

### 1.3. Erhaltungssätze

Betrachten ein mechanisches System  $\vec{x}_k, m_k, k=1, \dots, N$ , mit Bewegungsgleichungen  $m_k \ddot{\vec{x}}_k = \vec{F}_k$ .

#### Globale Größen:

• Gesamtmasse:  $M = \sum_{k=1}^N m_k$

Schwerpunkt:  $\vec{X} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{M} \vec{x}_k$

Gesamtimpuls:  $M \frac{d}{dt} \vec{X} = \vec{P} \quad \left( = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{x}}_k = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k \right)$

• Berechnen  $\frac{d}{dt} \vec{P} = M \ddot{\vec{X}} = \vec{F} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$ .

D.h. der Schwerpunkt verhält sich wie ein Teilchen der Masse  $M$ , auf welches die Kraft  $\vec{F}$  wirkt.

- In einem isolierten System ist die resultierende Kraft  $\vec{F} = \vec{0}$   
 $\Rightarrow \dot{\vec{P}} = 0$ , d.h. der Gesamtimpuls ist erhalten.

(z.B. gilt dies für Systeme, in denen nur Zweikörperkräfte wirken:

ist  $\vec{F}_k = \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ki}$ , so gilt

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_k = \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ki} = \sum_{i < k} \underbrace{(\vec{F}_{ki} + \vec{F}_{ik})}_{=\vec{0} \text{ (actio=reactio)}} = \vec{0}. \quad \otimes$$

Werden in Kürze eine allgemeinere Aussage treffen. —)

• Gesamtdrehimpuls:  $\vec{L} = \sum_{k=1}^N \vec{x}_k \times \vec{p}_k$

Resultierendes Drehmoment:  $\vec{M} = \sum_{k=1}^N \vec{x}_k \times \vec{F}_k$ .

• Drehimpulssatz:  $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$ . (Beweis:  $\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum \dot{\vec{x}}_k \times \vec{p}_k + \sum \vec{x}_k \times \dot{\vec{p}}_k$   
 $= \underbrace{\sum \dot{\vec{x}}_k \times m_k \dot{\vec{x}}_k}_{=0} + \sum \vec{x}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}.$ )

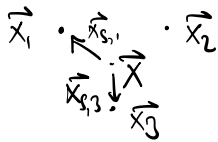
• Kinetische Energie:  $T = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k |\dot{\vec{x}}_k|^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2m_k} |\vec{p}_k|^2$

Resultierende Leistung:  $P = \sum_{k=1}^N \dot{\vec{x}}_k \cdot \vec{F}_k$

• Energiesatz:  $\frac{d}{dt} T = P$ .

• Man kann im Schwerpunktsystem arbeiten:

$$\vec{x}_{S,k} := \vec{x}_k - \vec{X} \Rightarrow \vec{p}_{S,k} = m_k \dot{\vec{x}}_{S,k} = m_k \dot{\vec{x}}_k - m_k \dot{\vec{X}} = \vec{p}_k - \frac{m_k}{M} \vec{P}.$$



kinetische Energie aufgrund  
von Bewegung relativ zum Schwerpunkt

Dann gilt z.B.  $T = \underbrace{\frac{1}{2M} |\vec{P}|^2}_{\text{kinetische Energie durch die Schwerpunkts-Bewegung}} + \underbrace{T_S}_{\text{kinetische Energie aufgrund von Bewegung relativ zum Schwerpunkt}}, \quad T_S = \sum \frac{1}{2m_k} |\vec{p}_{S,k}|^2.$

(Besonders nützlich in isolierten Systemen, da dann das Schwerpunktsystem inertial ist!)

## • Erhaltungssätze.

Wir nehmen nun an, dass die Kräfte von einem Potential

$$V = V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \quad \text{kommen:} \quad \vec{F}_k = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V.$$

Behauptung: (i)  $\vec{F} = \vec{0}$  (resultierende Kraft verschwindet)

(Dies verallgemeinert  $\otimes$  oben.)

(ii)  $\vec{M} = \vec{0}$  (resultierendes Drehmoment verschwindet)

(iii)  $P = -\frac{dV}{dt}$  (resultierende Leistung verringert das Potential)

Beweis: (i)  $\vec{F} = -\sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$

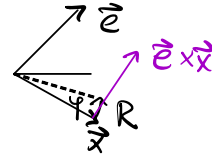
$$\begin{aligned} &= -\frac{\partial}{\partial \vec{b}} V(\vec{x}_1 + \vec{b}, \dots, \vec{x}_N + \vec{b}) \Big|_{\vec{b}=\vec{0}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{b}} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \Big|_{\vec{b}=\vec{0}} \end{aligned}$$

↳ Folgerung aus dem Relativitätsprinzip

$$= \vec{0}.$$

(ii) Sei  $\vec{e} \in \mathbb{R}^3$  ein Einheitsvektor,  $R(\varphi \vec{e}) =$  Drehung um  $\vec{e}$  um Winkel  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Dann

$$\frac{d}{d\varphi} (R(\varphi \vec{e}) \vec{x}) \Big|_{\varphi=0} = \vec{e} \times \vec{x}.$$



Berechnen also

$$\vec{e} \cdot \vec{M} = \sum_{k=1}^N \vec{e} \cdot (\vec{x}_k \times \vec{F}_k) = \sum (\vec{e} \times \vec{x}_k) \cdot \vec{F}_k$$

$$= - \sum \frac{d}{d\varphi} (R(\varphi \vec{e}) \vec{x}_k) \Big|_{\varphi=0} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

$$= - \frac{d}{d\varphi} V(R(\varphi \vec{e}) \vec{x}_1, \dots, R(\varphi \vec{e}) \vec{x}_N) \Big|_{\varphi=0}$$

$$= - \frac{d}{d\varphi} V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N) \Big|_{\varphi=0}$$

$$= \vec{0}.$$

Da  $\vec{e}$  beliebig war, gilt also  $\vec{M} = \vec{0}$ .

$$(iii) \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} V(\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t))$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \vec{x}_k} V \cdot \dot{\vec{x}}_k(t) = - \sum \vec{F}_k \cdot \dot{\vec{x}}_k = -P. \quad \text{---}$$

Zusammenfassend: haben 10 Erhaltungsgrößen ("Integrale der Bewegung")

• 3 Impulsintegrale  $\vec{P} = (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3)$

(da  $\vec{P} = \vec{F} = \vec{0}$ )

• 3 Drehimpulsintegrale  $\vec{L} = (\vec{L}_1, \vec{L}_2, \vec{L}_3)$

(da  $\dot{\vec{L}} = \vec{M} = \vec{0}$ )

• 3 Schwerpunktintegrale  $M\vec{X} - \vec{P}t$

(da  $\frac{d}{dt} (M\vec{X} - \vec{P}t) = M\dot{\vec{X}} - \vec{P} = \vec{0}$ )

• 1 Energieintegral  $E = T + V$

(da  $\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} T + \frac{d}{dt} V = P + (-P) = 0$ ).

Der Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig geradlinig:

$$M\vec{X}(t) - \vec{P}t = M\vec{X}(0) - \vec{P} \cdot 0 \Rightarrow \vec{X}(t) = \vec{X}(0) + \frac{\vec{P}}{M}t. (\Rightarrow \ddot{\vec{X}} = \vec{0}),$$