

6.6. Hamilton-Jacobi-Gleichung.

Wir betrachten ein autonomes System, d.h. die Hamilton-Funktion

$$H = H(q, p) \quad (q, p) \in \mathbb{R}^{2N},$$

hängt nicht explizit von der Zeit ab.

- **Ziel:** möchten eine kanonische Transformation $(\bar{q}(q, p), \bar{p}(q, p))$ finden, sodass $H = \bar{p}_N$ eine der neuen Impulskoordinaten ist.

Dann sind die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten

$$\begin{cases} \dot{\bar{q}}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_\alpha} = \delta_N^\alpha \\ \dot{\bar{p}}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}^\alpha} \end{cases}$$

mit Lösung
$$\begin{cases} \bar{q}^\alpha(t) = \bar{q}^\alpha(0) + \delta_N^\alpha t \\ \bar{p}_\alpha(t) = \bar{p}_\alpha(0) \end{cases}$$

- **Strategie:** wir suchen eine erzeugende Funktion $S(q, \bar{p})$ der gewünschten kanonischen Transformation $(q, \frac{\partial S}{\partial q}) \mapsto (\frac{\partial S}{\partial \bar{p}}, \bar{p})$. Setzen wir die gewünschte Relation $H = \bar{p}_N$ ein, so erhalten wir die

zeitunabhängige Jacobi-Gleichung: $H(q^1, \dots, q^N, \frac{\partial S}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q^N}) = \bar{p}_N. \quad (*)$

(Nichtlineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für S , mit parametrischer Abhängigkeit von $\bar{p}_N = \text{Gesamtenergie } E$.)

Bemerkung. Die Argumente $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{N-1}$ von S spielen keine Rolle in $(*)$.

Allerdings wollen wir sicherstellen, dass wir $\bar{q} = \frac{\partial S}{\partial \bar{p}}(q, \bar{p})$ nach

q auflösen können, d.h. $q = q(\bar{q}, \bar{p})$, und damit dann auch

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \bar{p}) = \frac{\partial S}{\partial q}(q(\bar{q}, \bar{p}), \bar{p}).$$

(D.h. wir müssen in der Lage sein, die kanonische Transformation

$$(\bar{q}, \bar{p}) \rightarrow (q, p) \text{ zu bestimmen.})$$

Wir brauchen also eine Schar $\{S(q, \bar{p})\}_{(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}}$ von Lösungen, sodass

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \bar{p}_\alpha \partial q^\beta} \right) \neq 0.$$

Wir nennen ein solches S eine **vollständige Lösung**.

Wie erhalten wir die Lösung der Bewegungsgleichungen in den ursprünglichen Koordinaten? Gegeben eine **vollständige Lösung** $S(q, \bar{p})$.

(i) Die **Anfangsbedingungen** bestimmen $\bar{q}^\beta(0), \bar{p}_\alpha(0)$.

($\bar{q}^\beta, \beta = 1, \dots, N-1$, und $\bar{p}_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$, sind erhalten.)

(ii) Die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{p}_\beta}(q, \bar{p}_1(0), \dots, \bar{p}_N(0)) = \bar{q}^\beta(0) \quad (\beta = 1, \dots, N-1)$$

beschreibt (für jedes β) eine Hyperfläche Σ_β im **Konfigurationsraum** (q) . Der Schnitt $\bigcap_{\beta=0}^{N-1} \Sigma_\beta = \mathcal{C}$ ist eine Kurve (da der Konfigurationsraum N -dimensional ist).

(iii) Die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{p}_N}(q, \bar{p}) = \bar{q}^N(0) + t$$

schliesslich bestimmt den zeitlichen Verlauf der Bahnkurve.

Beispiel. Teilchen $x \in \mathbb{R}$ mit Masse m im Potential $V = V(x)$.

Hamilton-Funktion: $H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(x)$

Hamilton-Jacobi-Gleichung für $S(x)$:

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = \bar{p}_1 = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m} (S')^2 + V(x) = E$$

$$\Rightarrow S(x, E) = \int^x \sqrt{2m(E - V(x'))} dx'$$

Bahn: $\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const.} + t$, d.h. $\int_{x_0}^x \frac{m}{\sqrt{2m(E - V(x'))}} dx' = t - t_0$.

(Das bestimmt $x = x(t)$ mit Anfangsort $x(t_0) = x_0$ und Gesamtenergie E .)

6.6.1. Das ebene Zentralkraftproblem.

- Polarkoordinaten r, φ ; Potential $V(r)$.

Hamiltonfunktion $H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r)$.

- **Hamilton-Jacobi-Gleichung** für $S = S(r, \varphi)$

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right) = \bar{p}_2 =: E \quad (\text{Gesamtenergie})$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 = 2m r^2 (E - V(r)) - r^2 \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2.$$

Können dies mit **Separationsansatz** lösen:

$$S(r, \varphi) = S_\varphi(\varphi) + S_r(r).$$

Einsetzen führt auf

$$\underbrace{(S'_\varphi(\varphi))^2}_{\text{unabhängig von } r} = \underbrace{2m r^2 (E - V(r)) - r^2 (S'_r(r))^2}_{\text{unabhängig von } \varphi} \Rightarrow \bar{p}_1^2 = L^2 \quad (\text{Separationskonstante})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S'_\varphi(\varphi) = \bar{p}_1 \\ S'_r(r) = \sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}} \end{cases} \Rightarrow S_\varphi(\varphi) = L\varphi$$
$$S_r(r) = \int^r \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{L^2}{r'^2}} dr'.$$

Die **Bahn** $\varphi(r)$ und ihre **zeitliche Abhängigkeit** $t(r)$ ergeben sich

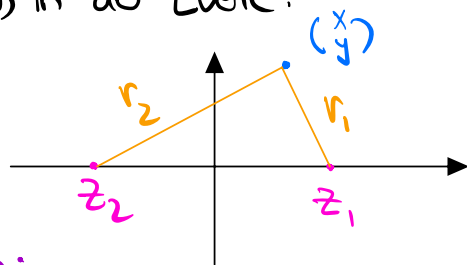
aus

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial L} \left(= \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_1} \right) = \varphi - \int^r \frac{L}{r'^2 \sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{L^2}{r'^2}}} dr' = \text{const} \\ \quad \quad \quad (= \bar{q}') \\ \frac{\partial S}{\partial E} \left(= \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_2} \right) = \int^r \frac{m}{\sqrt{2m(E - V(r')) - \frac{L^2}{r'^2}}} dr' = \text{const.} + t \\ \quad \quad \quad (= \bar{q}^2 + t). \end{cases}$$

Das stimmt mit unseren früheren Ergebnissen überein.

6.6.2. Das ebene Zweizentren-Problem

- Zwei feste Gravitationszentren $z_1 = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$;
Bewegung $(x(t), y(t))$ in der Ebene.



⇒ Hamilton-Funktion:

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{GM_1}{r_1} - \frac{GM_2}{r_2}$$

Wahl von Einheiten $\rightarrow \frac{1}{4} (p_x^2 + p_y^2) - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}$
 $(r_j = |(x, y) - z_j|).$

Die Lösung der Hamilton-Gleichungen wurde historisch zum ersten Mal mittels Hamilton-Jacobi-Theorie gelöst.

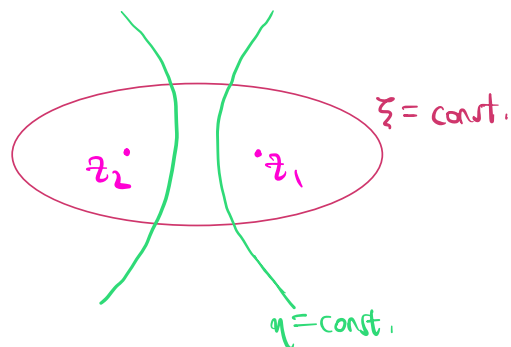
- Werden **elliptische Koordinaten** verwendet:

$$\xi := r_1 + r_2 \geq 1$$

$$\eta := r_1 - r_2 \in [-1, 1].$$

Bemerkung. Koordinatenlinien $\xi = \text{const.}$: konfokale Ellipsen
 $\eta = \text{const.}$: konfokale Hyperbeln

mit Brennpunkten z_1, z_2 .



- Müssen Hamilton-Funktion mittels ξ, η, p_ξ, p_η ausdrücken.

(i) Potential: $V(\xi, \eta) = -\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2}$ μ_1, μ_2, r_1, r_2

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\xi + \eta}{2} \\ r_2 &= \frac{\xi - \eta}{2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad = \frac{-a\xi + b\eta}{\xi^2 - \eta^2}, \quad \begin{aligned} a &= 2(\mu_1 + \mu_2) \\ b &= 2(\mu_1 - \mu_2) \end{aligned}$$

- (ii) Kinetische Energie: da (ξ, η) Funktionen von (x, y) sind, sind p_ξ, p_η bestimmt durch $p_\xi d\xi + p_\eta d\eta = p_x dx + p_y dy$, also $p_\xi \frac{\partial \xi}{\partial \vec{z}} + p_\eta \frac{\partial \eta}{\partial \vec{z}} = \vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ (wobei $\vec{z} = (x, y)$).

$$\Rightarrow |\vec{p}|^2 = p_\xi^2 \left| \frac{\partial \xi}{\partial \vec{z}} \right|^2 + p_\eta^2 \left| \frac{\partial \eta}{\partial \vec{z}} \right|^2 + 2p_\xi p_\eta \left(\frac{\partial \xi}{\partial \vec{z}} \right) \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial \vec{z}} \right).$$

- Berechnen also

$$\frac{\partial \xi}{\partial \vec{z}} = \frac{\partial r_1}{\partial \vec{z}} + \frac{\partial r_2}{\partial \vec{z}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \vec{z}} = \frac{\partial r_1}{\partial \vec{z}} - \frac{\partial r_2}{\partial \vec{z}};$$

weiterhin

$$\left| \frac{\partial r_1}{\partial \vec{z}} \right|^2 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{x - \frac{1}{2}}{r_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{r_1} \right)^2 = \frac{r_1^2}{r_1^2} = 1$$

$$\left| \frac{\partial r_2}{\partial \vec{z}} \right|^2 = 1$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \vec{z}} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial \vec{z}} = \frac{\partial r_1}{\partial x} \frac{\partial r_2}{\partial x} + \frac{\partial r_1}{\partial y} \frac{\partial r_2}{\partial y} = \frac{(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + y^2}{r_1 r_2} = \frac{4(x^2 + y^2) - 1}{4r_1 r_2}$$

Brauchen auch

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= 2(r_1^2 + r_2^2) = 2 \left[(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \right] \\ &= 4(x^2 + y^2) + 1, \end{aligned}$$

$$\xi^2 - \eta^2 = 4r_1 r_2.$$

$$\Rightarrow |\vec{p}|^2 = p_\xi^2 \left(1+1+2 \cdot \frac{4(x^2+y^2)-1}{4r_1 r_2} \right) + p_\eta^2 \left(1+1-2 \cdot \frac{4(x^2+y^2)-1}{4r_1 r_2} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{\xi^2 + \eta^2 - 2}{\xi^2 - \eta^2}$$

$$= \frac{4}{\xi^2 - \eta^2} \left((\xi^2 - 1) p_\xi^2 + (1 - \eta^2) p_\eta^2 \right)$$

(iii) zusammenfassend also

$$H(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta) = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left((\xi^2 - 1) p_\xi^2 + (1 - \eta^2) p_\eta^2 - a\xi + b\eta \right).$$

• Hamilton-Jacobi-Gleichung für $S = S(\xi, \eta)$:

$$H(\xi, \eta, \frac{\partial S}{\partial \xi}, \frac{\partial S}{\partial \eta}) = \bar{p}_2 = E$$

lässt sich mit $S(\xi, \eta) = S_\xi(\xi) + S_\eta(\eta)$ separieren, erhalten

$$(\xi^2 - 1)(S'_\xi)^2 - a\xi - E\xi^2 = -(1 - \eta^2)(S'_\eta)^2 - b\eta - E\eta^2$$

$$=: \bar{p}_1.$$

Können S_ξ, S_η durch Integration bestimmen, und

$$\frac{\partial S}{\partial p_1} = \text{const.} \text{ ergibt die Bahnkurven,}$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \text{const.} + t \text{ deren zeitlichen Verlauf}$$

wie üblich.

Bemerkung. (i) Die Erhaltungsgröße \bar{p}_1 lautet in kartesischen Koordinaten

$$-\bar{p}_1 = (x p_y - y p_x)^2 + \frac{1}{4} p_x^2 - 2x \left(\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} \right).$$

(Unmöglich zu erraten...)

(ii) Die Existenz von 2 Erhaltungsgrößen $H, -\bar{p}_1$ zeigt auch, dass das System integrabel ist.

6.6.3. Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir betrachten jetzt ein System, bei welchem wir eine **explizite Zeitabhängigkeit** der Hamiltonfunktion zulassen: $H = H(t, q, p)$.

- Wir führen eine "Impulsvariable" τ ein und definieren

$$\tilde{H}(t, q, \tau, p) := \tau + H(t, q, p).$$

- Die **Hamilton-Gleichungen** für \tilde{H} sind dann

$$\frac{d}{ds} t = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} = 1, \quad \frac{d}{ds} q^\alpha = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_\alpha}(t, q, \tau, p) = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}(t, q, p),$$

$$\frac{d}{ds} \tau = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{d}{ds} p_\alpha = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q^\alpha}(t, q, \tau, p) = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}(t, q, p).$$

Legen wir also fest $t(0) := 0, \tau(0) := -H(0, \underbrace{q_0, p_0}_{\text{Anfangsbedingungen}})$

so ist die Lösung

$$t(s) = s,$$

$$\tau(s),$$

$$q^\alpha(s),$$

$$p_\alpha(s),$$

wobei $(q(t), p(t))$ die Hamilton-Gleichungen für H löst.

- Bemerkung:** für diese Lösung gilt $\tilde{H}(t, q, \tau, p) = 0$.

In der Tat gilt $\tilde{H}(t(s), q(s), \tau(s), p(s)) = 0$ für $s=0$, und da \tilde{H} keine explizite s -Abhängigkeit besitzt, bleibt das für alle $s \in \mathbb{R}$ so.

- Die **Hamilton-Jacobi-Gleichung** für \tilde{H} ist also eine Gleichung für

$$S = S(t, q): \tilde{H}(t, q, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}) = 0 \quad \left(\text{"Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung"} \right).$$

Haben wir eine vollständige Schaar $S(q, \bar{p}, t)$ von Lösungen dieser Gleichung, bekommen wir also t -abhängige kanonische Transformationen

$$(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}) \mapsto (t, \frac{\partial S}{\partial \bar{p}}, \bar{p}) =: (t, \bar{q}, \bar{p}).$$

Behauptung: In den Koordinaten (t, \bar{q}, \bar{p}) gilt

$$\dot{\bar{q}}^\alpha = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{p}_\alpha} = 0, \quad \dot{\bar{p}}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{q}^\alpha} = 0, \quad \text{d.h. } \bar{q}^\alpha, \bar{p}_\alpha \text{ sind allesamt erhalten.}$$

Beweis: Wir betrachten allgemeiner $S = S(t, q, \bar{t}, \bar{p})$ mit

$$\tilde{H}(t, q, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q}) = \bar{t} \quad (\Leftrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}) = \bar{t}.)$$

\Rightarrow Kanonische Transformation (für $dt + d\bar{t} + dq + d\bar{p}$)

$$(t, q, \bar{t}, \bar{p}) = (t, q, \frac{\partial S}{\partial t}, \frac{\partial S}{\partial q}) \mapsto (\bar{t}, \bar{q}, \bar{t}, \bar{p}) = (\frac{\partial S}{\partial \bar{t}}, \frac{\partial S}{\partial \bar{p}}, \bar{t}, \bar{p}),$$

und in den \bar{z} -Koordinaten ist $\tilde{H}(\bar{t}, \bar{q}, \bar{t}, \bar{p}) = \bar{t}$.

$\Rightarrow \bar{q}, \bar{p}$ sind erhalten.

Die Bewegung in den ursprünglichen Koordinaten ergibt sich aus

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{p}_\alpha}(t, q, \bar{p}) = \bar{q}^\alpha. \quad (\text{Und dann auch } \bar{p}_\alpha = \frac{\partial S}{\partial \bar{q}^\alpha}(t, q, \bar{p}).)$$

bestimmt durch
Anfangsbedingungen!

Wenn das System autonom ist, so können wir die zeitabhängige Hamilton-

Jacobi-Gleichung via einen Separationsansatz $S(t, q) = \tilde{S}(q) + S_t(t)$

lösen: $H(q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}) = -\frac{\partial S_t}{\partial t} = -S'_t(t) = \bar{p}_N$ (Separationskonstante)

$\Rightarrow S_t = -\bar{p}_N t$. Für die vollständige Lösung

$$S(t, q, \bar{p}) = \underbrace{\tilde{S}(q, \bar{p})}_{\substack{\text{vollständige Lösung} \\ \text{der zeitunabhängigen} \\ \text{Hamilton-Jacobi-Gleichung}}} + \underbrace{S_t(t, \bar{p})}_{= -\bar{p}_N t}$$

$$\begin{aligned} \text{gilt also } \underbrace{q^\beta}_{\text{const}} &= \frac{\partial S}{\partial \bar{p}_\beta} \\ &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \bar{p}_\beta} + \frac{\partial S_t}{\partial \bar{p}_\beta} \\ &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \bar{p}_\beta} - \delta_N^\beta t, \end{aligned}$$

also $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \bar{p}_\beta} = \text{const.} + \delta_N^\beta t$, was genau unserer früheren Lösung entspricht.