

4.4. Fundamentallösungen und Fouriertransformationen

- In Kapitel 2 der Vorlesung haben wir partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (nämlich die Wärmeleitungs- und Wellengleichungen) mittels der Fouriertransformation gelöst. Es bietet sich daher auch an, Fundamentallösungen $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ eines Operators

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

zu suchen, indem man die Gleichung

$$PE = \delta$$

Fourier-transformiert. Wegen $\mathcal{F} \partial^\alpha = (ik)^\alpha \mathcal{F}$ führt dies zur algebraischen Gleichung

$$P(k) \hat{E}(k) = 1, \quad k \in \mathbb{R}^n, \quad P(k) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (ik)^\alpha, \quad (*)$$

Hierbei ist $P(k)$ ein Polynom m -ten Grades. Die Gleichung $(*)$ ist im Distributionensinn zu verstehen — Multiplikation von $\hat{E} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit dem Polynom $P(k)$ ist wohl-definiert.

Beispiel 4.27. $n=1$, $P = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \Rightarrow P(k) = k$. Wir hätten also gerne $k \hat{E}(k) = 1$.

Leider definiert $\frac{1}{k}$ keine Distribution ($\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{k} \varphi(k) dk$ konvergiert nicht für allgemeine $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$). Strategie: versuchen, \hat{E} als Grenzwert von wohl-definierten Distributionen u_ε zu erhalten.

(i) Möglichkeit 1: setzen für $\varepsilon > 0$:

$$\langle u_\varepsilon, \varphi \rangle := \int_{|k| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(k)}{k} dk, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Dies definiert eine temperierte Distribution $u_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Lemma 4.28. u_ε konvergiert für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen eine temperierte Distribution mit dem Namen $\text{p.v. } \frac{1}{k} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Beweis. • Es gilt

$$\begin{aligned} \langle u_\varepsilon, \varphi \rangle &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} dk + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(k)}{k} dk \\ &= \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(k) - \varphi(-k)}{k} dk. \end{aligned}$$

Substitution: $k \rightarrow -k$

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$|\varphi(k) - \varphi(-k)| \leq 2|k| \sup \|\varphi'\|,$$

also konvergiert $\langle u_\varepsilon, \varphi \rangle \rightarrow \int_0^\infty \frac{\varphi(k) - \varphi(-k)}{k} dk$.

• Für

$$\langle \text{p.v. } \frac{1}{k}, \varphi \rangle := \int_0^\infty \frac{\varphi(k) - \varphi(-k)}{k} dk, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (**)$$

gilt

$$\begin{aligned} |\langle \text{p.v. } \frac{1}{k}, \varphi \rangle| &\leq \int_0^1 2|k| \sup \|\varphi'\| + \int_1^\infty \frac{2 \sup |k \varphi(k)|}{k^2} dk \\ &\leq C \underbrace{\|\varphi\|_1}_{\text{Schwartz-Norm}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.2 definiert (**) also eine temperierte Distribution. \square

Übung: $\mathcal{F}^{-1}(\text{p.v. } \frac{1}{k}) = \frac{i}{2} \text{sgn}$. (Das ist also unsere Fundamentallösung.)

(ii) Möglichkeit 2: setzen für $\varepsilon > 0$: $u_\varepsilon(k) = \frac{1}{k + i\varepsilon}$. (Integration gegen u_ε definiert eine temperierte Distribution.) Alternativ kann man auch $u_\varepsilon(k) = \frac{1}{k - i\varepsilon}$ nehmen.

Lemma 4.29. Die Grenzwerte

$$\frac{1}{k \pm i0} := \mathcal{F}'\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k \pm i\varepsilon}$$

existieren in $\mathcal{F}'(\mathbb{R})$. Es gilt die Plancherel-Formel

$$\frac{1}{k \pm i0} = \text{p.v.} \frac{1}{k} \mp i\pi\delta. \quad (***)$$

Beweis. Es gilt $\frac{1}{k \pm i\varepsilon} = \frac{k \mp i\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2} = \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} \mp i \frac{\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2}$.

• Zum einen ist dann die Differenz von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} \varphi(k) dk = \int_0^{\infty} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} (\varphi(k) - \varphi(-k)) dk$$

und $\langle \text{p.v.} \frac{1}{k}, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} (\varphi(k) - \varphi(-k)) dk$
vom Betrag her

$$\leq \int_0^1 \left| \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{k} \right| \cdot 2k \|\varphi\|_1 dk \leftarrow |\varphi(k) - \varphi(-k)| \leq 2|k| \sup |\varphi'| \leq 2|k| \|\varphi\|_1$$

$$+ \int_1^{\infty} \left| \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{k} \right| \cdot 2 \|\varphi\|_0 dk \leftarrow |\varphi(k) - \varphi(-k)| \leq 2 \sup |\varphi| = 2 \|\varphi\|_0$$

Beide Integrale verschwinden im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$: das erste wegen

$$\left| \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{k} \right| \cdot k = \frac{\varepsilon^2}{k^2 + \varepsilon^2} \leq \begin{cases} 1 & , k \leq \sqrt{\varepsilon} \\ \varepsilon & , k \geq \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

$$(\& \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} 1 dk + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \varepsilon dk \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0);$$

das zweite wegen

$$\left| \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k} \frac{\varepsilon^2}{k^2 + \varepsilon^2} \leq \varepsilon^2 \frac{1}{k^2}$$

$$(\& \int_1^{\infty} \varepsilon^2 \frac{1}{k^2} dk \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0).$$

• Zum anderen gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{k^2 + \varepsilon^2} \varphi(k) dk \stackrel{k = \varepsilon y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 y^2 + \varepsilon^2} \varphi(\varepsilon y) \varepsilon dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} \varphi(\varepsilon y) dy$$

$$\xrightarrow[\text{Übung}]{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^2 + 1} \varphi(0) dy = \pi \varphi(0). \quad \square$$

Was sind die zugehörigen Fundamentallösungen?

$$\mathcal{F}^{-1} \frac{1}{k+i0} = -i\theta(-x), \quad \mathcal{F}^{-1} \frac{1}{k-i0} = i\theta(x).$$

Wir zeigen nur die zweite Identität:

$$\mathcal{F}\theta = \mathcal{F}'\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}(e^{-\varepsilon x}\theta);$$

nun ist aber $e^{-\varepsilon x}\theta \in L^1(\mathbb{R})$, also können wir die Fouriertansformation direkt auswerten:

$$\mathcal{F}(e^{-\varepsilon x}\theta)(k) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\varepsilon + ik} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{k - i\varepsilon}.$$

Nimmt man den \mathcal{F}' -Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$, erhält man die gewünschte Identität.

Beispiel 4.30. $n=1$, $P = -\frac{d^2}{dx^2} + \mu^2$, $\mu > 0$. Dann ist $P(k) = k^2 + \mu^2$, und wir können direkt ausrechnen

$$E(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{k^2 + \mu^2}\right)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} \frac{1}{k^2 + \mu^2} dk = \frac{1}{2\mu} e^{-\mu|x|}$$

(Übung mit Residuensatz: Integrationskontur für $x > 0$ in der oberen Halbebene schließen, Residuum an $k = +i\mu$ auswerten.)

Beispiel 4.31. $n=3$, $P = -\Delta \Rightarrow P(k) = |k|^2$. Nun ist $\frac{1}{|k|^2}$ nicht integrierbar (zu schwacher Abfall für $|k| \rightarrow \infty$), also berechnet man $E = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|k|^2}\right)$ im Distributionssinne als $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ von $u_\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|k|^2} e^{-\varepsilon|k|}\right)$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k| + ix \cdot k}}{|k|^2} dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{-\varepsilon r + ix \cdot x \cos\theta}}{r^2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\varepsilon k + i k |x| \cos \theta} \sin \theta \, d\theta \, dk$$

$$u = \cos \theta \quad = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \frac{1}{\varepsilon - i |x| \cos \theta} \sin \theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon - i |x| u} \, du$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon + i |x| u}{\varepsilon^2 + (|x| u)^2} \, du$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|x|} \arctan\left(\frac{|x| u}{\varepsilon}\right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{|x|} \cdot 2 \arctan\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \frac{2}{|x|} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\pi |x|} (= -E_3).$$