

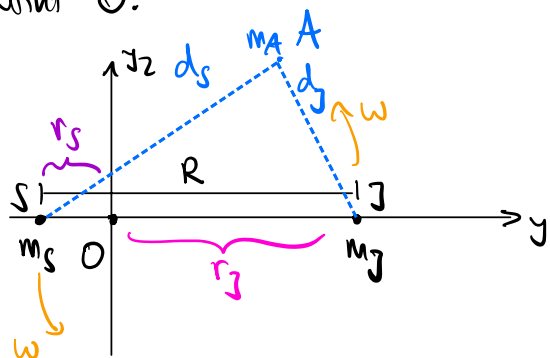
## 2.5. Ein einfaches Dreikörperproblem

Das allgemeine Dreikörperproblem ist nicht integrabel; daher beschränken wir uns hier auf eine Beschreibung von Spezialfällen;

Sonne S, Jupiter J, Asteroid A.

### Gleichgewichtslagen im Sonne-Jupiter-System

- Nehmen (näherungsweise) an: S und J bewegen sich
  - in der  $y_1$ - $y_2$ -Ebene,
  - auf Kreisbahnen mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihren Schwerpunkt O.



- In ihrem Gravitationsfeld bewegt sich ein kleiner Asteroid der Masse  $m_A$ , dessen Gravitationskraft auf S, J wir vernachlässigen.
- Im mitrotierenden Schwerpunktsystem:

$$r_S = |SO| = \frac{m_J}{m_J + m_S} R, \quad \vec{y}_S = (-r_S, 0, 0);$$

$$r_J = |JO| = \frac{m_S}{m_J + m_S} R, \quad \vec{y}_J = (r_J, 0, 0);$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

- Gleichgewicht von Gravitations- und Zentrifugalkraft im Schwerpunktsystem:

$$\frac{G m_S m_J}{R^2} = \mu \omega^2 R = \frac{m_S m_J}{m_S + m_J} R \omega^2 \Leftrightarrow G(m_S + m_J) = R^3 \omega^2 \quad (\otimes)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Dies ist bekannt: } g = R^3 \omega^2 = R^3 \dot{\varphi}^2 \\ \quad \quad \quad = R^{-1} \ell^2, \\ \text{d.h. } R = \ell^2 / g. \end{array} \right)$$

- Bewegungsgleichung für A: Masse  $m_A$  fällt heraus; Beschleunigungen von A sind infolge der

- Gravitationskraft:  $\vec{a}_G = -\frac{G m_S}{d_S^3} \begin{pmatrix} y_1 + r_S \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \frac{G m_J}{d_J^3} \begin{pmatrix} y_1 - r_J \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

- Zentrifugalkraft:  $\vec{a}_Z = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{y}) = \omega^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Corioliskraft:  $\vec{a}_C = -2\vec{\omega} \times \dot{\vec{y}} = 2\omega \begin{pmatrix} -\dot{y}_2 \\ \dot{y}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = \vec{a}_G + \vec{a}_Z + \vec{a}_C.$$

- Suchen Gleichgewichtslagen: konstante Lösungen  $\vec{y}(t) = \vec{y}$ .

Notwendigerweise  $y_3 = 0$  (ansonsten wäre  $\ddot{y}_3 \neq 0$ , vgl.  $\vec{a}_G$ ).

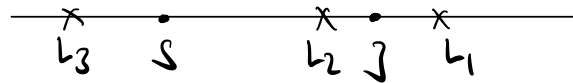
Benutzen  $(\otimes)$ , also  $\omega^2 = \frac{G(m_S + m_J)}{R^3}$ , und erhalten

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{m_S}{d_S^3} + \frac{m_J}{d_J^3} - \frac{m_S + m_J}{R^3} \right) y_1 + \left( \frac{m_S r_S}{d_S^3} - \frac{m_J r_J}{d_J^3} \right) = 0 \quad (\otimes) \\ \left( \frac{m_S}{d_S^3} + \frac{m_J}{d_J^3} - \frac{m_S + m_J}{R^3} \right) y_2 = 0 \quad (\otimes \otimes) \end{array} \right.$$

2 Möglichkeiten (durch Betrachtung von  $(\otimes \otimes)$ ):

(1)  $y_2 = 0$  (Eulerscher Spezialfall): A liegt auf der S-J-Achse.

$\Rightarrow$  3 Gleichgewichtslagen (Lösungen  $y_i$  von  $\otimes$ ).



Werden diese nicht weiter betrachten. (Sie sind instabil.)

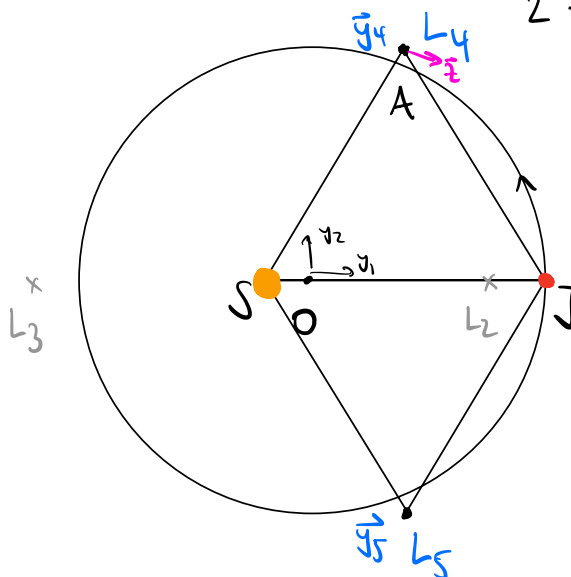
(2) Lagrangescher Spezialfall:  $\frac{m_S}{d_S^3} + \frac{m_J}{d_J^3} = \frac{m_S + m_J}{R^3}$ .

Gleichung  $\otimes$  ergibt dann

$$\frac{m_S r_S}{d_S^3} = \frac{m_J r_J}{d_J^3} \quad (m_S r_S = m_J r_J) \quad \Rightarrow \quad d_S = d_J = R$$

$\Rightarrow$  SJA ist ein gleichseitiges Dreieck:

2 weitere Gleichgewichtslagen



$$\vec{y}_4 = \begin{pmatrix} -r_S + \frac{R}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_5 = \begin{pmatrix} -r_S + \frac{R}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}R \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Lagrangepunkte  $L_4, L_5$ )

### Stabilität der Lagrangepunkte $L_4, L_5$ .

- Betrachten (im mitrotierenden  $\vec{y}$ -System) kleine Auslenkungen  $\vec{z}$  von A um  $L_4$  herum (siehe oben): entwickeln die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{y}} = \vec{a}_A + \vec{a}_z + \vec{a}_C,$$

mit  $\vec{y}(t) = \vec{y}_4 + \vec{z}(t)$ , um  $\vec{z} = 0$  und betrachten nur Terme

linearer Ordnung in  $\vec{z}$ .

• Nur die Schwerkraft ist nicht-linear in  $\vec{y}$ ; da

$$\frac{1}{|\vec{v}+\vec{z}|^3} = \frac{1}{|\vec{v}|^3} - \frac{3\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{z})}{|\vec{v}|^5} + O(|\vec{z}|^2),$$

berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\vec{y}-\vec{y}_S}{|\vec{y}-\vec{y}_S|^3} &= \frac{\vec{y}_4+\vec{z}-\vec{y}_S}{|\vec{y}_4+\vec{z}-\vec{y}_S|^3} \\ &= \frac{\vec{y}_4-\vec{y}_S}{|\vec{y}_4-\vec{y}_S|^3} + \frac{\vec{z}}{|\vec{y}_4-\vec{y}_S|^3} - 3 \frac{\vec{y}_4-\vec{y}_S}{|\vec{y}_4-\vec{y}_S|^5} (\vec{y}_4-\vec{y}_S)\cdot\vec{z} + O(|\vec{z}|^2) \\ &= \frac{\vec{y}_4-\vec{y}_S}{R^3} + \frac{\vec{z}}{R^3} - \frac{3}{R^5} \begin{pmatrix} R/2 \\ \sqrt{3}R/2 \\ 0 \end{pmatrix} \left( \frac{R}{2} z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} R z_2 \right) + O(|\vec{z}|^2) \\ &= \frac{1}{R^3} \left( \vec{y}_4-\vec{y}_S + \vec{z} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} (z_1 + \sqrt{3} z_2) \right) + O(|\vec{z}|^2). \end{aligned}$$

Ähnlich für  $\vec{y}_J$ :  $\frac{\vec{y}-\vec{y}_J}{|\vec{y}-\vec{y}_J|^3} \approx \frac{1}{R^3} \left( \vec{y}_4-\vec{y}_J + \vec{z} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} (-z_1 + \sqrt{3} z_2) \right)$ .

• **Summieren alle Beschleunigungen**; konstante Terme (ohne  $\vec{z}$ ) heben sich auf (da  $\vec{z}=\vec{0}$  eine Gleichgewichtslage ist). Lineare Ordnung:

$$(1) \quad \ddot{\vec{z}}_1 = -\frac{Gm_S}{R^3} \left( z_1 - \frac{3}{4} z_1 - \frac{3\sqrt{3}}{4} z_2 \right) - \frac{Gm_J}{R^3} \left( z_1 - \frac{3}{4} z_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} z_2 \right) + \omega^2 z_1 + 2\omega \dot{z}_2$$

$$\frac{G}{R^3} = \frac{\omega^2}{m_S+m_J} \Rightarrow \frac{3}{4} \omega^2 z_1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \alpha \omega^2 z_2 + 2\omega \dot{z}_2, \quad \alpha := \frac{m_S-m_J}{m_S+m_J};$$

$$(2) \quad \ddot{\vec{z}}_2 = -\frac{Gm_S}{R^3} \left( z_2 - \frac{9}{4} z_2 - \frac{3\sqrt{3}}{4} z_1 \right) - \frac{Gm_J}{R^3} \left( z_2 - \frac{9}{4} z_2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} z_1 \right) + \omega^2 z_2 - 2\omega \dot{z}_1$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} \alpha \omega^2 z_1 + \frac{9}{4} \omega^2 z_2 - 2\omega \dot{z}_1$$

$$(3) \quad \ddot{z}_3 = -\omega^2 z_3$$

• Gleichung (3) ist entkoppelt von (1) und (2), und daher einfach zu lösen:  $z_3 = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ .

• Zur Lösung von (1)-(2) machen wir den Ansatz

$$z_j(t) = a_j e^{i\lambda \omega t} \quad (j=1,2), \quad \lambda \in \mathbb{C}, a_j \in \mathbb{C}. \quad (\#)$$

( $\operatorname{Re} z_j, \operatorname{Im} z_j$  sind dann reelle Lösungen von (1)-(2).)

Einsetzen ergibt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 + \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} \alpha + 2i\lambda \\ \frac{3\sqrt{3}}{4} \alpha - 2i\lambda & \lambda^2 + \frac{9}{4} \end{pmatrix}}_{M(\lambda)} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\otimes)$$

Damit dieses lineare Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung  $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  besitzt, muss die Determinante von  $M(\lambda)$  verschwinden. Nach kurzer Rechnung ergibt dies die Bedingung

$$\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{27 m_S m_J}{(m_S + m_J)^2}\right). \quad (\oplus)$$

• Fall 1:  $\frac{27 m_S m_J}{(m_S + m_J)^2} < 1 \quad (\Leftrightarrow \frac{m_J}{m_S + m_J} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.0385).$

$\Rightarrow \exists$  4 reelle Lösungen  $\pm \lambda_1, \pm \lambda_2$  (mit entsprechenden Lösungen  $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix}$  von  $(\otimes)$ ). Die allgemeine Lösung von

(1)-(2) ist eine Linearkombination der Eigenschwingungen  $(\#)$ , also beschränkt für alle Zeit.

Das suggeriert **Stabilität**. (Ein rigoroser Beweis von Stabilität erfordert eine Kontrolle auch der nichtlinearen Terme in  $\vec{z}$ .)

**Beispiel:**  $m_J \approx 10^{-3} m_S \Rightarrow$  **Fall 1** trifft ein. In L4 und L5 gibt es tatsächlich viele Asteroiden.

• **Fall 2:**  $\frac{27 m_S m_J}{(m_S + m_J)^2} > 1$ . Wieder gibt es 4 Lösungen  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2$ ,  
mit  $\text{Im } \lambda_j < 0$ ; also wächst  $e^{i\lambda_j \omega t} \sim e^{(-\text{Im } \lambda_j) \omega t}$  exponentiell  
schnell mit der Zeit an.  $\Rightarrow$  **Instabilität**.