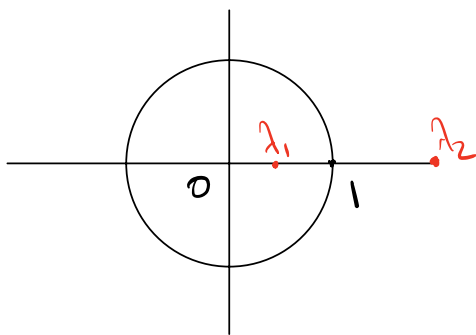
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \det(P(t,s)) &= \operatorname{tr} \left( P(t,s)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} P(t,s) \right) \det(P(t,s)) \\ &= \operatorname{tr}(A(t)) \det(P(t,s)). \end{aligned}$$

- Im Beispiel gilt  $\operatorname{tr}(A(t)) = 0 \forall t$ , also

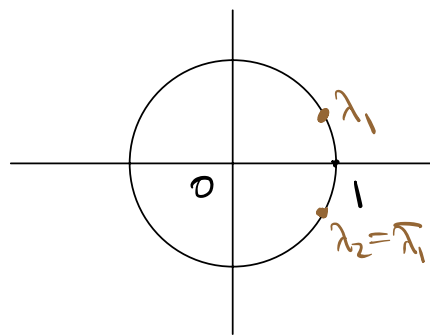
$$\det P(t,s) = \text{const.} = \det P(s,s) = \det I = 1.$$

$\Rightarrow \det P(T) = 1$ . Da  $P(T) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , erfüllen die Eigenwerte

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  von  $P(T)$  also  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  und  $\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ oder} \\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1} \end{cases}$



Instabiler Fall (außer  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ )



Stabiler Fall (auch für  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ )

$$\text{haben } \operatorname{tr}(P(T)) = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} P(T) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\operatorname{tr} P(T))^2 - 1} \quad (\neq)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Instabiler Fall } (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow |\operatorname{tr} P(T)| > 2 \\ \quad (\lambda_1, \lambda_2) \neq (1, 1) \\ \text{Stabiler Fall } (\lambda_1, \lambda_2 \in e^{i\mathbb{R}}) \Leftrightarrow |\operatorname{tr} P(T)| \leq 2. \end{array} \right.$$

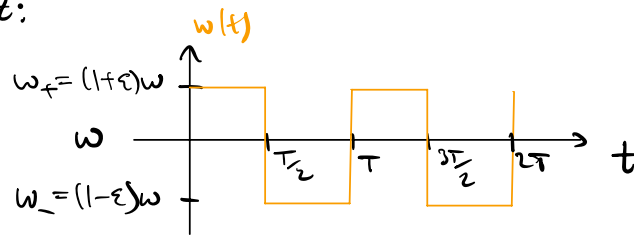
Müssen also "nur"  $\text{tr } P(T)$  bestimmen.

**Beispiel (Fortsetzung).** In Zeitintervallen, in denen  $L(t)$  konstant ist, beschreibt  $\theta(t)$  eine Schwingung mit konstanter Frequenz  $\omega = \sqrt{\theta/L}$ .

Propagator für  $A(\omega) := \begin{pmatrix} 0 & \omega^4/mg^2 \\ -mg^2/\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$  (mit  $A(\omega)^2 = -\omega^2 I$ )

$$\begin{aligned} \text{ist } P(t; \omega) &:= e^{tA(\omega)} = \cos(\omega t) I + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} A(\omega) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\omega^3}{mg^2} \sin \omega t \\ -mg^2 \omega^{-3} \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wählen jetzt für  $\omega = \omega(t)$  eine Stufenfunktion mit kleinen Variationen  
z.B. der Frequenz:



**Bemerkung.** Die Größen  $L, \theta$  sind selbst für solche  $\omega$ ,  
oder  $L = \theta/\omega^2$ ,  
stetig an  $t = T/2, T, \dots$ !

$$\begin{aligned} P(T) &= p(T/2; \omega_-) p(T/2; \omega_+) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_- T}{2}) \cos(\frac{\omega_+ T}{2}) - \frac{\omega_-^3}{\omega_+^3} \sin(\frac{\omega_- T}{2}) \sin(\frac{\omega_+ T}{2}) & \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cos a \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \quad \dots \quad - \frac{\omega_+^3}{\omega_-^3} \sin(\frac{\omega_- T}{2}) \sin(\frac{\omega_+ T}{2}) + \cos(\frac{\omega_- T}{2}) \cos(\frac{\omega_+ T}{2}) \\ 2 \sin a \sin b &= -\cos(a+b) + \cos(a-b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{tr } P(T) = \cos\left(\frac{\omega_- + \omega_+}{2} T\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+^3}{\omega_-^3} + \frac{\omega_-^3}{\omega_+^3}\right)\right)$$

$$+ \cos\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2} T\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+^3}{\omega_-^3} + \frac{\omega_-^3}{\omega_+^3}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_+^3}{\omega_-^3} + \frac{\omega_-^3}{\omega_+^3}\right) &= 1 + 8\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ \omega_{\pm} &= (1 \pm \varepsilon)\omega \\ \Rightarrow &= 2 \left[ \cos(\omega T) (1 + 8\varepsilon^2) - \underbrace{\cos(\varepsilon \omega T)}_{= 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \cdot 8\varepsilon^2 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

$$1 - \cos T \stackrel{= 2 \sin^2 \frac{T}{2}}{\rightarrow} 2 \left[ \cos(\omega T) - 18 \varepsilon^2 \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \right].$$

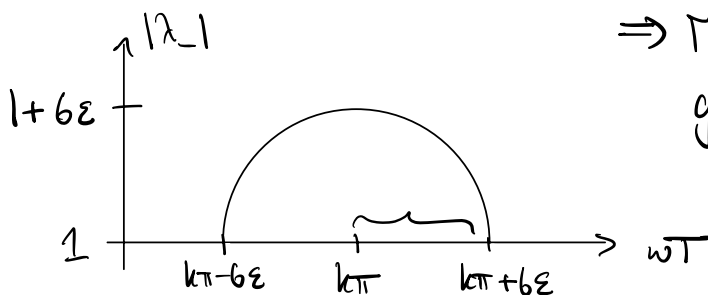
Sind interessiert am **instabilen Fall** (Schauen!). Fixieren jetzt  $\varepsilon \ll 1$  und fassen  $T$  als variable Größe auf. Müssen  $\cos(\omega T) \approx -1$  haben, also  $\omega T \approx k\pi$  ( $k$  ungerade). Setzen wir

$$\omega T = k\pi + \delta, \quad \delta \lesssim \varepsilon,$$

$$\text{so ist } \text{tr } P(T) = 2 \left( -1 + \frac{\delta^2}{2} - 18\varepsilon^2 \right)$$

also sind die Eigenwerte von  $P(T)$  nach  $\oplus$  gegeben durch

$$\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{36\varepsilon^2 - \delta^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$



$\Rightarrow$  Maximaler logarithmischer Amplitudengewinn pro Antriebsperiode  $T$ :

$$\log |\lambda_-| = 6\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\text{also } \max_{0 \leq t \leq t_0} \theta(t) \sim e^{6\varepsilon \frac{t_0}{T}}$$

(exponentielles Wachstum; nur ernst nehmen, solange  $\theta(t) \ll 1$ !)