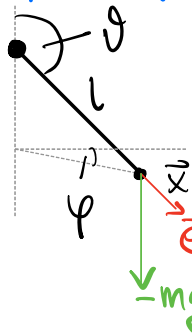


## 5.5. Holoname Zwangsbedingungen

- Zuerst ein Beispiel: sphärisches Pendel.



Zulässige Lagen des Pendels:  $\vec{x} = l\vec{e}$ ,  $|\vec{e}|=1$ ,  
schreiben also  $\vec{e} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ .

(D.h.  $q^1 = \vartheta$ ,  $q^2 = \varphi$  sind die verallgemeinerten Koordinaten.)

$$\Rightarrow \vec{x}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} l \sin\vartheta \cos\varphi \\ l \sin\vartheta \sin\varphi \\ l \cos\vartheta \end{pmatrix} \quad \otimes$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta)$$

$$V = m g x_3 = m g l \cos\vartheta.$$

Für  $L = T - V$  sind die Euler-Lagrange-Gleichungen also

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}}_{= m l^2 \dot{\vartheta}} = \frac{\partial L}{\partial \vartheta} \Leftrightarrow m l^2 \ddot{\vartheta} = m l^2 \dot{\varphi}^2 \cos\vartheta \sin\vartheta + m g l \sin\vartheta \quad (1)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}}_{= m l^2 \dot{\varphi} \sin^2\vartheta} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Leftrightarrow m l^2 \sin^2(\vartheta) \ddot{\varphi} = -2 m l^2 \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin\vartheta \cos\vartheta. \quad (2)$$

Dies sind genau die Bewegungsgleichungen, die man in der klassischen Mechanik erhält: die Zwangsbedingung  $|\vec{x}|=l$  können wir implementieren, indem wir eine Kraft  $-\lambda\vec{x}$  entlang des Pendelfadens einfügen:

$$m \ddot{\vec{x}} = -m g \vec{e}_3 + \lambda \vec{x}.$$

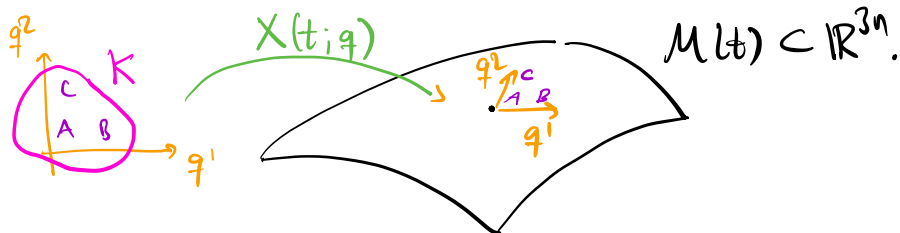
Setzt man  $\vec{x}(\vartheta, \varphi)$  aus  $\otimes$  ein, erhält man (1) und (2) (und eine

Gleichung für  $\lambda$ , und zwar  $\lambda(t) = \frac{m}{2} (g \cos \vartheta - L(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2))$ .

(D.h.  $\lambda$  wirkt entgegen der **radialen Komponente der Schwerkraft**, und der **Zentrifugalkraft**.)

• **Allgemein:** System von  $n$  Teilchen  $x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ , die zur Zeit  $t$  auf einer glatten Fläche (genauer: Untermannigfaltigkeit)

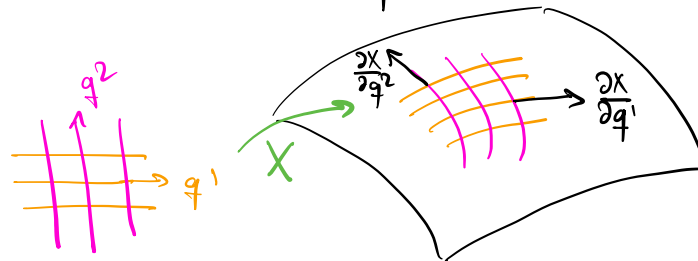
$M(t) \subset \mathbb{R}^{3n}$  der Dimension  $N \in \{0, 1, \dots, 3n\}$  liegen müssen. (**Holonome Zwangsbedingung.**) Das System hat also  $N$  (statt  $3n$ ) Freiheitsgrade.



• Lokal nahe  $x \in M(t)$  können wir  $N$  Koordinaten  $q^1, \dots, q^N$  auf  $M(t)$  einführen, also

$$\mathbb{R}^N \supset K \ni q = (q^1, \dots, q^N) \mapsto X(t; q),$$

wobei die Tangentialvektoren  $\frac{\partial X}{\partial q^j}$  ( $j=1, \dots, N$ ) linear unabhängig sind.



• Jede Bahn  $x(t) = (\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t))$  mit  $x(t) \in M(t)$  für alle  $t$  kann also in den Koordinaten  $q(t)$  beschrieben werden:

$$x(t) = X(t; q(t)) = (\vec{x}_1(t; q(t)), \dots, \vec{x}_n(t; q(t))).$$

⇒ **Lagrange-Funktion** für eine solche Bahn ist, zum Zeitpunkt  $t$ ,

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \left| \frac{d}{dt} (\vec{X}_j(t; q(t))) \right|^2 - V(X(t; q(t))),$$

(= kinetische-potenzielle Energie von  $(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t))$ !)

$$\Rightarrow L(t, q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \left| \underbrace{\frac{\partial \vec{X}_j}{\partial t}(t; q) + \sum_{\beta=1}^N \frac{\partial \vec{X}_j}{\partial q^\beta}(t; q) \dot{q}^\beta}_{= \frac{d\vec{X}_j}{dt}} \right|^2 - V(X(t; q)).$$

• Bestimmen dazu die **Euler-Lagrange-Gleichungen**:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \sum_{j=1}^n m_j \frac{d\vec{X}_j}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{X}_j}{\partial q^\alpha},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = \sum_{j=1}^n m_j \frac{d\vec{X}_j}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{X}_j}{\partial q^\alpha} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial \vec{X}_j} \cdot \frac{\partial \vec{X}_j}{\partial q^\alpha}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \\ = \sum_{j=1}^n \left( m_j \frac{d^2 \vec{X}_j}{dt^2} + \frac{\partial V}{\partial \vec{X}_j} \right) \cdot \frac{\partial \vec{X}_j}{\partial q^\alpha}.$$

Da  $\frac{\partial X}{\partial q^\alpha} = \left( \frac{\partial \vec{X}_1}{\partial q^\alpha}, \dots, \frac{\partial \vec{X}_n}{\partial q^\alpha} \right)$  für  $\alpha=1, \dots, N$  gerade den Tangentialraum zu  $M(t)$  am Punkt  $X(t; q)$  aufspannen, heißt das also, dass

$$\sum_{j=1}^n m_j \frac{d^2 \vec{X}_j}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial \vec{X}_j} + \vec{F}_j \quad (\otimes)$$

gilt, wobei die Zwangskraft  $\vec{F}_j$  so ist, dass  $(\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n)$  senkrecht auf  $M(t)$  steht.

⇒ ⊗ sind genau die **Newton'schen Bewegungsgleichungen**, inklusive der **Zwangskräfte**, die die Teilchenbahnen  $(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t))$  auf die Fläche  $M(t)$  zwingen. (Dies beweist also, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen die Newton'sche Theorie in diesem allgemeinen Kontext korrekt reproduzieren.)

### Allgemeine Prozedur:

(i) Aus der Beschreibung des mechanischen Systems bekommt man

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2, \quad V = V(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ in kartesischen Koordinaten.}$$

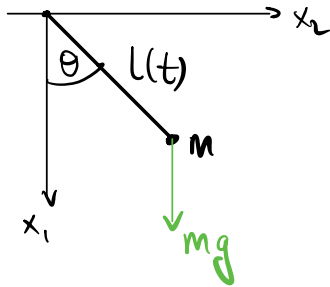
(ii) Erzwingen die (oder einige der) holonomen Zwangsbedingungen, indem man  $x = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = X(t; q)$  für geeignete verallgemeinerte Ortskoordinaten  $q = (q^1, \dots, q^N)$  schreibt.

(iii) Für verbleibende holonome (und nicht-holonome) Zwangsbedingungen, führe **Lagrange-Multiplikatoren** ein. (Diese können **Variablen** oder **Funktionen** sein, je nachdem, ob die Zwangsbedingung für die **Bahn insgesamt** oder **für jeden Zeitpunkt** zutreffen muss.)

(iv) Stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen auf. (Die **Lagrange-Multiplikatoren** für Zwangsbedingungen **für jeden Zeitpunkt** kodieren explizit die nötigen Zwangskräfte.)

Wir illustrieren diese Prozedur zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen in einigen Beispielen.

Beispiel 1: Pendel mit vorgegebener zeitabhängiger Länge (vgl. § 3.2).



Zwangsbedingung:  $\vec{x}(t)$  liegt auf der "Fläche" (1-dim...)

$$M(t) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| = l(t) \}.$$

Parametrisierung durch Koordinate  $\theta$  ( $= q$ ),

$$\text{also } \vec{x} = l(t) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (= X(t, q)).$$

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{l}^2 + (l\dot{\theta})^2)$$

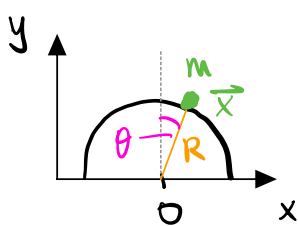
$$V = -mg x_1 = -mg l \cos \theta.$$

Für  $L = T - V$  ergibt sich also als **Euler-Lagrange-Gleichung**:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\theta}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg l \sin \theta, \end{aligned}$$

was wir bereits in § 3.2 mittels des Drehimpulssatzes hergeleitet hatten.

Beispiel 2: Massepunkt, der auf einem Kreis abrutscht.



Verwenden Polarkoordinaten  $r, \theta$ , also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2).$$

$$V = mgr \cos \theta.$$

Da der Punkt vom Kreis abheben kann, müssen wir die Zwangskraft bestimmen, die nötig wäre, den Punkt auf dem Kreis zu halten. Verwenden also einen **Lagrange-Multiplikator** für die Zwangsbedingung  $r(t) - R = 0$ .

$$\Rightarrow L = T - V + \lambda(t)(r(t) - R) \\ = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - mgr \cos \theta + \lambda(r - R).$$

**Euler-Lagrange-Gleichungen:**

$$(1) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \ddot{r} = \frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda$$

$$(2) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = mgr \sin \theta$$

$$(3) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = r - R.$$

Aus (3):  $r(t) = R$  (Zwangsbedingung).

$$\text{In (2): } m R^2 \ddot{\theta} = mg R \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{g}{R} \dot{\theta} \sin \theta \Rightarrow \frac{d}{dt} \dot{\theta}^2 = -\frac{d}{dt} \left( \frac{2g}{R} \cos \theta \right).$$

Ist die Anfangsbedingung  $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} =$  unendlich klein,

$$\text{so erhalten wir also } \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} (1 - \cos \theta).$$

$$\text{In (1): } 0 = m R \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta + \lambda \Rightarrow \lambda = \underbrace{-m R \dot{\theta}^2}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{mg \cos \theta}_{\text{Schwerkraft, Komponente in radialer Richtung}}, \\ = mg(2 - 3 \cos \theta) + \lambda,$$

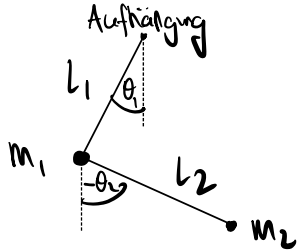
also  $\lambda =$  Zwangskraft in (positive)  $r$ -Richtung

$$= mg(3 \cos \theta - 2).$$

•  $\lambda > 0$  bedeutet: Kraft drückt Massepunkt von Oberfläche weg.

• Wenn  $\lambda=0$ , ist der Punkt im Begriff, abzuhängen  $\Rightarrow \theta_{\text{crit}} = \alpha \cos \frac{2}{3}$ .

Beispiel 2: Doppelpendel. Zwangsbedingung: feste Abstände  $l_1, l_2$ .



$$\vec{x}_1 = l_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + l_2 \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{x}}_2|^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$V = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2).$$

Können dann leicht die Bewegungsgleichungen ( $\ddot{\theta}_1 = \dots, \ddot{\theta}_2 = \dots$ )  
aus den Euler-Lagrange-Gleichungen gewinnen.