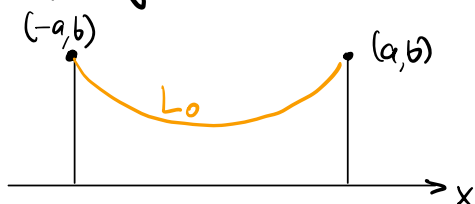
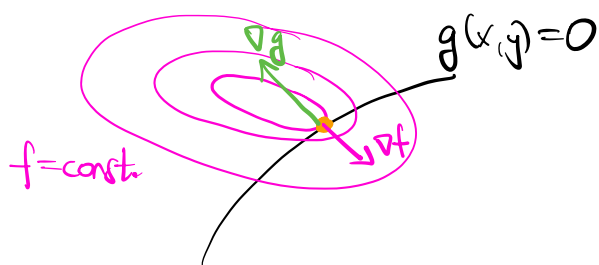


### 5.3. Lagrange-Multiplikatoren (oder: Extremisierung von Funktionalen mit Nebenbedingungen.)

Beispiel: Kettenlinie. Form einer Kette im homogenen Schwerfeld, aufgehängt an  $(-a, b)$  und  $(a, b)$  und mit Gesamtlänge  $L_0$ .



(Erinnerung: will man  $f(x, y)$  maximieren unter der Bedingung  $g(x, y) = 0$ ,



geht man entlang von  $\{g(x, y) = 0\}$  so muss am Punkt, an dem  $f(x, y)$  maximal ist, die Niveaumenge von  $f$  tangential zu  $\{g = 0\}$  sein.

$\Leftrightarrow \nabla f \parallel \nabla g$  am Maximum.

Also gilt dort  $\nabla f + \lambda \nabla g = 0$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Können das Maximum  $(x, y)$  also bestimmen, indem wir

$$F(x, y; \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

definieren und

$\uparrow$  Lagrange-Multiplikator

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y; \lambda) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y; \lambda) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y; \lambda) = 0$$

lösen.

Zurück zum Beispiel: beschreiben die Kette als Graphen  $(x, f(x))$

mit  $f(-a) = b = f(a)$ . Nebenbedingung:  $L(f) = \int_{-a}^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = L_0$ ,

$$\text{also } \int_{-a}^a \left( \sqrt{1+f'(x)^2} - \frac{L_0}{2a} \right) dx = 0.$$

Betrachten also das Funktional  $s(x, f, f'; \lambda)$

$$S[f; \lambda] = \int_{-a}^a \left[ \underbrace{f(x) \sqrt{1+f'(x)^2}}_{\text{Potentielle Energie der Kette}} + \lambda \left( \sqrt{1+f'(x)^2} - \frac{L_0}{2a} \right) \right] dx.$$

(Einheiten: Massendichte der Kette = 1

Schwerebeschleunigung  $g=1$ .)

Die Euler-Lagrange-Gleichung für  $S[f; \lambda]$  ist also

$$0 = \frac{\partial s}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial s}{\partial f'} \Leftrightarrow \sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{(f(x)+\lambda) f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}.$$

Schreiben  $f(x)+\lambda =: g(x)$ ; finden dann  $g'^2 - g g'' + 1 = 0$ .  $\otimes$

Noch einmal ableiten ergibt  $0 = 2g'g'' - g'g'' - g g''' = -g^2 \left( \frac{g''}{g} \right)'$ .

$\Rightarrow g'' = c g$  (ausser,  $g=0 \Rightarrow f = \text{const.} \Rightarrow f \equiv b$ ; nur möglich, wenn  $L_0 = 2a$ )

$\Rightarrow g(x) = A \cosh(\sqrt{c} x) + B \sinh(\sqrt{c} x).$

• Randbedingungen  $g(-a) = g(a) (= b + \lambda)$  ergeben  $B = 0$ .

• Einsetzen von  $g(x) = A \cosh(\sqrt{c} x)$  in  $\otimes$  ergibt dann

$$A^2 c \sinh^2(\sqrt{c} x) - A^2 c \cosh^2(\sqrt{c} x) + 1 = 0 \Rightarrow A^2 c = 1.$$

• Also:  $f(x) = A \cosh\left(\frac{x}{A}\right) - \lambda$ .

Die Parameter  $A, \lambda$  werden durch  $L(f) = L_0$  und  $f(\pm a) = b$  festgelegt.