

3. Schwingungsprobleme

Wie wir bereits in § 2.5 gesehen haben, treten Schwingungen häufig auf bei der Beschreibung mechanischer Systeme, wenn man kleine Störungen um Gleichgewichtslagen betrachtet. Schwingungen werden im einfachsten (und daher wichtigsten) Fall durch lineare Bewegungsgleichungen beschrieben.

3.1. Lineare Bewegungsgleichungen: allgemeine Theorie

Allgemeine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung für $\vec{z} = \vec{z}(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{\vec{z}}(t) = A(t)\vec{z}(t) + \vec{b}(t), \quad \textcircled{*}$$

wobei $A(t)$ = reelle $n \times n$ - Matrix (d.h. lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$)
 $\vec{b}(t) \in \mathbb{R}^n$.

Bemerkungen. (i) Komplex-wertige Lösungen sind häufig nützlich; ist $\vec{z}(t)$ eine solche, so lösen auch $\operatorname{Re} \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1(t) \\ \vdots \\ \operatorname{Re} z_n(t) \end{pmatrix}$,
 $\operatorname{Im} \vec{z}(t)$ die Gleichung $\textcircled{*}$.

(ii) Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung, wie sie häufig in der Mechanik auftreten, können in ein System $\textcircled{*}$ transformiert werden.

Beispiel. (i) -dimensionaler Oszillator mit Reibung und Antriebskraft:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F(t). \text{ Setzen}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta = \frac{r}{2m} \quad (\text{Einheit: } \frac{1}{\text{zeit}} = \text{Frequenz}), \quad \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x}/\alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{z}} = A\vec{z} + \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r}{\sqrt{km}} \end{pmatrix}$$

(iii) Spezialfall $\ddot{x} = -x$

$$\Rightarrow \vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \text{ erfüllt } \dot{\vec{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{z}.$$

Lösungen von $\dot{\vec{z}}(t) = A(t)\vec{z}(t)$ (d.h. $\vec{b} = 0$ in $\textcircled{*}$) heißen **freie Schwingungen**. Die Menge aller Lösungen ist ein **n-dimensionaler**

Vektorraum: **n Dimensionen**, da $\vec{z}(t)$ eindeutig bestimmt ist durch die Wahl einer Anfangsbedingung $\vec{z}(s) \in \mathbb{R}^n$ zu einer beliebigen aber festen Zeit $s \in \mathbb{R}$ (z.B. $s=0$); **Vektorraum** wegen des Superpositionsprinzips.

(i) Propagator: $P(t,s) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die lineare Abbildung, für die gilt:

$$\begin{cases} P(s,s) \vec{z}_0 = \vec{z}_0 & \forall s \in \mathbb{R}, \vec{z}_0 \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial}{\partial t} P(t,s) \vec{z} = A(t) P(t,s) \vec{z}. \end{cases}$$

Das heisst: $\vec{z}(t) := P(t,s) \vec{z}_0$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \vec{z}(s) = \vec{z}_0 \\ \dot{\vec{z}}(t) = A(t) \vec{z}(t). \end{cases}$$

In Matrix-Schreibweise: $\begin{cases} P(s,s) = I_{n \times n} \\ \frac{\partial}{\partial t} P(t,s) = A(t) P(t,s). \end{cases} \quad \textcircled{\#}$

Es gilt $P(t,r)P(r,s) = P(t,s)$.

• Die Gleichungen \oplus sind äquivalent zu der Integralgleichung

$$\begin{aligned} P(t,s) &= P(s,s) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial t_1} P(t_1,s) dt_1 \\ &= I + \int_s^t A(t_1) P(t_1,s) dt_1. \end{aligned}$$

Diese können wir durch eine Reihe lösen,

$$P(t,s) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \cdots \int_s^{t_{k-1}} dt_k A(t_1) A(t_2) \cdots A(t_k),$$

welche für geeignete $A(t)$ (z.B.: beschränkt auf dem Intervall $[s,t]$) konvergiert.

(2) Spezialfall: autonome Systeme ($A(t) = A$ hängt nicht von t ab),
d.h. $\dot{\vec{z}}(t) = A\vec{z}(t)$. Also gilt $P(t-t_0, s-t_0) = P(t,s) \forall t_0, t, s$,
und daher $P(t,s) = P(t-s) := P(t-s, 0)$.

Für $P(t) = P(t, 0)$ gilt:

$$\begin{cases} P(0) = I_{n \times n} \\ \frac{d}{dt} P(t) = AP(t) \end{cases} \quad \oplus$$

und auch $P(t+s) = P(t)P(s)$. Die eindeutige Lösung von \oplus ist
das **Matrix-Exponential** $P(t) = \exp(tA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots$

(2.1) Beispiel: $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$ (von oben, mit $F \equiv 0$)

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad \vec{\dot{z}} = A\vec{z}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}. \text{ Berechnen}$$

$$(A + \beta I_2)^2 = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}^2 = -\omega_0^2 I_2, \quad \omega_0^2 = \alpha^2 - \beta^2, \text{ also}$$

$$P(t) = \exp(tA) = \exp(-t\beta) \exp(t(A + \beta I_2))$$

(gerade und ungerade Exponentialreihen) $\Rightarrow \exp(-t\beta) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} (-\omega_0^2)^k}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} (-\omega_0^2)^k}{(2k+1)!} t(A+\beta I_2) \right)$

(unter der Annahme $\omega_0 \neq 0$) $\Rightarrow \exp(-t\beta) \left(\cos(t\omega_0) I + \frac{\sin(t\omega_0)}{\omega_0} (A+\beta I) \right)$

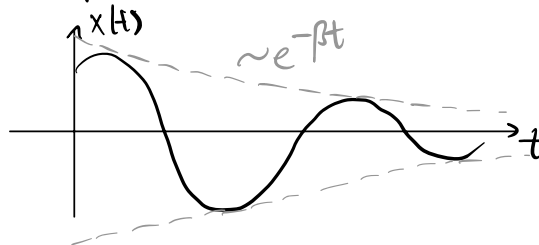
$$= e^{-\beta t} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) + \frac{\beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) & \frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ -\frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) - \frac{\beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

Es gilt $\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t)/\alpha \end{pmatrix} = \exp(tA) \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0)/\alpha \end{pmatrix}$, also

$$x(t) = x(0) e^{-\beta t} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{\beta}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) + \dot{x}(0) e^{-\beta t} \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$(\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}).$$

- Fall 1: $\alpha > \beta \Rightarrow \omega_0$ ist reell. Die Federkraft dominiert: das System schwingt (gedämpft)



- Fall 2: $\alpha < \beta \Rightarrow \omega_0 = i\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ ist imaginär; $|\omega_0| < \beta$.
(Dämpfungsfall) Haben $\begin{cases} \cos(\omega_0 t) = \cosh(|\omega_0| t) \\ \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} = \frac{\sinh(|\omega_0| t)}{|\omega_0|} \end{cases}$,

also $x(t) = x(0) e^{-\beta t} \left(\cosh(\omega_0 t) + \beta \frac{\sinh(\omega_0 t)}{\omega_0} \right) + \dot{x}(0) e^{-\beta t} \frac{\sinh(\omega_0 t)}{\omega_0}$.

Die Reibung dominiert: keine Schwingungen, sondern exponentieller Abfall der Amplitude ($x(t) \sim e^{-\beta t} e^{|\omega_0| t} = e^{-(\beta - |\omega_0|) t}$).

- Fall 3: $\alpha = \beta$ $A + \beta I$ ist nilpotent: $(A + \beta I)^2 = 0$; also (kritisch gedämpfter Fall)

$$P(t) = \exp(tA) = e^{-\beta t} \exp(t(A + \beta I)) = e^{-\beta t} (I + t(A + \beta I))$$

$$\Rightarrow x(t) = x(0) e^{-\beta t} (1 + \beta t) + \dot{x}(0) e^{-\beta t} t.$$

Bei vorgegebenem α kommt das System bei kritischer Dämpfung am schnellsten zum Stillstand: exponentielle Abfallrate β vs. β -Wort im Fall 2.

(2.2) Eigenschwingungen. Um $\dot{\vec{z}}(t) = A\vec{z}(t)$ (autonomer Fall!) zu lösen, kann man die Eigenschwingungen verwenden. Dies sind Lösungen der speziellen Form $\vec{z}(t) = \vec{a} e^{\lambda t}$, $\vec{a} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$; einsetzen führt zum Eigenwertproblem

$$A\vec{a} = \lambda\vec{a}. \quad \left(\begin{array}{l} \vec{a}: \text{Eigenvektor} \\ \lambda: \text{Eigenwert} \end{array} \right)$$

• Falls die Eigenvektoren von A den gesamten Vektorraum \mathbb{C}^n aufspannen, ist jede Lösung von $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$ eine Superposition von Eigenschwingungen: $\vec{z}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \vec{a}_k e^{\lambda_k t}$ (für geeignete $c_k \in \mathbb{C}$).

Man nennt A diagonalisierbar: in der Basis $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ von \mathbb{C}^n , die aus den Eigenvektoren von A besteht, ist A diagonal,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \text{Spektrum von } A: \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Ohne Wahl einer Basis können wir schreiben

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda, \quad \text{wobei } P_\lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ die}$$

Eigenprojektion zum Eigenwert λ ist: $P_\lambda \vec{a} = \begin{cases} \vec{a}, & \text{falls } A\vec{a} = \lambda\vec{a} \\ 0, & \text{falls } A\vec{a} = \mu\vec{a}, \mu \neq \lambda. \end{cases}$

Haben dann $P_\lambda P_\mu = \delta_{\lambda\mu} P_\lambda$, $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I$, und

$$\exp(tA) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} P_\lambda \Rightarrow \vec{z}(t) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} P_\lambda \vec{z}(0).$$

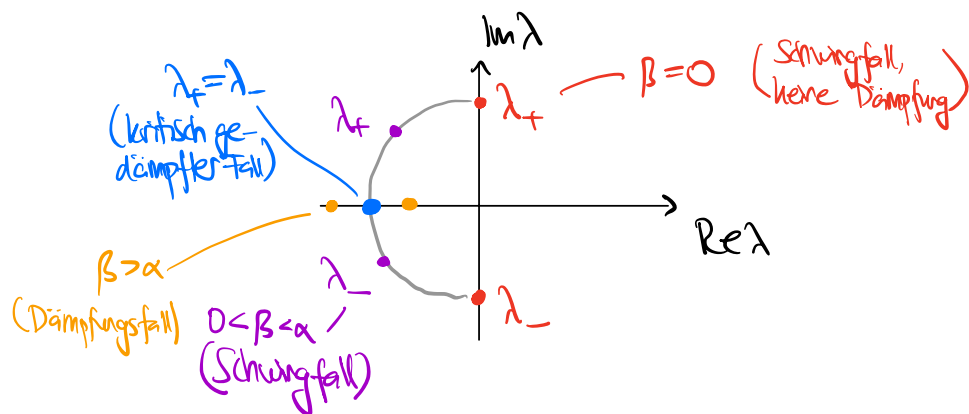
• Beispiel von oben: $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & -2\beta \end{pmatrix}$ hat

$$\text{Eigenwerte } \lambda_{\pm} = -\beta \pm i\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

Eigenvektoren $\vec{a}_{\pm} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix}$. (Linear unabhängig, also eine Basis von \mathbb{C}^2 , falls $\alpha \neq \beta$.)

\Rightarrow freie Schwingungen sind $\vec{z}(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} \vec{a}_+ + c_- e^{\lambda_- t} \vec{a}_-$;

Bestimmung der Koeffizienten c_+, c_- durch Anfangsbedingungen $\vec{z}(0)$ (d.h. $x(0), \dot{x}(0)$); bekommen wieder die Lösungen von oben.



(3) Stabilität, etc. Das System $\dot{\vec{z}}(t) = A(t)\vec{z}(t)$ heisst

• stabil, falls alle Lösungen beschränkt bleiben für alle $t \geq 0$.

Ist $A(t) = A$ diagonalisierbar, ist das äquivalent zu der Bedingung $\text{Re } \lambda \leq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

• **dissipativ**, falls eine positiv definite quadratische Form $\mathbb{R}^n \ni \vec{z} \mapsto (\vec{z}, \vec{z})$ existiert, sodass

$$\frac{d}{dt} (\vec{z}(t), \vec{z}(t)) \leq 0$$

für jede Lösung gilt. Insbesondere ist das System dann stabil, da $(\vec{z}(t), \vec{z}(t)) \leq (\vec{z}(0), \vec{z}(0)) \quad \forall t \geq 0$ beschränkt ist.

Beispiel: $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$; setzen $\vec{z} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ und

$(\vec{z}, \vec{z}) = \frac{1}{2} (m\dot{x}^2 + kx^2)$ (Gesamtenergie). Dann gilt

$$\frac{d}{dt} (\vec{z}(t), \vec{z}(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} (m\dot{x}(t)^2 + kx(t)^2) \right)$$

$$= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}$$

$$= (-kx\dot{x} - r\dot{x}^2) + kx\dot{x}$$

$$= -r\dot{x}^2 \leq 0.$$

(4) Erzwungene Schwingungen.

Behauptung: Die Lösung des inhomogenen Systems $\dot{\vec{z}}(t) = A(t)\vec{z}(t) + \vec{b}(t)$ ist

$$\vec{z}(t) = P(t, s) \vec{z}(s) + \int_s^t P(t, t') \vec{b}(t') dt'.$$

(Duhamel-Formel.)

Beweis: Nenne die rechte Seite $\vec{w}(t)$. Dann ist

$$\cdot \vec{w}(s) = P(s, s) \vec{z}(s) = \vec{z}(s)$$

$$\begin{aligned} \cdot \dot{\vec{w}}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} P(t, s) \vec{z}(s) + P(t, t) \vec{b}(t) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial t} P(t, t') \vec{b}(t') dt' \\ &= A(t) P(t, s) \vec{z}(s) + \vec{b}(t) + \int_s^t A(t) P(t, t') \vec{b}(t') dt' \end{aligned}$$

$$= A(t) \vec{w}(t) + \vec{b}(t).$$

Also erfüllt \vec{w} dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung wie \vec{z} (inkl. Anfangsbedingung), und daher ist $\vec{z}(t) = \vec{w}(t) \quad \forall t$. —

Für **autonome Systeme** ist die Formel einfacher:

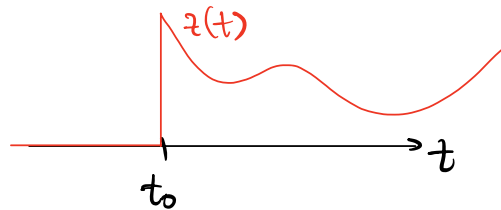
$$\vec{z}(t) = e^{tA} \vec{z}(0) + \int_0^t e^{t'A} \vec{b}(t') dt'.$$

(4.1) **Stoßanregung.** $\vec{b}(t) = \delta(t-t_0) \vec{b}_0$, $\vec{z}(t) = 0$ für $t < t_0$.

$$\Rightarrow \vec{z}(t) = \int_{t_0}^t P(t, t') \vec{b}(t') dt' = \begin{cases} P(t, t_0) \vec{b}_0, & t > t_0 \\ \vec{0}, & t < t_0 \end{cases}$$

$$= \Theta(t-t_0) P(t, t_0) \vec{b}_0.$$

($\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ Heavide-Funktion, oder Stufenfunktion.)



(4.2) **Harmonische Anregung.** Betrachten ein autonomes System

$$\dot{\vec{z}}(t) = A \vec{z}(t) + \vec{b}(t), \text{ wobei } \vec{b}(t) = e^{i\omega t} \vec{b}_0, \omega \in \mathbb{R}, \vec{b}_0 \in \mathbb{C}^n.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{z}(t) &= e^{At} \vec{z}(0) + \int_0^t e^{A(t-t')} e^{i\omega t'} \vec{b}_0 dt' \\ &= e^{At} \left[\vec{z}(0) + \int_0^t e^{(i\omega I_n - A)t'} \vec{b}_0 dt' \right]. \end{aligned}$$

Nehmen jetzt an, dass A diagonalisierbar ist.

Fall 1 (generisch): $i\omega \notin \sigma(A)$.

$$\Rightarrow \vec{z}(t) = e^{At} \left[\vec{z}(0) + (i\omega I - A)^{-1} (e^{(i\omega I - A)t} - I) \vec{b}_0 \right]$$

$$= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} \left[P_{\lambda} \vec{z}_0 + \frac{e^{(i\omega - \lambda)t} - 1}{i\omega - \lambda} P_{\lambda} \vec{b}_0 \right]$$

$$= \sum_{\lambda \in \sigma(A)} e^{\lambda t} P_{\lambda} \vec{z}_0 + \frac{e^{i\omega t} - e^{\lambda t}}{i\omega - \lambda} P_{\lambda} \vec{b}_0.$$

Ist $\operatorname{Re} \lambda < 0 \forall \lambda \in \sigma(A)$, so ist also

$$\vec{z}(t) \approx e^{i\omega t} (i\omega I_n - A)^{-1} \vec{b}_0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty:$$

Schwingung mit Anregungsfrequenz

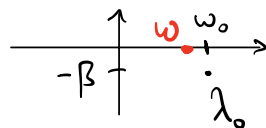
Fall 2: $i\omega \in \sigma(A)$. Direkt von der Lösungsformel ist

$$P_{i\omega} \vec{z}(t) = e^{i\omega t} (P_{i\omega} \vec{z}(0) + t P_{i\omega} \vec{b}_0): \text{Schwingung mit}$$

Frequenz ω , deren Amplitude linear mit t anwächst.

"Fall 3": $i\omega \approx \lambda_0$ für einen Eigenwert $\lambda_0 \in \sigma(A)$: "Resonanz".

Schreiben $\lambda_0 = i\omega_0 - \beta$ mit $\beta, \omega_0 \in \mathbb{R}$.
 Eigenfrequenz Dämpfungsparameter



$$\text{Im Ausdruck } (i\omega I - A)^{-1} = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{P_{\lambda}}{i\omega - \lambda} \approx \frac{P_{\lambda_0}}{i\omega - \lambda_0} \text{ dominiert}$$

der Term mit $\lambda = \lambda_0$; die erzwungene Schwingung ist

$$\vec{z}(t) \approx \frac{e^{i\omega t}}{i\omega - \lambda_0} P_{\lambda_0} \vec{b}_0 = r e^{i(\omega t + \delta)} P_{\lambda_0} \vec{b}_0,$$

wobei $r e^{i\delta} = \frac{1}{i\omega - \lambda_0}$, also

$$r = \frac{1}{\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \beta^2}} \quad (\text{Suszeptibilität}),$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{\omega_0 - \omega}{\beta}\right) \quad (\text{Phase}).$$

Resonanz manifestiert sich als Maximum der Suszeptibilität bei ω_0 und einer Phasendifferenz von π beim Passieren der Antriebsfrequenz ω_0 . Breite der Resonanz $\sim \beta$ (Dämpfung).

