

2.2. Das Keplerproblem

Spezialfall: $V(r) = -\frac{G m_1 m_2}{r}$ (2 Punktmassen m_1, m_2 im gegenseitigen Gravitationsfeld).

Erinnerung: $\mu \ddot{\vec{x}} = -G M \mu \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{x}} = -GM \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \quad \text{— hängt nur von } g = GM \text{ ab!}$$

Skalieren μ aus L, E heraus

$$\leadsto \ell := \frac{L}{\mu}, \quad e = \frac{E}{\mu}.$$

\Rightarrow effektives Potential ist

$$U = V + \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{GM\mu}{r} = \mu \left(\frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{g}{r} \right),$$

also

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu(E-U)}} = \pm \frac{\ell}{r^2 \sqrt{2e + \frac{2g}{r} - \frac{\ell^2}{r^2}}}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = \arccos \left(\frac{\frac{\ell^2}{gr} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2e\ell^2}{g^2}}} \right).$$

Auflösen nach r :

$$\textcircled{*} \quad r(\varphi) = \frac{\ell^2/g}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2e\ell^2}{g^2}} \text{ Exzentrizität.}$$

Bemerkungen: (i) $r(\varphi)$ ist 2π -periodisch in φ ($\Delta\varphi = 2\pi$)

\Rightarrow alle Bahnen sind geschlossen!

(ii) Perihel (r minimal) für $\varphi = 0$.

Behauptung: die Bahn $(r(\varphi), \varphi)$ ist...

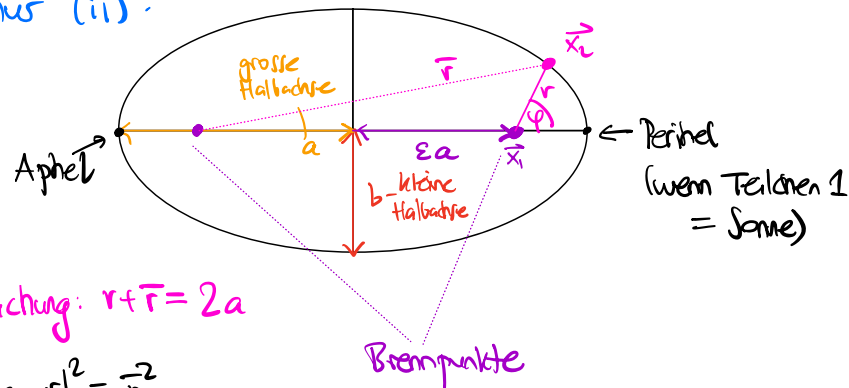
(i) $\varepsilon = 0$: Kreis (klar: $r = \text{const.}$)

(ii) $\varepsilon \in (0, 1)$: Ellipse

(iii) $\varepsilon = 1$: Parabel

(iv) $\varepsilon > 1$: Hyperbel

Überprüfen nur (ii):



Ellipsengleichung: $r + \bar{r} = 2a$

$$\text{Also } (2a - r)^2 = \bar{r}^2$$

$$= (2\varepsilon a + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

$$= 4\varepsilon^2 a^2 + 4\varepsilon a r \cos \varphi + r^2$$

$$\Rightarrow 4ar(1 + \varepsilon \cos \varphi) = 4a^2(1 - \varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \text{⊗} \quad \text{für } \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2el^2}{g^2}}$$

$$\text{grosse Halbachse } a = \frac{l^2/g}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\text{kleine Halbachse: } 2\sqrt{b^2 + (\varepsilon a)^2} = 2a$$

$$\Rightarrow b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

⇒ Erstes Keplersches Gesetz: Planetenbahnen beschreiben Ellipsen mit einem der beiden Brennpunkte in der Sonne. (Von Kepler abgeleitet von Beobachtungen von Tycho Brahe für den Mars, $\varepsilon = 0.0935$.)

• Können mittels des zweiten Keplerschen Gesetzes die Umlaufperiode geometrisch bestimmen:

$$\text{Area(Ellipse)} = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

2. Keplersches Gesetz $\Rightarrow T \cdot \frac{L}{2\mu} = \frac{Tl}{2}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\ell} = \frac{2\pi a^{3/2}}{g^{1/2}}.$$

\uparrow
 $1-e^2 = \frac{\ell^2}{ag}$

Haben $g = GM = G(m_1 + m_2) \approx Gm_1$ für $m_2 \ll m_1$ (Planet ist viel leichter als die Sonne), also $T^2 : a^3 = \frac{4\pi^2}{g} \approx \text{konstant}$ für alle Planeten.

\Rightarrow Drittes Keplersches Gesetz: $T^2 : a^3$ ist für alle Planeten gleich.

Zeitlicher Verlauf der Ellipsenbahn.

• Naheliegender Ansatz: in $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{r^2}$, verwende $r = r(\varphi) = \frac{\ell^2/g}{1+e \cos \varphi}$ von \otimes
 $\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{g^2(1+e \cos \varphi)^2}{\ell^3}$. Lösung hat keine einfache Form...

• Was besser funktioniert: andere Parametrisierung der Bahn, und zwar durch die **exzentrische Anomalie ξ** :

(i) Zusammenhang zwischen ξ und φ .

$$a \cos \xi = a e + r \cos \varphi.$$

$$\Rightarrow e a \cos \xi = a e^2 + r e \cos \varphi$$

$$= a e^2 + r(1+e \cos \varphi) - r$$

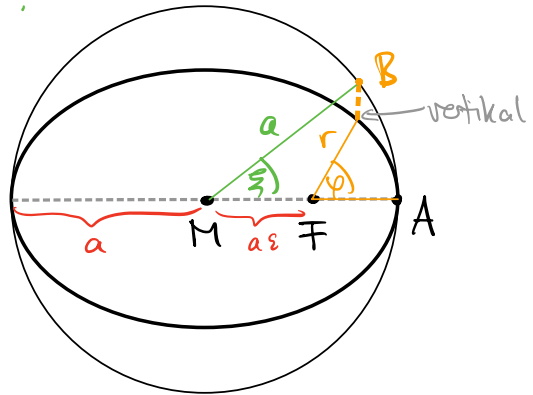
$$= a e^2 + \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \varphi} (1+e \cos \varphi) - r$$

$$= a - r$$

$$\Rightarrow r = a(1 - e \cos \xi) \quad (\text{Bahnkurve, parametrisiert durch } \xi) \quad (1)$$

$$\Rightarrow (1 - e \cos \xi)(1 + e \cos \varphi) = 1 - e^2 \quad \otimes \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\cos \xi - e}{1 - e \cos \xi}$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos \xi} \sin \xi.$$



(ii) Differentialgleichung für $\xi(t)$. $\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{d\varphi} \dot{\varphi}$. Was ist $\frac{d\xi}{d\varphi}$?

\leadsto Ableiten von \oplus (mit $\xi = \xi(\varphi)$) nach φ ergibt

$$\varepsilon \sin \xi \cdot \frac{d\xi}{d\varphi} \cdot (1 + \varepsilon \cos \varphi) - (1 - \varepsilon \cos \xi) \varepsilon \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\xi}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sin \xi} \frac{1 - \varepsilon \cos \xi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

Erhalten also

$$\dot{\xi} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \frac{g^2 (1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{l^3} \stackrel{\substack{\uparrow \\ l = \sqrt{a g (1 - \varepsilon^2)}}}{=} \frac{g^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon \cos \varphi)}{a^{\frac{3}{2}} (1 - \varepsilon^2)} = \frac{g^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}}{1 - \varepsilon \cos \xi}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\xi} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}} (1 - \varepsilon \cos \xi)$$

$$\Rightarrow t(\xi) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}} (\xi - \varepsilon \sin \xi). \quad (2)$$

Wir können also t als Funktion von ξ ausdrücken. (Die Umkehrfunktion $\xi(t)$ kann nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.)

Bemerkung. (i) Gleichungen (1) und (2) heißen **Kepler-Gleichungen**.

(ii) $t(2\pi) = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}} = \text{Periode}$ — konsistent mit voriger Berechnung von T .