

2.8. Wärmeleitungsgleichung.

- Wir betrachten nun Wärmeleitung (oder Diffusion) auf einem unendlichen Draht ($n=1$), auf einer räumlich unbeschränkten Metallplatte ($n=2$), oder ganz allgemein auf \mathbb{R}^n .
- Wir wollen das folgende **Anfangswertproblem** lösen:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n; \\ u(0,x) = f(x). \end{cases} \quad (*)$$

- Wir argumentieren zunächst formal: die **Fouriertransformation** in x überführt **(*)** in die Gleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(t,k)}{\partial t} + |k|^2 \hat{u}(t,k) = 0, & t > 0, & (\hat{u}(t,k)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot k} u(t,x) dx \\ \hat{u}(0,k) = \hat{f}(k). & & (\hat{f}(k)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot k} f(x) dx \end{cases}$$

Diese können wir (eindeutig) lösen:

$$\hat{u}(t,k) = e^{-t|k|^2} \hat{f}(k).$$

Erinnerung: $\mathcal{F}(K * f)(k) = \hat{K}(k) \hat{f}(k)$; wollen $\hat{K}(k) = \hat{K}_t(k) = e^{-t|k|^2}$, also
 $K_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$

$$\Rightarrow u(t,x) = K_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y) dy$$

- Jetzt zeigen wir, dass dieser Ausdruck tatsächlich eine Lösung von **(*)** definiert, jedenfalls für geeignete f :

Satz 2.30. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beschränkt. Dann ist

$$u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y) dy, \quad t > 0, \quad (**)$$

eine Lösung von (*) mit $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ und

$$u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x) \quad (\text{gleichmässige Konvergenz}).$$

Beweis. Schritt 1: u ist glatt in $t > 0$.

• Es gilt

$$\partial_t^j \partial_x^\alpha K_t(x) = t^{-\frac{n}{2} - 2j - |\alpha|} P_{j\alpha}(t, x) e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad (***)$$

wobei $P_{j\alpha}$ ein Polynom ist.

(Beweis durch Induktion: für $j = \alpha = 0$ gilt dies für $P_{00}(t, x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}$;

und gilt (***) für j, α , so ist:

$$\begin{aligned} \partial_t^{j+1} \partial_x^\alpha K_t &= \partial_t \left(t^{-\frac{n}{2} - 2j - |\alpha|} P_{j\alpha}(t, x) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \\ &= t^{-\frac{n}{2} - 2(j+1) - |\alpha|} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &\quad \times \underbrace{\left(\left(-\frac{n}{2} - 2j - |\alpha|\right) t P_{j\alpha}(t, x) + t^2 \partial_t P_{j\alpha}(t, x) + \frac{|x|^2}{4} \right)}_{=: P_{j+1, \alpha}(t, x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_k} \partial_t^j \partial_x^\alpha K_t &= \partial_{x_k} \left(t^{-\frac{n}{2} - 2j - |\alpha|} P_{j\alpha}(t, x) e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \right) \\ &= t^{-\frac{n}{2} - 2j - (|\alpha|+1)} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &\quad \times \underbrace{\left(t \partial_{x_k} P_{j\alpha}(t, x) - \frac{x_k}{2} \right)}_{=: P_{j, \beta}} \quad \begin{array}{l} \text{k-ter Eintrag} \\ \downarrow \\ (\beta = \alpha + (0, \dots, 1, \dots, 0)). \end{array} \end{aligned}$$

Also fällt $\partial_t^j \partial_x^\alpha K_t(x)$ exponentiell schnell in $|x|$ ab für alle $t > 0$.

• Dies erlaubt es uns, in (**) unter dem Integral abzuleiten.

(z.B. ist

$$\frac{u(t+h, x) - u(t, x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t K_{t+\theta h}(x-y) f(y) dy \quad (\theta = \theta(t, x-y, h) \in [0, 1])$$

nach dem Mittelwertsatz, und die Differenz zu $\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t K_t(x-y) f(y) dy$

ist, vom Betrag,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t K_{t+\theta h}(x-y) - \partial_t K_t(x-y)) f(y) dy \right| \\
 & \stackrel{|f| \leq M \text{ (f beschränkt)}}{\leq} C \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|\partial_t K_{t+\theta h}(z) - \partial_t K_t(z)|}_{= \left| \int_0^{\theta h} \partial_t^2 K_{t+s}(z) ds \right|} dz \\
 & \leq \tilde{C}(t) h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (\text{Note: } \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|} dx < \infty)
 \end{aligned}$$

• Also ist $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, und

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{\partial K_t}{\partial t} - \Delta K_t \right)}_{=0 \text{ (Rechnung / durch Definition!)}} (x-y) f(y) dy = 0.
 \end{aligned}$$

Schritt 2: Anfangsbedingung. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x-y| < \delta$.
Schätzen also

$$\begin{aligned}
 u(t, x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(y) dy - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) f(x) dy}_{= f(x), \text{ da } \int_{\mathbb{R}^n} K_t = 1} \\
 & \text{ab durch} \\
 |u(t, x) - f(x)|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) |f(y) - f(x)| dy \\
 & \leq \underbrace{\int_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |y-x| < \delta}} K_t(x-y) \varepsilon dy}_{\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} K_t(x-y) dy = \varepsilon} + \underbrace{\int_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |y-x| \geq \delta}} K_t(x-y) 2M dy}_{\text{II}}.
 \end{aligned}$$

$M := \sup_{\mathbb{R}^n} |f|$

Wir müssen zeigen, dass **II** $< \varepsilon$ ist, wenn t klein genug ist. Dies

folgt aus

$$\int_{|z| \geq \delta} K_t(z) dz = \int_{|z| \geq \delta} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz$$

$$\stackrel{z = \sqrt{t}w}{=} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\substack{|w| \geq \delta/\sqrt{t} \\ t \xrightarrow{\delta} \infty}} e^{-\frac{w^2}{4}} dw \xrightarrow{t \gg 0} 0.$$

□