

6. Hamiltonsche Mechanik

- Die **Lagrange-Perspektive** beschreibt die Dynamik eines mechanischen Systems als System von N gewöhnlichen Differentialgleichungen **2. Ordnung** für die verallgemeinerten Ortskoordinaten q^α , $\alpha=1, \dots, N$.
- In der **Hamilton-Perspektive** werden wir der Beschreibung des Systems stattdessen die Ortskoordinaten q^α und konjugierten Impulse $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ zugrundelegen, die ein (sehr elegantes) System von $2N$ Gleichungen **erster Ordnung** lösen werden.

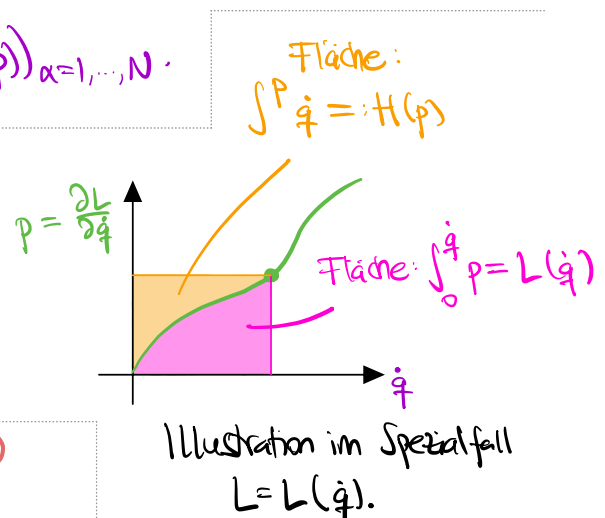
6.1. Hamiltonsche Gleichungen

- Bei der Herleitung dieser **Hamiltonschen Gleichungen** beginnen wir mit der Lagrange-Funktion $L = L(t, q, \dot{q})$, $q = (q^1, \dots, q^N)$, und den Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}$ ($\alpha=1, \dots, N$).
- Wir betrachten q^α und $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ als unabhängige Variablen; bemerke: $p = p(t, q, \dot{q}) = (p_\alpha(t, q, \dot{q}))_{\alpha=1, \dots, N}$. Postulieren also die Existenz der Umkehrfunktion

$$\dot{q} = \dot{q}(t, q, p) = (\dot{q}^\alpha(t, q, p))_{\alpha=1, \dots, N}.$$

Definieren dann die **Hamilton-Funktion** als die Legendre-Transformation:

$$\begin{aligned} H(t, q, p) &:= \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \dot{q}^\alpha - L(t, q, \dot{q}). \\ &= \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha \dot{q}^\alpha(t, q, p) - L(t, q, \dot{q}(t, q, p)). \quad \otimes \end{aligned}$$



Bemerkungen. (1) $\frac{\partial H}{\partial p_\beta} = \dot{q}^\beta$. Beweis durch Illustration oder direkte

$$\text{Rechnung: } \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \stackrel{\otimes}{=} \dot{Q}^\beta + \sum_{\alpha=1}^N \left(p_\alpha \frac{\partial \dot{Q}^\alpha}{\partial p_\beta} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \frac{\partial \dot{Q}^\alpha}{\partial p_\beta} \right) \\ = \dot{Q}^\beta(t, q, p) = \dot{q}^\beta.$$

(2) Allgemein ist die Legendre-Transformation ein Werkzeug, um aus einem "Potential" (z.B. L) ein anderes "Potential" (H) zu gewinnen, indem man die Abhängigkeit von einer Variablen (\dot{q}^α) durch eine Abhängigkeit von der konjugierten Variablen ersetzt ($p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$ — oder umgekehrt, von H startend, $\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$). Besondere Bedeutung in der Thermodynamik.

(3) Mathematisch haben wir eine Funktion

$$F = F(v): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{z.B. } F(\dot{q}) = L(\dot{q}))$$

$$\text{mit } F'' > 0 \quad \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} > 0, \text{ z.B. OK für } L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \right).$$

$$\text{Konjugierte Variable: } p = F'(v).$$

Suchen $G = G(p)$, sodass $v = G'(p)$. Obige Illustration suggeriert

$$G(p) := p v - F(v), \text{ wobei } v = V(p) \text{ die Umkehrfunktion von } F' \text{ ist} \\ (\text{wohldefiniert, da } F' \text{ monoton steigend ist}).$$

$$\text{Tatsächlich gilt } G'(p) = (V(p) + p V'(p)) - \underbrace{F'(V(p))}_{=p} V'(p) \\ = V(p) = v.$$

(Das ist dieselbe Rechnung wie in (1).)

(4) Für $F = F(v): \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ müssen wir annehmen, dass $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j} \right)_{i,j=1,\dots,N}$ positiv definit ist, um $p = \frac{\partial F}{\partial v}$ nach v auflösen zu können; dann ist $G(p) = p \cdot v - F(v)$ ($p \in \mathbb{R}^N$) die Legendre-Transformation.

Hamiltonsche Gleichungen: $\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$
 $\frac{dp^\alpha}{dt} = \dot{p}^\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$

Beweis. Wir müssen nur noch die zweite Gleichung prüfen: Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta}$

$$\frac{\partial H}{\partial q^\beta} = \sum_{\alpha=1}^N \left(p_\alpha \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\beta} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}}_{=p^\alpha} \frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial q^\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^\beta} = -\frac{\partial L}{\partial q^\beta} = -\frac{d}{dt} p_\beta$$

Beispiele. (1) Ein Teilchen im Potential $V=V(\vec{x})$:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}}; \text{ also } \dot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{p}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L \\ &= \frac{1}{m} \vec{p}^2 - \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{1}{m} \vec{p} \right)^2 - V(\vec{x}) \right) \\ &= \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(\vec{x}). \end{aligned}$$

(Das ist die Gesamtenergie. Vgl. § 5.6.)

Hamiltonsche Gleichungen:
$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m} \vec{p} \\ \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}. \end{cases}$$

(2) Teilchen im Zentralpotential in 2 Dimensionen: verwenden Polarkoordinaten r, φ .

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}, & (\text{konjugierter Impuls zu } r: \text{Impuls in radialer Richtung}) \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} & (\text{konjugierter Impuls zu } \varphi: \text{Drehimpuls}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H = \dot{r} p_r + \dot{\varphi} p_\varphi - L = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r)$$

(3) Allgemein gilt für $L=T-V$, $T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^N g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta$, $V=V(t, q^1, \dots, q^N)$:

$$p_\alpha = \sum_{\beta=1}^N g_{\alpha\beta}(q) \dot{q}^\beta \Rightarrow \dot{q}^\beta = \sum_{\alpha=1}^N g^{\alpha\beta}(q) p_\alpha, \text{ wobei } (g^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,N}$$

die inverse Matrix von $(g_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\dots,N}$ ist,

$$\begin{aligned} \Rightarrow H &= \sum_{\beta} p_\beta \dot{q}^\beta - L \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^N g^{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + V(t, q). \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Hamilton-Funktion $H(t, q, p)$ ist für eine Lösung der Bewegungsgleichungen erhalten, wenn sie nicht explizit von t abhängt. Allgemein gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t, q(t), p(t)) &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$