

4.4 Schwerer symmetrischer Kreisel

- Kreisel mit $I_1 = I_2 > 0$ im homogenen Schwerfeld. (Der Fall $I_1 = I_2 = 0$ beschreibt ein schweres Pendel — also $m\ddot{\theta} = -gl \sin \theta$ — und wird daher nicht weiter betrachtet).
- Annahme: der Schwerpunkt \vec{y} liegt auf der \vec{e}_3 -Achse: $\vec{y} = l\vec{e}_3 = l\vec{e}_\psi$.
(Gilt für rotationsymmetrischen Kreisel.) Hauptträgheitsachse
- Nehmen an: $l > 0$, d.h. der Schwerpunkt liegt oberhalb des Aufhängepunkts des Kreisels.
- Schwerkraft $\vec{F}_x = -mg\vec{e}_3$ (im \vec{x} -System),
also $\vec{F}_y = -mg\vec{e}_\varphi$ (im körperfesten System) (\vec{e}_φ = Vertikale)
 \Rightarrow Drehmoment $\vec{M}_y = \vec{y} \times \vec{F}_y = -mgl\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\varphi$ (\vec{e}_ψ = Kreiselachse)
 $\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\varphi = -\sin \vartheta \vec{e}_\vartheta \quad \curvearrowright = mgl \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta$
- Bewegungsgleichungen: $\dot{\vec{S}} = \vec{M}_y - \vec{\omega} \times \vec{S}$.
- Erhaltungsgrößen. (Können im Prinzip explizit verifiziert werden... Besser: Lagrange-Formalismus.)
 - (i) Gesamtenergie $E = T + V$,
$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$
$$= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta)^2$$
$$V = mgl \cos \vartheta.$$
 - (ii) Drehimpuls L_3 in vertikaler Richtung, da das Drehmoment (durch die Schwerkraft) orthogonal zur Vertikalen steht.

Schreiben $L_3 = \vec{L} \cdot \vec{e}_3 = R \vec{S} \cdot \underbrace{R \vec{e}_y}_{\substack{\text{Vertikale im} \\ \vec{y}\text{-System}}} = \vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot I \vec{\omega}$

$$\Rightarrow L_3 = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta) \cos \vartheta.$$

(iii) Drehimpuls S_3 in Richtung der Symmetrieachse \vec{e}_φ des Körpers, da das Drehmoment auch senkrecht darauf steht, und auch $\vec{\omega} \times \vec{S}$ (durch explizite Rechnung).

haben $S_3 = \vec{S} \cdot \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot I \vec{\omega}$, also

$$S_3 = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta).$$

(ii') Können jetzt neu schreiben $L_3 = S_3 \cos \vartheta + I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta.$

• Haben also 3 Erhaltungsgrößen für unser System mit 3 Freiheitsgraden $(\psi, \vartheta, \varphi)$ gefunden. Werden jetzt zeigen, dass dies impliziert, dass das System integrabel ist:

$$\dot{\varphi} \stackrel{(ii')}{=} \frac{L_3 - S_3 \cos \vartheta}{I_1 \sin^2 \vartheta} ; \quad \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \stackrel{(iii)}{=} \frac{S_3}{I_3} ;$$

eingesetzt in (i):

$$E' := E - \frac{S_3^2}{2I_3} = \frac{I_1}{2} \dot{\vartheta}^2 + \frac{(L_3 - S_3 \cos \vartheta)^2}{2I_1 \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta. \quad (*)$$

Das ist eine entkoppelte Differentialgleichung für $\vartheta(t)$ (die Nick-Bewegung oder Nutation).

Lösung von \textcircled{X} : substituieren $u = \cos \vartheta$, also $\dot{u} = -\dot{\vartheta} \sin \vartheta$

\Rightarrow bekommen $\dot{u}^2 = f(u) := 2(\varepsilon - \gamma u)(1 - u^2) - (\alpha - \beta u)^2$,

$$\gamma = \frac{mgl}{I_1} > 0, \quad \varepsilon = \frac{E'}{I_1}, \quad \alpha = \frac{L_3}{I_1}, \quad \beta = \frac{S_3}{I_1}. \quad \textcircled{\star}$$

Die Lösung muss beschränkt sein auf das Gebiet

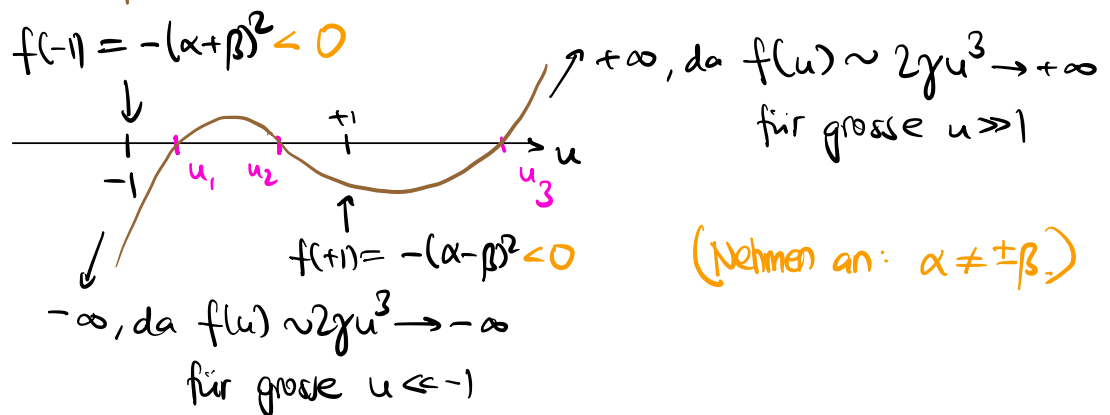
$$u \in [-1, 1] \quad (\text{da } u = \cos \vartheta)$$

$$f(u) \geq 0 \quad (\text{da } f(u) = \dot{u}^2 \geq 0).$$

Dort gilt also $t(u) - t(u_0) = \pm \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{f(u')}}. \quad (\text{Elliptisches Integral})$

• Quantitative Analyse der Motion:

Benötigen Graphen von $f(u)$:



$\Rightarrow \exists$ genau 2 Nullstellen $-1 < u_1 \leq u_2 < 1$ von $f(u)$,

und $u = \cos \vartheta$ muss zwischen diesen beiden Werten oszillieren

mit Periode $T_\vartheta = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$

• Ist u (oder ϑ) bekannt, so findet man auch φ, ψ mittels

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha - \beta u}{1 - u^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{I_1}{I_3} \beta - \frac{u(\alpha - \beta u)}{1 - u^2} \quad \textcircled{\#}$$

⇒ Die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ haben **dieselbe Periode** T_g ;
 der Winkel φ nimmt in einer Periode zu um

$$\Delta\varphi = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{du} = 2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\alpha - \beta u}{1-u^2} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

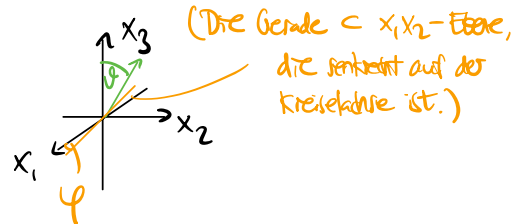
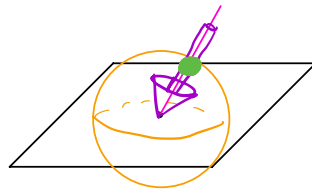
Also ist $\varphi(nT_g + t) \approx n\Delta\varphi + \mathcal{O}(1)$ für $t \in [0, T_g)$

⇒ **mittlere Zeit** für eine **volle Präzession** der Kreiselachse um
 die Vertikale: $\frac{2\pi T_g}{\Delta\varphi}.$

• Graphische Darstellung der Kreiselachse: **Schnittpunkt** von

(a) **Kreiselachse** (in der Regel \neq momentane Rotationsachse)

(b) **Einheitssphäre** zentriert am festgehaltenen Punkt



Genannt **Locus** der Figurenachse.

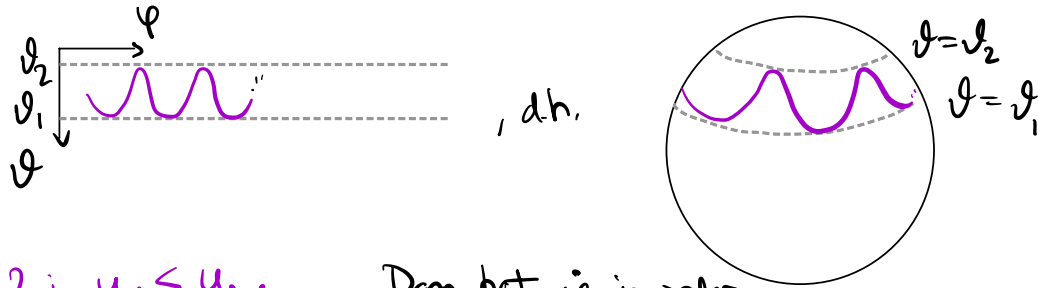
⇒ beschrieben durch Eulerwinkel ψ (Winkel zur x_3 -Achse $\hat{=}$ Breitengrad)
 φ ($\hat{=}$ Längengrad).

(φ beschreibt die Rotation um die Kreiselachse selbst, beeinflusst den Locus also nicht.)

Bilder: ψ oszilliert zwischen $\vartheta_1 = \arccos u_1,$
 $\vartheta_2 = \arccos u_2.$ ($\vartheta_2 < \vartheta_1.$)

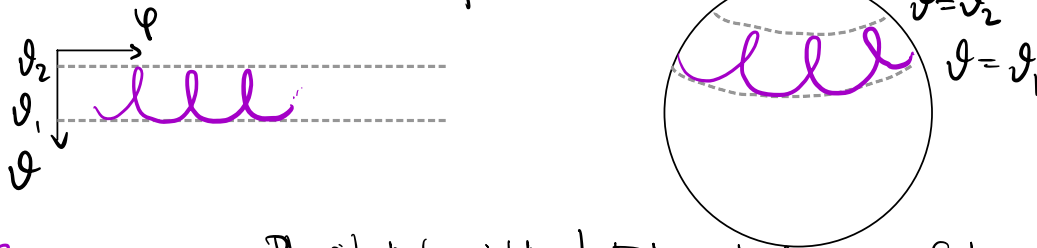
Entscheidende Größe: $u_\varphi := \frac{\alpha}{\beta}$ (= Wurzel von $\alpha - \beta u$).

- Fall 1: $u_4 > u_2$. Dann hat wegen \oplus $\dot{\varphi}$ ein konstantes Vorzeichen.



- Fall 2: $u_4 < u_2$. Dann hat $\dot{\varphi}$ in jeder

T_ϑ -Periode zwei Wendepunkte:



- Fall 3: $u_4 = u_2$. Physikalisch wichtig! Entspricht folgendem Setup:

Wählen Anfangsbedingung $\vartheta(0)$; und drehen den Kreisel anfänglich um seine Achse, also $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi} = 0$ (aber $\dot{\varphi} \neq 0$) an $t=0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} L_3(0) = I_3 \dot{\varphi}(0) \cos \vartheta(0) \\ S_3(0) = I_3 \dot{\varphi}(0), \end{cases}$$

also $E' = mgl \cos \vartheta(0)$; da aber allgemein gilt

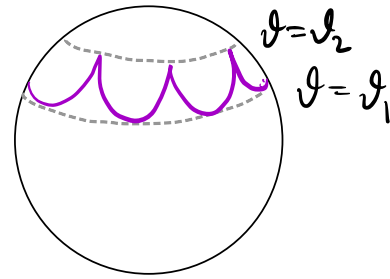
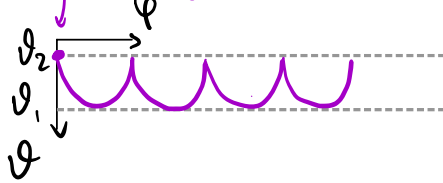
$mgl \cos \vartheta = E' - (\text{quadratische Terme}) \leq E'$,

muß $\cos \vartheta \leq \cos \vartheta(0)$, also $\vartheta \geq \vartheta(0)$. Es folgt

$$\vartheta(0) = \vartheta_2.$$

Da $f(u_4) = f(u_2) = 0$, ist gemäß \oplus $\dot{\varphi} = 0$, wenn ϑ seinen minimalen Wert ϑ_2 annimmt.

Anfangsbedingung



4.4.1. Schneller Kreisel.

- Wir betrachten den (sehr natürlichen) Spezialfall, dass die kinetische Energie infolge der Rotation des Kreisels viel grösser ist als die maximale potentielle Energie: $I_3 \dot{\psi}^2 \gg mgl$;

und dass die anderen Winkelgeschwindigkeiten viel kleiner sind:

$$|\dot{\phi}|, |\dot{\theta}| \ll |\dot{\psi}|.$$

Betrachten speziell den Fall, dass $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. (Vgl. Fall 3 oben.)

- Bewegungsgleichungen?** Wissen bereits, dass $\theta(0) = \theta_2$ der obere Begrenzungskreis ist, d.h. $u(0) = \cos \theta(0) = u_2$.

– **Ausmass der Nutation:** andere Wurzel $u_1 \in (u_2, 1)$ von $f(u)$.

Nun ist $\dot{\phi} = \frac{\alpha - \beta u}{1 - u^2} = 0$ für $t=0$, also $\alpha = \beta u(0)$,
und wegen $f(u(0))=0$ auch $\Sigma = \gamma u(0)$.

$$\Rightarrow f(u) = (u(0) - u)(2\gamma(1 - u^2) - \beta^2(u(0) - u)),$$

mit weiterer Nullstelle $u_1 = u_2 - x_1$, die die Gleichung

$$\textcircled{+} \quad x_1^2 + px_1 - q = 0, \quad p = \frac{\beta^2}{2\gamma} - 2u(0), \quad q = 1 - u(0)^2,$$

löst. **Schneller Kreisel:**

$$p \approx \frac{S_3^2}{2mgl I_1} \stackrel{\text{mit } S_3 = I_3 \dot{\psi}}{=} \frac{I_3}{I_1} \frac{I_3 \dot{\psi}^2}{2mgl},$$

und $q \ll p \ll p^2$ (unter der **zusätzlichen Annahme** $I_3 \sim I_1$).

• Lösungen von \oplus sind $\approx \frac{q}{p} \ll 1$, $-p - \frac{q}{p} \ll -1$
 $\Rightarrow x_1 \approx \frac{q}{p}$ ist die relevante Lösung. irrelevant (da $u_1, u_2 \in (0,1)$)

\Rightarrow Ausmass der Nutation ist $u_2 - u_1 = x_1 \approx \frac{I_1}{I_3} \frac{2mgl}{I_3 \dot{\psi}^2} \sin^2 \vartheta(0)$.

– Frequenz der Nutation: ersetzen $1-u^2$ durch seinen Anfangswert

$$1-u(0)^2 = \sin^2 \vartheta(0), \text{ also (mit } x = u(0) - u)$$

$$\dot{x}^2 = f(u) \approx x(2\gamma \sin^2 \vartheta(0) - \beta^2 x)$$

mit Lösung (mit Anfangsbedingung $x(0)=0$, und Verwendung von $2\gamma \sin^2 \vartheta(0) - \beta^2 x \approx 0$)

$$x(t) \approx \frac{x_1}{2} (1 - \cos(\beta t)).$$

\Rightarrow Frequenz: $\beta = \frac{S_3}{I_1} \approx \frac{I_3}{I_1} \dot{\psi}$; umso schneller, je schneller sich der Kreisel dreht! (In Wirklichkeit: durch Reibung am Aufhängepunkt gedämpft.)

– Präzession: $\dot{\varphi} \stackrel{\oplus}{=} \frac{\alpha - \beta u}{1-u^2} = \frac{\beta(u(0)-u)}{1-u^2}$
 $\approx \frac{\beta x}{\sin^2 \vartheta_0} \approx \frac{\gamma}{\beta} (1 - \cos(\beta t)).$

\Rightarrow (i) Ungleichförmige Präzessionsgeschwindigkeit, welche mit der Nutationsfrequenz variiert.

$$x \approx \frac{x_1}{2} (1 - \cos \beta t),$$

$$x_1 \approx -\frac{q}{p} \approx -\frac{\sin^2 \vartheta(0)}{\beta^2 / 2\gamma}$$

(ii) Mittlere Präzessionsgeschwindigkeit:

$$\dot{\varphi} \approx \frac{\gamma}{\beta} = \frac{mgl}{S_3} \approx \frac{mgl}{I_3 \dot{\psi}},$$

umgekehrt proportional zur Rotationsgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ des Kreisel.