

7.7. Hamilton-Formulierung

Ausgehend von der Lagrange-Funktion

$$L(t, \vec{x}, \vec{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} - e(\varphi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A})$$

berechnen wir zunächst den konjugierten Impuls

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} = \left(1 + \frac{|\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}|^2}{m^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Also ist die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H(t, \vec{x}, \vec{p}) &= \vec{v} \cdot \vec{p} - L \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} (|\vec{v}|^2 + c^2 (1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2})) + e\varphi \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}} + e\varphi \\ &\stackrel{\circ}{=} c \left[|\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}|^2 + m^2 c^2 \right]^{\frac{1}{2}} + e\varphi. \end{aligned}$$