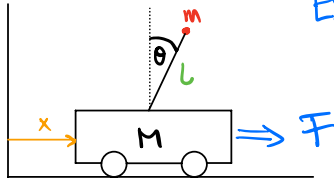


### 3.3. Stabilisierung linearer Systeme

Umgekehrtes Pendel: Koordinaten des Massenpunktes:  $x, \theta$

Externe Kraft  $F$ .



Linearisierte Bewegungsgleichungen (Herleitung später) für  $\theta \ll 1$ :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + m l \ddot{\theta} = F \\ m \ddot{x} + m l \ddot{\theta} = m g \theta. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left| \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x + l \sin \theta \\ l \cos \theta \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta) \end{aligned}$$

$$V = m g l \cos \theta$$

$$\mathcal{L} = T - V, \text{ Euler-Lagrange!}$$

Wählen Einheiten, sodass  $M=1, g=l$ .

$$\Leftrightarrow \dot{\tilde{z}} = A \tilde{z} + F \tilde{b} \quad \text{für} \quad \tilde{z} = \begin{pmatrix} l\theta \\ l\dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1+m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen  $F(t)$  als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten ("Rückkopplung"), hier konkret mit linearer Abhängigkeit (da wir uns ohnehin im linearen Regime befinden):

$$F(t) = \tilde{r}^T \tilde{z}(t) \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Falls  $\tilde{r} \in \mathbb{R}^n$  so gewählt werden kann, dass das resultierende autonome System

$$\dot{\tilde{z}} = (A + \tilde{b} \tilde{r}^T) \tilde{z}$$

stabil ist, so nennen wir  $\otimes$  stabilisierbar. (Im Beispiel:  $n=4$ .)

**Behauptung:**  $\otimes$  ist **stabilisierbar**, falls  $\vec{b}, A\vec{b}, \dots, A^{n-1}\vec{b}$   $\mathbb{R}^n$  aufspannen.

**Beweis:** Wir werden zeigen, dass es eine Basis von  $\mathbb{R}^n$  gibt, bzgl.

(Nur für  
Interessierte.) welcher

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \otimes$$

Für  $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$  ist dann  $\vec{b} \vec{r}^T = \begin{pmatrix} r_1 & \dots & r_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A + \vec{b} \vec{r}^T = \begin{pmatrix} -\alpha_1 + r_1 & \dots & -\alpha_n + r_n \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mit charakteristischem Polynom

$$p(\vec{r}; \lambda) = \det(\lambda I_n - (A + \vec{b} \vec{r}^T)) = \lambda^n + (\alpha_1 - r_1) \lambda^{n-1} + \dots + (\alpha_n - r_n).$$

- Die **Koeffizienten** können wir durch Wahl der  $r_i$  beliebig vorgeben (z.B. so dass  $p(\vec{r}; \lambda) = (\lambda + 1)^n$ ), und dadurch erreichen, dass alle Nullstellen  $\lambda$  von  $p(\vec{r}; \lambda)$  = Eigenwerte von  $A + \vec{b} \vec{r}^T$  erfüllen: **Re  $\lambda < 0$**  (d.h. Stabilität gilt).

- Müssen noch  $\otimes$  einrichten: schreiben

$$p(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \dots + \alpha_n.$$

Setzen  $p_0(\lambda) = 1$ ,  $p_k(\lambda) = \lambda p_{k-1}(\lambda) + \alpha_k$  ( $k=1, \dots, n$ )  $\Rightarrow p_n(\lambda) = p(\lambda)$ .

Setzen  $\vec{e}_k = p_k(A) \vec{b}$  ( $\Rightarrow \vec{e}_0 = \vec{b}$ ) ( $k=0, \dots, n-1$ ); dies ist eine Basis,

und  $A \vec{e}_{k-1} = (\lambda p_{k-1})(A) \vec{b} = p_k(A) \vec{b} - \alpha_k \vec{b} = \vec{e}_k - \alpha_k \vec{e}_0$ . ——

Angewendet im Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \bar{b} & A\bar{b} & A^2\bar{b} & A^3\bar{b} \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1-m \\ -1 & 0 & -1-m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 1 & 0 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$  Das System ist stabilisierbar.

**Behauptung:** eine explizite Wahl von  $\vec{r} \in \mathbb{R}^4$  mit der Eigenschaft, dass alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A + \bar{b}\vec{r}^T$   $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  erfüllen (oder gar  $\lambda = -1$ ), kann im Prinzip aus dem obigen Beweis abgelesen werden.

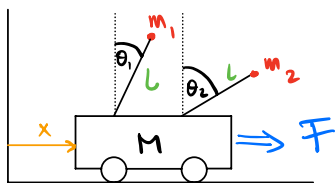
Intuitiv ist aber klar, dass wir  $\theta > 0$  und  $\dot{\theta} > 0$  durch Beschleunigung entgegenwirken müssen. Versuchen wir also  $\vec{r} = (m+1) \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit  $a > 0$ ,

berechnet man

$$A + \bar{b}\vec{r}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(m+1)(a-1) & -(m+1)a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (m+1)a - m & (m+1)a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dessen Eigenwerte  $0, 0, \frac{1}{2}(-(m+1)a \pm \sqrt{(m+1)^2 a^2 - 4(a-1)(m+1)})$  sind, also  $\leq 0$  für  $a \geq 1$ .

**Beispiel 2:**



Die linearisierten Bewegungsgleichungen implizieren  $L(\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) = g(\theta_1 - \theta_2)$ , d.h.  $\theta_1, \theta_2$  wächst exponentiell (mit

Rate  $\sqrt{g/L}$ )  $\Rightarrow$  Stabilisierung nicht möglich. (Man kann auch prüfen, dass die Bedingung der obigen **Behauptung** nicht erfüllt ist.)