

Satz 1. Setze $A := \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & +1 & \\ 0 & & +1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $n \geq 1$. Ist $B = B^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$

eine weitere Matrix mit der Eigenschaft, dass

$$x \in \mathbb{R}^{n+1}, x^T A x = 0 \text{ stets } x^T B x = 0 \text{ impliziert,}$$

so gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $B = \alpha A$.

Bemerkung. Invarianten und allgemeiner: es seien q_1, q_2 zwei quadratische Formen auf einem Vektorraum V mit $\dim V \geq 2$. Angenommen, q_1 hat Signatur (n_1, n_2) mit $n_1, n_2 \geq 1$. Falls

$$x \in V, q_1(x) = 0 \text{ stets } q_2(x) = 0 \text{ impliziert,}$$

so gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $q_2 = \alpha q_1$ (d.h. $q_2(x) = \alpha q_1(x) \forall x \in V$).

(Satz 1 ist ein Spezialfall mit $n_1 = n-1, n_2 = 1$.)

Beweis von Satz 1.

(1) Behauptung: $v^T B w = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } v^T A v = 0$
und $w \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ mit } v^T A w = 0$ (also " $w \in v^\perp_A$ ")

Beweis. Wir werden zeigen:

⊗ Es gibt eine Kurve $v(s) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$v(0) = v, \quad v'(0) = w, \quad v(s)^T A v(s) = 0 \quad \forall s.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann folgt } 0 &= \frac{d}{ds} \Big|_0 (v(s)^T B v(s)) = v^T B w + w^T B v \\ &= 2 v^T B w \quad (\text{da } B \text{ symmetrisch ist}), \text{ wie gewünscht.} \end{aligned}$$

(Übrigens folgt aus $v(s)^T A v(s) = 0$ durch Ableiten an $s=0$:

$$v(0)^T A v'(0) = 0, \text{ also } v'(0) \perp_A v(0) = v.$$

Geometrisch bedeutet das: der Tangentialraum zum Lichtkegel L am Punkt $v \neq 0$ ist $T_v L = v^\perp_A$. Lorentzsche Geometrie

das A -orthogonale
Komplement von v .

Ist etwas gewöhnungsbedürftig, so ist ja auch $v \in v \perp A \dots$)

Um \ast zu zeigen, genügt es, den Fall $v \neq 0$ zu betrachten, und dann nach räumlicher Rotation $(v^0, \vec{v}) \mapsto (v^0, R\vec{v})$ ($R \in SO(n)$, $R\vec{v} \in \text{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

und Raumzeit-Skalierung $(v^0, \vec{v}) \mapsto (1, \vec{v}/v^0)$

den Fall $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. (Rotation und Skalierung erhalten die Eigenschaft $v^T A v = 0$; also ist $v = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $-1+x^2=0$, also $x = \pm 1$, und wir können $x = +1$ nach ggf. nötiger Raumspiegelung annehmen.)

Es gilt $v^T A w = 0 \Leftrightarrow w = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ für $c_0, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Man kann dann nehmen

$$v(s) = \begin{pmatrix} 1 + s c_0 \\ ((1 + s c_0)^2 - \sum_{j=2}^n c_j^2 s^2)^{1/2} \\ s c_2 \\ \vdots \\ s c_n \end{pmatrix}.$$

(2) Schreiben jetzt

$$B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0n} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Behauptung: $b_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \mu, \nu$ mit $\mu \neq \nu$,

$$b_{jj} = -b_{00} \quad \forall j \geq 1.$$

Beweis. (i) Es gilt $(e_0 + e_j)^T A (e_0 + e_j) = 0 \quad \forall j \geq 1$, also

$$0 = (e_0 + e_j)^T B (e_0 + e_j) = b_{00} + 2b_{0j} + b_{jj}.$$

Dasselbe mit $e_0 - e_j$ ergibt $b_{00} - 2b_{0j} + b_{jj} = 0$.

Also ist $b_{0j} = 0$ und $b_{jj} = -b_{00}$.

(ii) Betrachten $\mu, \nu \geq 1, \mu \neq \nu$, und werden $b_{\mu\nu}$ und $b_{\mu 0}$ in

Beziehung setzen. Für $v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} 0 \\ v \end{matrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (mit $v^T A v = 0$)

hat $Bv = \begin{pmatrix} b_{00} + b_{0v} \\ b_{10} + b_{1v} \\ \vdots \\ b_{n0} + b_{nv} \end{pmatrix}$ verschwindendes Skalarprodukt mit

$w = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \mu$, da $v^T A w = 0$ (dies benutzt $\mu \neq v$) und (1);

$$\text{also } 0 = w^T B v = b_{\mu 0} + b_{\mu v} = b_{\mu v}.$$

\parallel
0 nach (i)

(3) Also ist $B = \alpha A$ mit $\alpha = -b_{00}$. □

Satz 2. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die affin parametrisierte Geraden auf affin parametrisierte Geraden abbildet (d.h. $\forall x_0, v \in \mathbb{R}^n \exists y_0, w \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x_0 + sv) = y_0 + sw$). Dann $\exists A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x) = Ax + b$. (Insbesondere gilt $f(x) = Ax$, falls $f(0) = 0$.)

Bemerkung. Die Annahme an f ist das, was wir für eine Koordinatentransformation zwischen zwei Inertialsystemen verlangen: f bildet gleichförmig geradlinige Bewegungen $s \mapsto x_0 + sv$ auf gleichförmig geradlinige Bewegungen $s \mapsto y_0 + sw$ ab.

Beweis. Die Abbildung $\tilde{f}(x) := f(x) - f(0)$ erfüllt dieselben Annahmen, und zusätzlich $\tilde{f}(0) = 0$. Ersetzen wir f durch \tilde{f} , so dürfen wir also annehmen:

$$f(0) = 0.$$

• Dann gilt: $\forall v \exists w$ mit $f(sv) = sw$ für alle s ; $s=1$ gibt $w = f(v)$, also

$$f(sv) = sf(w). \quad \otimes$$

• Weiterhin ist $f(\underbrace{sv + (1-s)w}) =$ Gerade durch $f(w)$ und $f(v)$
 $= w + s(v-w) : \text{Gerade} = y_0 + sw_0,$
 durch w und v

wobei y_0, w_0 bestimmt sind durch : $s=0 \Rightarrow f(w) = y_0$
 $s=1 \Rightarrow f(v) = y_0 + w_0$

$$\Rightarrow f(sv + (1-s)w) = sf(w) + (1-s)f(v) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\stackrel{\otimes}{=} f(sv) + f((1-s)w).$$

Für $v=2x, w=2y, s=\frac{1}{2}$ heisst das

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \quad \otimes \otimes$$

• \otimes & $\otimes \otimes \Rightarrow f$ ist linear, also gegeben durch $f(x) = Ax$ für eine geeignete Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. □