

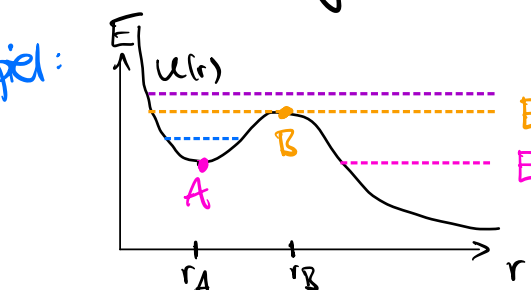
2.3. Bahntypen (im allgemeinen Fall)

Erinnerung: $\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu} (E - U(r))$ ($U = V + \frac{L^2}{2\mu r^2}$),

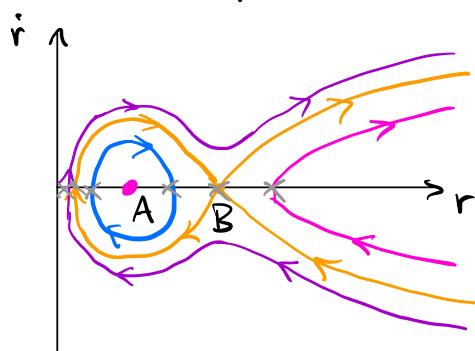
d.h. $\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r) = E$.

$\Rightarrow r(t)$ bewegt sich im effektiven Potential $U(r)$ mit Gesamtenergie E ; Bewegungsgleichung: $\mu \ddot{r} = -U'(r)$.

Beispiel:



Phasenraum (r, \dot{r}) :



- A, ——— gebundene Bahn
- B: ——— instabil
- ——— Streubahn
($r(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \pm \infty$)

("Phasenportrait")

- Die (r, \dot{r}) -Bahn verläuft bei fixierter Energie E (und Drehimpuls L) in dem Gebiet $E - U(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \geq 0$, d.h. $U(r) \leq E$.
- An den Grenzen dieses Gebiets ist $\dot{r} = 0$ (radiale Bewegung kommt zur Ruhe) — x im Phasenportrait.

Liegt an einer solchen Stelle ein Umkehrpunkt vor? Ja, falls

$$\ddot{r} = -\mu^{-1} U'(r) \neq 0. \quad (\text{Welche Punkte im Portrait sind das?})$$

- Gibt es r_0 mit $U'(r_0) = 0$ (r_A oder r_B oben), so ist $r(t) = r_0$ eine Gleichgewichtslösung.

$r(t) = r_A$: **stabil** (benachbarte Bahnen bleiben nahe A)

r_B : **instabil**.

Gebundene Bahnen.

Für gebundene Bahnen oszilliert $r(t)$ zwischen zwei Werten $r_{\min} < r_{\max}$, wobei $U(r_{\min}) = U(r_{\max}) = E$, mit Periode

$$T_r = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r))}} \quad (\text{vgl. } (**) \text{ oben}).$$

(jeder Wert zwischen r_{\min}, r_{\max} wird 2x durchlaufen)

- Der Integrand ist an den Intervallgrenzen singulär; ist aber $U'(r_{\min}) \neq 0$,

so gilt $E - U(r) \approx E - U(r_{\min}) - U'(r_{\min})(r - r_{\min}) \sim r - r_{\min}$,

also
$$\int_{r_{\min}}^{r_{\min} + \varepsilon} \frac{dr}{\sqrt{2\mu(E - U(r))}} \sim \int_{r_{\min}}^{r_{\min} + \varepsilon} \frac{dr}{\sqrt{r - r_{\min}}} = \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^\varepsilon < \infty.$$

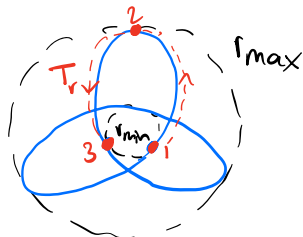
Ist auch $U'(r_{\max}) \neq 0$, so sehen wir also, dass $T_r < \infty$.

- Während einer Periode von $r(t)$ nimmt φ zu um

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}} \quad (\text{vgl. } (*) \text{ oben}).$$

$\Rightarrow (r(t), \varphi(t))$ beschreibt eine Rosettenbahn (geschlossen, falls

$N\Delta\varphi = 2\pi k$ für gewisse $N, k \in \mathbb{N}$, d.h. falls $\Delta\varphi$ rational ist):



Streubahnen Nehmen jetzt an: $U = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$.

Für jedes $E > 0$ gibt es also eine Streubahn mit $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} \infty$.

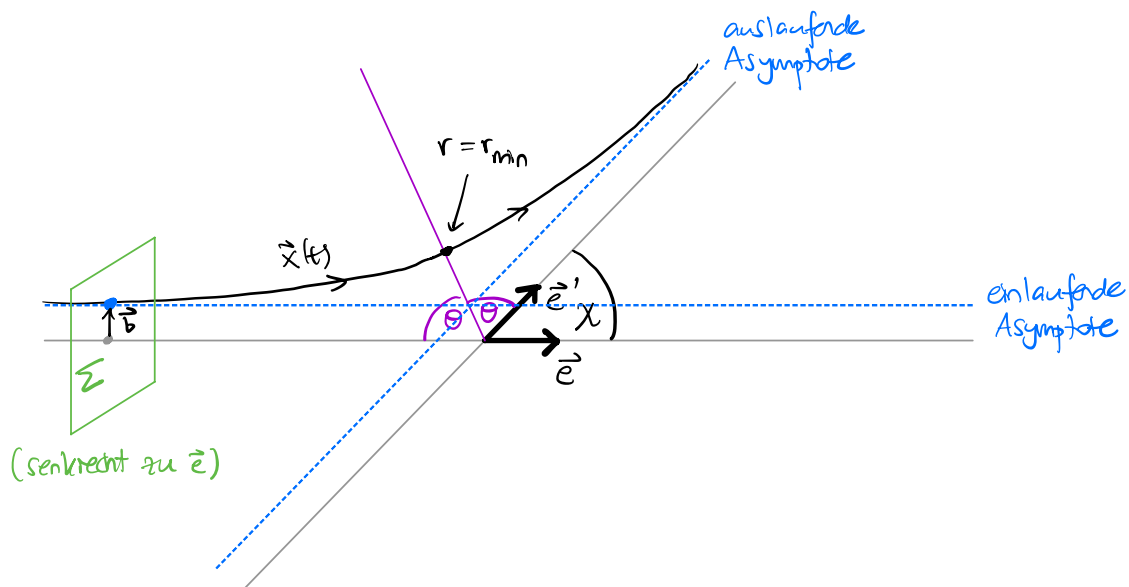
Für grosse r ist das effektive Potential U (bzw. die Kraft $-U'(r)$) vernachlässigbar, also bewegt das Teilchen sich asymptotisch auf einer Geraden mit Richtung \vec{e} ($t \ll -1$), bzw. \vec{e}' ($t \gg 1$):

$$\vec{x}(t) \simeq \begin{cases} \vec{b} + v(t-t_0)\vec{e} & , \quad t \rightarrow -\infty, \\ \vec{b}' + v(t-t_0')\vec{e}' & , \quad t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Hierbei ist $\frac{1}{2}\mu v^2 = E$, d.h. $v = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$, da für $r \rightarrow \infty$ gilt

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu \dot{r}^2}_{\frac{1}{2}\mu v^2} + \underbrace{U(r)}_0. \quad (\text{D.h. Energie ist rein kinetischer Natur, wenn } r \rightarrow \infty.)$$

Wählen t_0, t_0' so, dass $\vec{b} \cdot \vec{e} = 0 = \vec{b}' \cdot \vec{e}'$.



• Eine Streubahn $\vec{x}(t)$ ist eindeutig bestimmt durch

- Energie E
- Richtung \vec{e} der einlaufenden Asymptote
- Stossparameter \vec{b} ($\perp \vec{e}$)
- Referenzzeit t_0

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ +2 \\ +2 \\ +1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ (|\vec{e}|=1) \\ (\vec{b} \cdot \vec{e}=0) \\ \text{Freiheitsgrade} \end{array}$$

als eindeutige Lösung der Bewegungsgleichungen mit entsprechendem Verhalten $\vec{x}(t) \simeq \vec{b} + \sqrt{\frac{2E}{\mu}} (t-t_0) \vec{e}$, $t \rightarrow -\infty$.

Wir wollen die **auslaufende Asymptote** bestimmen:

(i) **Stossparameter und Drehimpuls:**

$$\vec{L} = \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \mu \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \vec{b} \times \vec{e}, \text{ also } L = |\vec{L}| = \sqrt{2E\mu} |\vec{b}|.$$

$$\Rightarrow b = |\vec{b}| = \frac{L}{\sqrt{2E\mu}}.$$

Ähnlich für $t \rightarrow +\infty \Rightarrow b' = \frac{L}{\sqrt{2E\mu}} = b$ (da L erhalten ist).

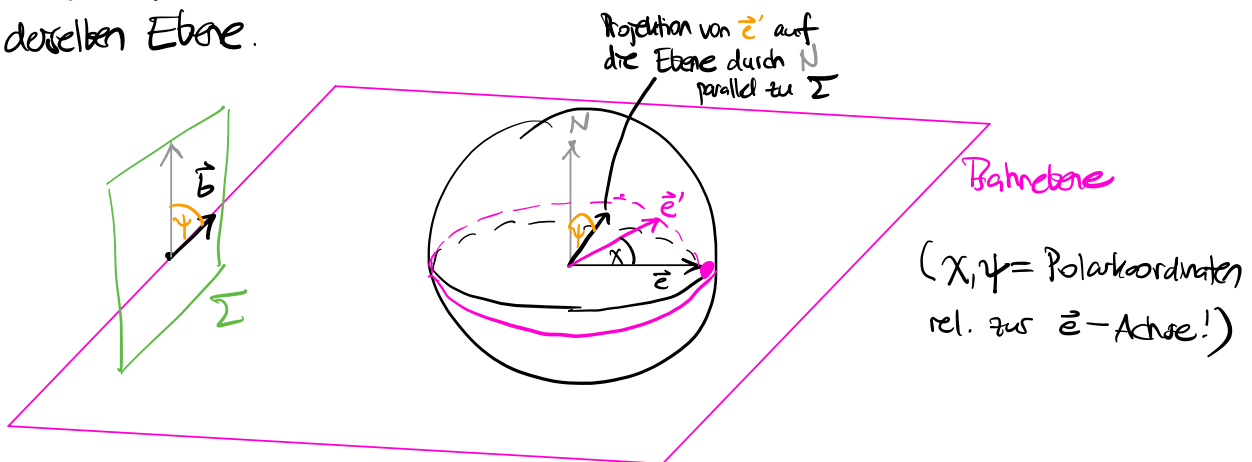
(ii) **Streuwinkel χ :** $\chi = \pi - 2\theta$, wobei $\theta = \varphi(\infty) - \varphi(r_{\min})$,

$$\text{also } \chi = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{L \, dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U(r))}} = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{b \, dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{v_{\infty}^2}{E} - \frac{b^2}{r^2}}} \quad \text{⊕}$$

\uparrow
 $L = \sqrt{2\mu E} b$
 $(U = V - \frac{L^2}{2\mu r^2})$

Hierbei ist r_{\min} der Umkehrpunkt der Streubahn, also die grösste Lösung von $U(r_{\min}) = E$ (und dadurch durch E, L und also durch E, b eindeutig bestimmt).

(iii) $\vec{x}(t)$ liegt in der Ebene, die durch \vec{b}, \vec{e} aufgespannt wird (da die einlaufende Asymptote, und daher auch $\vec{x}(t)$ selbst, invariant unter Spiegelungen an dieser Ebene sind). Also liegt auch \vec{e}' (und \vec{b}') in derselben Ebene.



Daher ist die Winkelkoordinate ψ von \vec{z}' durch \vec{b}, \vec{z} bestimmt.

- Der Streuprozess definiert also eine Abbildung

$$\Sigma \ni \vec{b} \mapsto \vec{z}' \in S^2,$$

unter welcher ein Flächenelement — in Polarkoordinaten auf Σ : $d\sigma = b db d\psi$ —

in ein Raumwinkelenelement $d\Omega = \sin \chi dx d\psi$

übergeht. Definieren dann den

differentialen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) = \left| \frac{b}{\sin \chi} \frac{db}{dx} \right| = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{dx}{db} \right|^{-1}$$

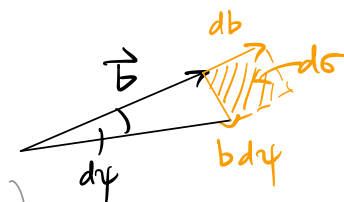
(eine Funktion vom Raumwinkel (χ, ψ) ,
die aber unabhängig von ψ ist)

(aufgewertet an dem b , für
welches der Streuwinkel gerade χ
ist)

können wir ausrechnen

(als Funktion von b bei festem χ)

mittels $\frac{dx}{db}$.



[Fläche /
Raumwinkel]

(Interpretation: Flächenelement (in Σ), von dem aus in ein bestimmtes
Raumwinkelenelement (in S^2) gestreut wird.)

• Totaler Streuquerschnitt: $\sigma_{\text{tot}} = \int_{S^2 \setminus \{\vec{z}\}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\chi) \sin \chi d\chi$$

(Interpretation: Flächeninhalt aller Stoßparameter \vec{b} , die zu einer Streuung
führen ($\chi(b) \neq 0$). Endlich nur für lokalisierte Potentiale
($V(r) = 0$ für $r \geq R$).

- In Experimenten: homogene Stromdichte j = Teilchenzahl pro Flächen- und
Zeiteinheit, bei fixiertem \vec{z}, E .

$\Rightarrow j \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ = Zahl der Stöße pro Zeiteinheit mit auslaufender Asymptoten-
Richtung im Raumwinkelenelement $d\Omega$