

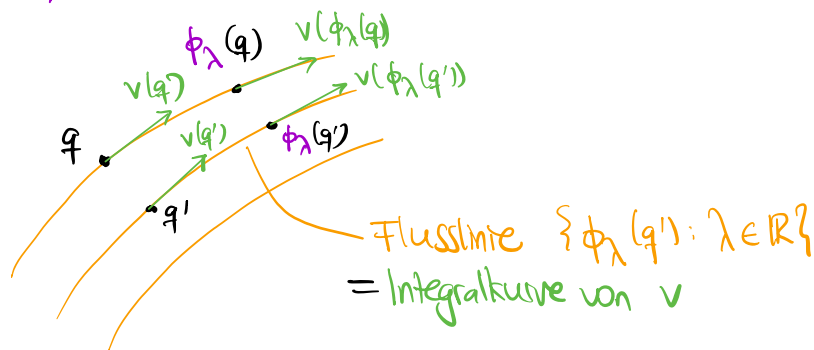
5.7. Noether-Theorem

Die Erhaltungsgrößen in § 5.6 kann man als Spezialfälle des Noether-Theorems erhalten, welches kontinuierlichen Symmetrien der Lagrange-Funktion Erhaltungsgrößen zuordnet.

Flüsse und Vektorfelder. Wir nehmen (der Einfachheit halber) an, dass der Konfigurationsraum $\{q^1, \dots, q^N\}$ ganz \mathbb{R}^N ist.

Ein Fluss ist eine Schar von Abbildungen $\phi_\lambda: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ sodass

- (i) $\phi_0(q) = q \quad \forall q$
 - (ii) $\phi_{\lambda+\mu}(q) = \phi_\lambda(\phi_\mu(q)) \quad \forall \lambda, \mu.$
- } Gruppeneigenschaft.



Zu jedem Fluss gibt es ein erzeugendes Vektorfeld

$$v(q) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_\lambda(q) \Big|_{\lambda=0} \in \mathbb{R}^N.$$

In Komponenten: $\phi_\lambda(q^1, \dots, q^N) = (\phi_\lambda^1(q^1, \dots, q^N), \dots, \phi_\lambda^N(q^1, \dots, q^N))$,

$$\begin{aligned} v(q^1, \dots, q^N) &= (v^1(q^1, \dots, q^N), \dots, v^N(q^1, \dots, q^N)) \\ &= \left(\frac{\partial \phi_\lambda^1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}, \dots, \frac{\partial \phi_\lambda^N}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \right). \end{aligned}$$

Es gilt dann auch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_\lambda(q) \Big|_{\lambda=\lambda_0} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \phi_{\lambda_0+\varepsilon}(q) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \phi_\varepsilon(\phi_{\lambda_0}(q)) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= v(\phi_{\lambda_0}(q)).
\end{aligned}$$

Umgekehrt können wir also auch einem Vektorfeld $v: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ einen Fluss $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ zuordnen via $\phi_\lambda(q) = q(\lambda)$, wobei $q(0) = q$ und $\frac{dq}{d\lambda}(\lambda) = v(q(\lambda))$. (D.h. $q(\lambda)$ ist eine Integralkurve des Vektorfeldes v mit Anfangsbedingung $q(0)$.)

Kontinuierliche Symmetrien. Ein Fluss $\{\phi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ ist eine kontinuierliche Symmetrie einer Lagrange-Funktion $L(t, q, \dot{q})$, falls

$$\forall \text{ Kurven } q(t), \forall \lambda: L(t, \phi_\lambda(q(t)), \frac{\partial}{\partial t} \phi_\lambda(q(t))) = L(t, q(t), \dot{q}(t)).$$

Noethersches Theorem Ist $\{\phi_\lambda\}$ eine kontinuierliche Symmetrie von $L(t, q, \dot{q})$ mit erzeugendem Vektorfeld v , so ist

$$p \cdot v(q) := \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha v^\alpha(q) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} v^\alpha(q)$$

erhalten (d.h. $\frac{d}{dt}(p \cdot v(q)) = 0$, wenn $q(t)$ die Euler-Lagrange-Gleichungen löst).

Beweis. $\frac{d}{dt}(p \cdot v(q)) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) v^\alpha(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} v^\alpha(q)$

$$= \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_\lambda^\alpha(q) \Big|_{\lambda=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial t} \phi_\lambda^\alpha(q(t)) \Big|_{\lambda=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\lambda} L(t, \phi^\lambda(q(t)), \frac{\partial}{\partial t} \phi^\lambda(q(t))) \Big|_{\lambda=0} \\
&\stackrel{\substack{\{\phi^\lambda\} \text{ ist kont.} \\ \text{Symmetrie}}}{=} \frac{d}{d\lambda} \underbrace{L(t, q(t), \dot{q}(t))}_{\text{unabhängig von } \lambda} \Big|_{\lambda=0} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Beispiele. (1) Nochmals zyklische Koordinaten. Ist q^α eine zyklische

Koordinate von $L = L(t, q, \dot{q})$, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0$, so ist

$$\phi_\lambda^\beta(q) = q^\beta + \lambda \delta_\alpha^\beta \quad (\text{d.h. } \phi_\lambda(q) = (q^1, \dots, q^\alpha + \lambda, \dots, q^N))$$

eine kontinuierliche Symmetrie mit erzeugendem Vektorfeld

$$v^\beta(q) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_\lambda^\beta(q) = \delta_\alpha^\beta.$$

Noether \Rightarrow Erhaltungsgrösse $p \cdot v(q) = \sum_{\beta=1}^N p_\beta \delta_\alpha^\beta = p_\alpha = \text{konj. Impuls.}$

(2) Drehimpuls. Ist $L = L(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{x}}_j^2 - V(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

invariant unter Drehungen $\phi_\psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (R_{\vec{e}}(\psi) \vec{x}_1, \dots, R_{\vec{e}}(\psi) \vec{x}_n)$

(\vec{e} = Rotationsachse), mit erzeugendem Vektorfeld

$$v(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \left(\frac{\partial}{\partial \psi} R_{\vec{e}}(\psi) \vec{x}_j \Big|_{\psi=0} \right)_{j=1, \dots, n} = (\vec{e} \times \vec{x}_1, \dots, \vec{e} \times \vec{x}_n),$$

so gibt Noether die Erhaltungsgrösse

$$L_{\vec{e}} := \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_j} \cdot \vec{v}_j = \sum_{j=1}^n \vec{p}_j \cdot (\vec{e} \times \vec{x}_j) = \vec{e} \cdot \vec{L} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Drehimpuls in} \\ \vec{e}\text{-Richtung} \end{array} \right),$$

wobei $\vec{L} = \sum_{j=1}^n \vec{x}_j \times \vec{p}_j$ (Drehimpuls).

(3) Gesamtimpuls. Ist, für $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{b}|=1$,

$$L(t, \vec{x}_1 + \lambda \vec{b}, \dots, \vec{x}_n + \lambda \vec{b}, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n) = L(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

so gibt Noether (mit $\phi_\lambda(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (\vec{x}_1 + \lambda \vec{b}, \dots, \vec{x}_n + \lambda \vec{b})$, also
 $v = (\vec{b}, \dots, \vec{b})$)

die Erhaltungsgrösse $\vec{P}_{\vec{b}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_j} v_j = \sum_{j=1}^n \vec{p}_j \cdot \vec{b} = \vec{P} \cdot \vec{b}$ (Impuls in \vec{b} -Richtung)
 wobei $\vec{P} := \sum_{j=1}^n \vec{p}_j$ (Gesamtimpuls)

Im Falle von isolierten mechanischen Systemen mit Kraftgesetz $m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$
 bekommen wir also von Noether die Erhaltungsgrössen \vec{L} , \vec{P} . Um
 $M\vec{X} - \vec{P}t$ zu bekommen, müssen wir eine Verallgemeinerung betrachten.

5.7.1. Äquivalente Lagrange-Funktionen

Beobachtung: Die Bewegungsgleichungen haben wir als stationäre Punkte der
 Wirkung $S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L \, dt$ erhalten. Für eine kontinuierliche Symmetrie
 sollte es also ausreichen, zu fordern: $S[\phi_\lambda(q)] = S[q] \, \forall \lambda$.

Dies gilt, wenn

$$\begin{aligned} L_\lambda(t, q, \dot{q}) &:= L(t, \phi_\lambda(q), \frac{d}{dt} \phi_\lambda(q)) \\ &= L(t, q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} K_\lambda(t, q). \end{aligned}$$

"Kompensator"

(D.h. L_λ ist äquivalent zu L .) Denn dann gilt:

$$\begin{aligned} S[\phi_\lambda(q)] &= \int_{t_0}^{t_1} L_\lambda(t, q, \dot{q}) \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dK_\lambda}{dt}(t, q) \, dt \end{aligned}$$

$$= S[q] + \underbrace{K_\lambda(t, q)}_{\substack{\text{Hängt nur von den (fixierten!) \\ \text{Randbedingungen von } q \text{ ab.}}}} \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

\Rightarrow Ist q ein stationärer Punkt von S , so auch $\phi_\lambda(q)$.

Behauptung: $F(t, q, \dot{q}) := \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} v^\alpha - K(q, t)$ ist erhalten; $K := \frac{\partial K_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} v^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{dv^\alpha}{dt} \right) - \frac{dK}{dt} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \left(v^\alpha \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} + \frac{dv^\alpha}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{dK}{dt} \\ &= \frac{d}{d\lambda} L(t, \phi_\lambda(q), \frac{d}{dt} \phi_\lambda(q)) \Big|_{\lambda=0} - \frac{dK}{dt} \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(L(t, q, \dot{q}) + \frac{d}{dt} K_\lambda(t, q) \right) \Big|_{\lambda=0} - \frac{dK}{dt} \\ &= 0 \quad (\text{per Definition von } K). \end{aligned}$$

Beispiel: $\phi_\lambda(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (t, \vec{x}_1 + \lambda t \vec{v}_1, \dots, \vec{x}_n + \lambda t \vec{v}_n)$. (Spezielle Galilei-Transformation.)
 $\Rightarrow v(t, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = (\vec{v}t, \dots, \vec{v}t)$.

Betrachten $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

$$L_\lambda(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{x}}_i + \lambda \vec{v})^2 - \underbrace{V(\vec{x}_1 + \lambda t \vec{v}_1, \dots, \vec{x}_n + \lambda t \vec{v}_n)}_{= V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)}$$

$$= L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) + \sum_{i=1}^n m_i \left[\lambda (\dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \lambda^2 \vec{v}^2 t \right]$$

$$= L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) + \frac{dK_\lambda}{dt}$$

$$\text{für } K_\lambda(t, \vec{x}) = \sum_{i=1}^n m_i \left[\lambda (\vec{x}_i \cdot \vec{v}) + \frac{1}{2} \lambda^2 \vec{v}^2 t \right].$$

Noether gibt die Erhaltungsgrösse (mittels $K = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} \Big|_{\lambda=0} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \right) \cdot \vec{v}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{x}}_i} v_i - K &= \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{v} t - \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v} \\ &= \left(\underbrace{\vec{P}}_{\text{Gesamtimpuls}} t - \underbrace{\vec{X}}_{\text{Schwerpunkt}} \right) \cdot \vec{v} \quad (\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{X} - \vec{P}t$ ist erhalten. (Schwerpunktsintegral.)

Bemerkung. Man kann auch allgemeinere Transformationen betrachten, die auch die Zeit transformieren, und dann eine weitere Verallgemeinerung des Noether-Theorems erhalten. Da die Hauptanwendung die Erhaltung der Gesamtenergie ist, werden wir das nicht im Detail behandeln.