

5.4. Prinzip der stationären Wirkung

Wir zeigen jetzt, dass sich auch die Gesetze der klassischen Mechanik (mit konservativen Kräften) als Euler-Lagrange-Gleichungen für ein geeignetes Funktional ergeben.

- Betrachten zunächst 1 Teilchen $\vec{x}(t)$,
Masse m ,
im Potential $V(\vec{x})$.

Definieren die **Lagrange-Funktion**

$$L := T - V, \quad T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 \\ V = V(\vec{x}).$$

Also ist $L = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$. Für eine beliebige Bahn $\vec{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$,
(egal, ob sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen erfüllt oder nicht)
definieren wir die **Wirkung von $\vec{x}(t)$** als

$$S[\vec{x}] := \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) dt.$$

Die **Euler-Lagrange-Gleichungen** von S sind also

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = 0. \quad (*)$$

Haben $\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}}$, also ist $(*)$ dasselbe
wie $m \ddot{\vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}$.

- Dieselbe Argumentation funktioniert auch für N Teilchen, mit konservativer Kraft auf Teilchen i gleich $-\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$. Hier ist also

$$L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_N) = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

- So wert, so schön — der zentrale Punkt ist nun, dass die Dynamik sehr viel allgemeiner Systeme auf diese Art durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden kann:

Prinzip der stationären Wirkung (Hamiltonsches Prinzip): für ein System mit verallgemeinerten Ortskoordinaten $q^\alpha(t) \in \mathbb{R}$ ($\alpha = 1, \dots, N$)
also normale Ortskoordinaten, oder Winkel, oder...

und Geschwindigkeiten $\dot{q}^\alpha(t)$,

mit kinetischer Energie $T = T(t, q^1, \dots, q^N, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^N)$

und potentieller Energie $V = V(t, q^1, \dots, q^N)$

erfüllt $\vec{q}(t) = (q^1(t), \dots, q^N(t))$ die Bewegungsgleichungen (mit fixierten Anfangs- und Endbedingungen $\vec{q}(t_0), \vec{q}(t_1)$) genau dann, wenn

$$S[\vec{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt \quad (L = T - V)$$

extremal ist, d.h.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} \quad (\alpha = 1, \dots, N).$$

Wir werden dies in recht allgemeinen Fällen verifizieren. Ein wichtiger Punkt ist, dass die Bewegungsgleichungen von Systemen mit Zwangsbedingungen so sehr einfach hergeleitet werden können.