

(Uninteressante dürfen sofort zu §6.6 weiterblättern.)
Satz (für Interessante) Jede kanonische Transformation $(q, p) \mapsto (\bar{q}, \bar{p})$

kann, lokal nahe einem beliebigen Punkt (q_0, p_0) , durch eine erzeugende Funktion beschrieben werden. **Präziser**: für eine beliebige Wahl $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq N$ (mit $k \in \{0, 1, \dots, N\}$)

gibt es $K \in \{0, 1, \dots, N\}$ und $1 \leq \bar{\alpha}_1 < \bar{\alpha}_2 < \dots < \bar{\alpha}_K \leq N$

und eine erzeugende Funktion

$$S = S(\{q^{\alpha_i}\}, \{p_\beta : \beta \neq \alpha_i \forall i\}, \{\bar{q}^{\bar{\alpha}_i}\}, \{\bar{p}_\beta : \beta \neq \bar{\alpha}_i \forall i\})$$

d.h. $(q, p) \mapsto (\bar{q}, \bar{p})$ ist implizit gegeben (nahe (q_0, p_0)) durch

$$\begin{pmatrix} q^{\alpha_i} \\ q^\beta = -\frac{\partial S}{\partial p_\beta} \quad [\beta \neq \alpha_i \forall i] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{\alpha_i} = \frac{\partial S}{\partial q^{\alpha_i}} \\ p_\beta \quad [\beta \neq \alpha_i \forall i] \end{pmatrix} \\ \mapsto \begin{pmatrix} \bar{q}^{\bar{\alpha}_i} \\ \bar{q}^{\bar{\beta}} = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_{\bar{\beta}}} \quad [\bar{\beta} \neq \bar{\alpha}_i \forall i] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{p}_{\bar{\alpha}_i} = -\frac{\partial S}{\partial \bar{q}^{\bar{\alpha}_i}} \\ \bar{p}_{\bar{\beta}} \quad [\bar{\beta} \neq \bar{\alpha}_i \forall i] \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $q^{\alpha_1}, \dots, q^{\alpha_k}$ und die komplementären p_β ($\beta \neq \alpha_i \forall i$) durch geeignete $\bar{q}^{\bar{\alpha}_1}, \dots, \bar{q}^{\bar{\alpha}_k}$ und komplementäre $\bar{p}_{\bar{\beta}}$ ($\bar{\beta} \neq \bar{\alpha}_i \forall i$) zu einem lokalen Koordinatensystem vervollständigen können: denn dann folgt aus der Geschlossenheit von

$$\psi := \left(\sum_{i=1}^k p_{\alpha_i} dq^{\alpha_i} - \sum_{\beta \neq \alpha_i \forall i} q^\beta dp_\beta \right) - \left(\sum_{i=1}^K \bar{p}_{\bar{\alpha}_i} d\bar{q}^{\bar{\alpha}_i} - \sum_{\bar{\beta} \neq \bar{\alpha}_i \forall i} \bar{q}^{\bar{\beta}} d\bar{p}_{\bar{\beta}} \right)$$

die Existenz von S mit $dS = \psi$.

- Wir betrachten nur den Fall $k = N$, $\alpha_i = i$. (Der allgemeine Fall wird dann genauso behandelt, nur ist die Notation aufwändiger.)

- Die **Jacobi-Matrix**, geschrieben als $(N+N) \times (N \times N)$ -Block-Matrix

$$A(q_0, p_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{q}}{\partial q}(q_0, p_0) & \frac{\partial \bar{q}}{\partial p}(q_0, p_0) \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial q}(q_0, p_0) & \frac{\partial \bar{p}}{\partial p}(q_0, p_0) \end{pmatrix},$$

ist **symplektisch**. Wir müssen zeigen, dass für geeignete $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k$

die $N \times N$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial \bar{q}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial p} & \dots & -\frac{\partial \bar{q}_{\bar{\alpha}_k}}{\partial p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{p}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial p} & \dots & \frac{\partial \bar{p}_{\bar{\alpha}_k}}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{q}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \bar{q}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial p_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{q}_{\bar{\alpha}_k}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \bar{q}_{\bar{\alpha}_k}}{\partial p_N} \\ \frac{\partial \bar{p}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \bar{p}_{\bar{\alpha}_1}}{\partial p_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{p}_{\bar{\alpha}_k}}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial \bar{p}_{\bar{\alpha}_k}}{\partial p_N} \end{pmatrix}_{\beta \neq \alpha_i \forall i}$$

invertierbar ist. (Denn nach dem Satz von der impliziten Funktion können wir dann lokal $p = p(q, \{\bar{q}_{\bar{\alpha}_i}\}, \{\bar{p}_{\bar{\beta}} : \bar{\beta} \neq \bar{\alpha}_i \forall i\})$ schreiben.)

- Da $A = A(q_0, p_0)$ symplektisch ist, ist

$$L := A(\{0\} \oplus \mathbb{R}^N) = \text{span} \left\{ \frac{\partial(\bar{q}, \bar{p})}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial(\bar{q}, \bar{p})}{\partial p_N} \right\} \subset \mathbb{R}_{(\bar{q}, \bar{p})}^{2N}$$

ein **Lagrange-Unterraum**, d.h. $\begin{cases} v^T \varepsilon w = 0 \quad \forall v, w \in L, \\ \dim L = N. \end{cases}$

Unsere Behauptung folgt also aus dem folgenden Lemma (mit $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\} := I$), in dem wir statt \bar{q}, \bar{p} nun q, p schreiben.

Lemma: Für jeden Lagrange-Unterraum $L \subset \mathbb{R}^{2N}$ gibt es einen Lagrange-Unterraum $(q^I, p_J) := \{q^j = 0, p_i = 0 : j \in J, i \in I\}$, $I \cup J = \{1, \dots, N\}$, $I \cap J = \emptyset$, sodass die Projektion von L auf (q_I, p_J) (d.h. $J = \{j : j \neq \bar{\alpha} \forall \bar{\alpha} \in I\}$) entlang von (q^J, p_I) **regulär** ist (d.h. $\text{Rang}(\text{Projektion}) = \dim(q^I, p_J)$).

Beweis des Lemmas. Sei $L_q = L \cap (q)$ der Schnitt von L mit

den Unterraum $(q) = \{ (q, 0) : q \in \mathbb{R}^N \} = \mathbb{R}^N \oplus \{0\}$.

Fall 1: $k = \dim L_q = 0$. Dann hat L eine reguläre Projektion auf $(p) = \{0\} \oplus \mathbb{R}^N$ (was nämlich ein Unterraum von \mathbb{R}^{2N} ist mit $(q) \oplus (p) = \mathbb{R}^{2N}$).

Fall 2: $k = \dim L_q \geq 1$. Wähle dann $I \subset \{1, \dots, N\}$ mit $|I| = k$, sodass L_q eine reguläre Projektion auf $(q^I) := \{ q \in \mathbb{R}^N : q_j = 0 \forall j \in I \}$ hat (entlang von (q^J) , $J = \{1, \dots, N\} \setminus I$).

Behauptung: L hat reguläre Projektion auf $(p_J) = \{ (q, p) \in \mathbb{R}^{2N} : q = 0, p_i = 0 \forall i \notin J \}$

entlang von $(q, p_I) := \{ (q, p) : p_j = 0 \forall j \in I \}$.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann ist

$$\dim (q, p_I) \cap L = \dim \ker \underbrace{\pi_{L, (p_J)}}_{\substack{\text{Projektion von } L \text{ entlang} \\ (q, p_I) \text{ auf } (p_J)}} = \overbrace{\dim L}^{= N} - \overbrace{\dim \text{ran } \pi_{L, (p_J)}}^{< N-k}$$

$$> k = \dim (q) \cap L.$$

Also gibt es einen Vektor $v \in (q, p_I) \cap L$, dessen p_I -Komponente nicht $= 0$ ist; sagen wir also, die p_i -Komponente ist $\neq 0$. Wir betrachten dann

$$W := (q) \cap v^\perp, \quad v^\perp = \{ v' \in \mathbb{R}^{2N} : v^T v' = 0 \}$$

("symplektischer Komplement"), $\dim v^\perp = 2N-1$.

Der Vektor $(0, \dots, \underset{q_i}{1}, \dots, 0; \underbrace{0, \dots, 0}_p) \in (q_I)$ liegt nicht in v^\perp , also $\dim W = N-1$, wohingegen $(q^J) \subset v^\perp$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dim \text{ran } \pi_{W \rightarrow (q^I)} &= \dim W - \dim \ker \pi_{W \rightarrow (q^I)} \\ &= (N-1) - \dim (W \cap (q^J)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (N-1) - \dim(v^\perp \cap (q^\perp)) \quad \left(\begin{array}{l} \text{da } W \cap (q^\perp) \\ = v^\perp \cap (q^\perp) \cap (q^\perp) \\ = v^\perp \cap (q^\perp) \end{array} \right) \\
&= (N-1) - \dim(q^\perp) \\
&= (N-1) - (N-k) \\
&= k-1.
\end{aligned}$$

Da aber $\dim \text{ran } \pi_{L_q \rightarrow (q^\perp)} = \dim(q^\perp) = k$, kann also W nicht L_q enthalten. Das ist ein Widerspruch, denn da L ein Lagrange-Unterraum ist, gilt für alle $v \in L_q = L \cap (q^\perp)$ auch $v^\top \varepsilon v' = 0 \forall v' \in L$, also $v' \in v^\perp$, und daher $v' \in W$. (D.h. es gilt $L_q \subset W$!)

- Der Beweis kann jetzt abgeschlossen werden: gegeben ein beliebiger Vektor $v \in (q^\perp, p_j)$, so gibt es $l_1 \in L$ mit (p_j) -Komponente = (p_j) -Komponente von v ; also hat $v_2 = v - \underbrace{\pi_{L, (q^\perp, p_j)}}_{\text{Projektion von } L \text{ entlang } (q^\perp, p_j) \text{ auf } (q^\perp, p_j)}(l_1)$ die (p_j) -Komponente 0.

Wähle dann $l_2 \in L_q \subset L$ mit (q^\perp) -Komponente gleich der von v_2 ;

dann hat $v_3 = v_2 - \pi_{L, (q^\perp, p_j)}(l_2)$ (q^\perp) -Komponente 0, und immer noch (p_j) -Komponente 0; also $v_3 = 0$, folglich $v = \pi_{L, (q^\perp, p_j)}(\underbrace{l_1 + l_2}_{\in L})$. \square