

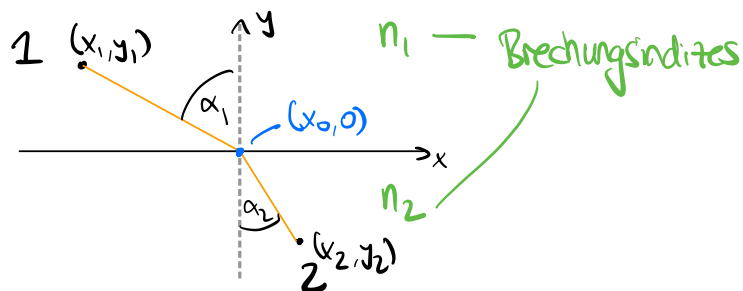
## 5. Lagrange-Formalismus

Es stellt sich heraus, dass man die Dynamik eines klassischen mechanischen Systems, mit Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten  $q(t)$ ,  $\dot{q}(t)$ , bestimmen kann als Extremalproblem: die Trajektorie  $q(t)$  ist eine, für die eine **Wirkung**, häufig von der Form  $\int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$ , extremal / stationär ist (also sich bei infinitesimalen Variationen nicht ändert); hierbei ist **L** eine skalare Funktion (**Lagrange-Funktion**).

### 5.1. Beispiele von Minimierungsproblemen

#### 5.1.1. Snellsches Gesetz

**Optik**: das Fermatsche Prinzip besagt, dass **Licht** auf dem Weg von 1 nach 2 den **schnellsten** Weg folgt:



**Zeit**, die das **Licht** auf dem angezeigten Pfad  $(x_1, y_1) - (x_0, 0) - (x_2, y_2)$  benötigt:

$$cT = n_1 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + y_2^2}.$$

Lichtgeschwindigkeit  $\rightarrow c$

Wert von  $x_0$ , für den  $T$  **minimal** wird? Berechnen

$$\frac{d}{dx_0}(cT) = \frac{n_1 (x_0 - x_1)}{((x_0 - x_1)^2 + y_1^2)^{1/2}} + \frac{n_2 (x_0 - x_2)}{((x_0 - x_2)^2 + y_2^2)^{1/2}} \stackrel{!}{=} 0.$$

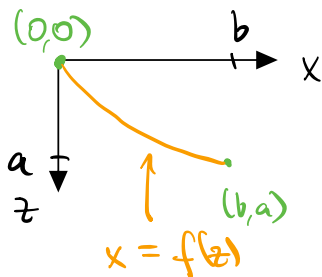
Da aber  $\sin \alpha_1 = \frac{x_0 - x_1}{((x_0 - x_1)^2 + y_1^2)^{1/2}}$ ,

$$\sin \alpha_2 = \frac{x_2 - x_0}{((x_0 - x_2)^2 + y_2^2)^{1/2}},$$

ist dies äquivalent zu  $n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$ . (Snelliessches Gesetz.)

### 5.1.2. Brachistochronenproblem

**Problem:** Bestimme die **Kurve**, in der ein Körper unter Einfluss der Schwerkraft in der **kürzesten Zeit** von einem **vorgegebenen Punkt** zu einem **anderen** gelangt. (Annahme: keine Reibung.)



**Lösung** durch Johann und Jakob Bernoulli.

– Bestimmung der **Zeit** bei vorgegebener Kurve  $(f(z), z)$ :

- Geschwindigkeit an  $(f(z), z)$  durch Energieerhaltung

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - mgz = 0\right) \text{ ist } v = \sqrt{2gz}.$$

- Streckenelement der Kurve:  $ds^2 = dx^2 + dz^2 = (f'(z)^2 + 1) dz^2$

$$\Rightarrow T[f] = \int_{\text{Kurve}} \frac{ds}{v} = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{2gz}}.$$

- Wollen also eine Funktion  $f$  (mit vorgegebenen Randbedingungen  $f(0)=0, f(a)=b$ ) finden, sodass  $T[f]$  minimal ist.

Idee: Ableitungstest! Ist  $h=h(z)$  beliebig mit  $h(0)=h(a)=0$ , so beschreibt  $f + \alpha h$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) auch eine mögliche Bahnkurve.

Wir verlangen  $T[f] \leq T[f + \varepsilon h] \quad \forall$  solche  $h$ , und  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ;  
also muss gelten  $\left. \frac{d}{d\varepsilon} T[f + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Berechnen } \left. \frac{d}{d\varepsilon} T[f + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0} &= \int_0^a \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{\frac{1 + (f'(z) + \varepsilon h'(z))^2}{2gz}} \Big|_{\varepsilon=0} dz \\ &= \int_0^a \frac{f'(z) h'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}} dz \\ &= \underbrace{\frac{f'(z) h(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}} \Big|_0^a}_{=0, \text{ da } h(0)=h(a)=0} - \int_0^a h(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{f'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}} \right) dz. \end{aligned}$$

Damit dies für alle erlaubten  $h$  verschwindet, muss also gelten:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{f'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}} \right) = 0. \quad \otimes$$

D.h. die Lösung des Brachistochronenproblems muss diese Differentialgleichung erfüllen.

- Lösen jetzt  $\otimes$ :  $\frac{f'(z)}{\sqrt{2gz(1 + f'(z)^2)}} = c$  (konstant).

• Für  $c=0$  wäre  $f'=0$ , also  $f(z)=f(0)=0 \quad \forall z$ : erfüllt nicht die gewünschte Randbedingung  $f(a)=b$ .

• Können auch  $c < 0$  ausschließen.

• Für  $c > 0$  ergibt sich  $f'(z) = \sqrt{\frac{c^2 z}{1 - c^2 z}}$  solange  $z < \frac{1}{c^2}$ .

Um die Lösung zu verstehen, substituieren wir

$$z = \frac{1}{c^2} \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2c^2}(1 - \cos \phi).$$

sodass  $\frac{df}{dz} = \sqrt{\frac{\sin^2(\phi/2)}{\cos^2(\phi/2)}} = \frac{\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)}.$

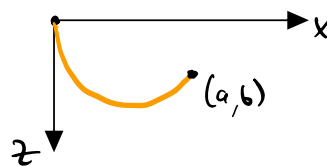
Für  $x(\phi) = f(z(\phi))$  ist also

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\phi} &= \frac{df}{dz} \frac{dz}{d\phi} = \frac{\sin(\phi/2)}{\cos(\phi/2)} \cdot \frac{1}{2c^2} \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) \\ &= \frac{1}{2c^2} \sin^2(\phi/2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x(\phi) = x(0) + \int_0^\phi \frac{1}{2c^2} \sin^2(\phi'/2) d\phi' = \frac{1}{2c^2} (\phi - \sin \phi).$$

$\parallel$   
 $f(z(0)) = f(0) = 0 = \frac{1}{2} (1 - \cos \phi')$

$$\Rightarrow \text{Bahnkurve: } \begin{pmatrix} x(\phi) \\ z(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} (\phi - \sin \phi) \\ \frac{1}{2c^2} (1 - \cos \phi) \end{pmatrix}.$$



**Bemerkung.** (1) Die Konstante  $c$  ist so bestimmt, dass es ein  $\phi_0 \in [0, \pi]$  gibt mit  $\begin{pmatrix} x(\phi) \\ z(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ , also  $\frac{b}{a} = \frac{\phi_0 - \sin \phi_0}{1 - \cos \phi_0}$ ,  $c = \frac{\sin(\phi_0/2)}{\sqrt{a}}.$

(2) Form der Bahnkurve: Zykloide  $(x(\phi) - R\phi)^2 + (z(\phi) - R)^2 = R^2$ ,  
 $R = \frac{1}{2c^2}$ . (Punkt am Rand eines abrollenden Kreises.)

- Zeitlicher Verlauf:  $t(\phi) = \int_0^{z(\phi)} \sqrt{\frac{1 + f'(z)^2}{2gz}} dz = \int_0^\phi \frac{d\phi'}{c\sqrt{2g}} = \frac{\phi}{c\sqrt{2g}},$

d.h.  $\phi$  ist proportional zur Zeit. **Minimale Zeit** von  $(0,0)$  nach  $(b,a)$

ist also  $T = \frac{\phi_0}{c\sqrt{2g}} = \frac{\phi_0}{\sin(\phi_0/2)} \sqrt{\frac{a}{2g}}.$