

## 2.4. Plancherel-Formel, $L^2$

Wir haben mit Satz 2.5 nur Schwartz-Funktionen behandelt. Beispiele (iv) und (v) in § 2.1 können wir damit also nicht vollständig verstehen. Wir werden jetzt sehen, wie man  $(\hat{\varphi})^\vee = \varphi$  für viel allgemeinere Funktionen  $\varphi$  zeigen kann. Der folgende Satz ist dafür zentral:

Satz 2.8. (Plancherel-Formel) Für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &:= \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Bemerkung.  $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  ist die sogenannte  $L^2$ -Norm von  $\varphi$ .

Beweis von Satz 2.8. Wir schreiben  $\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{ix \cdot k} dk$ , also

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{ix \cdot k} \overline{\varphi(x)} dk dx \\ \text{Vertauschung} &\quad \searrow \\ \text{des Integrations-} & \\ \text{reihenfolge} &\quad \Rightarrow (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix \cdot k} dx} dk \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) \overline{\hat{\varphi}(k)} dk \\ &= (2\pi)^{-n} \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \quad \square\end{aligned}$$

• Die Idee ist nun folgende: ist  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, für die es eine Folge  $\varphi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  gibt mit  $\varphi = L^2\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j$ , so muss insbesondere gelten:  $\|\varphi_j - \varphi_k\|_{L^2} \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0$ . Plancherel gibt dann  $\|\hat{\varphi}_j - \hat{\varphi}_k\|_{L^2} \rightarrow 0$ , also würden wir gerne  $\hat{\varphi}$  als „ $L^2$ -Grenzwert“ von

$\hat{\varphi}_j$  definieren. Die Identität

$$\|\varphi\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{\varphi}\|_{L^2}$$

sollte durch Grenzübergang  $j \rightarrow \infty$  aus  $\|\varphi_j\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{\varphi}_j\|_{L^2}$  folgen. Wenden wir dieselbe Argumentation auf  $\varphi_j = (\hat{\varphi}_j)^\vee$  an, so erwarten wir weiterhin, dass  $\varphi = (\hat{\varphi})^\vee$ .

- Man kann diese Idee auf eine einfache, wenn auch etwas abstrakte, Art und Weise, rigoros implementieren, indem man die Vervollständigung von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  bzgl. des  $L^2$ -Norm  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  einführt (ganz analog zur Definition von  $\mathbb{R}$  als Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  bzgl.  $|\cdot|$ ):

Definition 2.9.  $L^2(\mathbb{R}^n) :=$  Vervollständigung von  $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})$

$$= \{(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} : \varphi_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\varphi_i - \varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_i(x) - \varphi_j(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{i,j \rightarrow \infty} 0\} / \sim,$$

$$\text{wobei } (\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (\psi_i)_{i \in \mathbb{N}} \iff \|\varphi_i - \psi_i\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Definition 2.10. Für  $\varphi = [(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}] \in L^2(\mathbb{R}^n)$  definieren wir  $\hat{\varphi} := [(\hat{\varphi}_i)_{i \in \mathbb{N}}] \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

- Wir bemerken, dass  $\hat{\varphi}$  wohl-definiert ist (d.h. unabhängig von der Wahl  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  des Repräsentanten von  $\varphi$ ): ist nämlich auch  $\varphi = [(\psi_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ , so gilt  $\|\varphi_i - \psi_i\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ , also nach Plancherel  $\|\hat{\varphi}_i - \hat{\psi}_i\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ , also  $[(\hat{\varphi}_i)] = [(\hat{\psi}_i)]$ , wie gewünscht.

- Wir sagen (etwas ungenau), dass eine Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  liegt (also  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ), falls  $\varphi = L^2\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j$  für eine Folge von Schwartz-Funktionen  $\varphi_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , gilt. (Wir identifizieren also die Äquivalenzklasse der  $L^2$ -Cauchy-Folge  $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  mit der Funktion  $\varphi$ .)

Beispiel 2.11. Aus § 2.1 (v):  $f(x) = e^{-|x|} = L^2\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} e^{-(x^2 + \frac{1}{j})^{\frac{1}{2}}}$  (Übung).

• Für  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  ist  $f(x) = L^2\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-x^2/j}$  (Übung).

Satz 2.12. Jede Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , für die  $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx < \infty$  gilt, kann als  $L^2$ -Grenzwert von Schwartzfunktionen geschrieben werden.

Beweis. Schritt 1: Approximation durch kompakt getragene Funktionen.

Wenn  $R \rightarrow \infty$ , so gilt

$$\int_{-R}^R \dots \int_{-R}^R |\varphi(x)|^2 dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx.$$

Setzen wir  $\varphi_R(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x_1|, \dots, |x_n| \leq R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ , so gilt also

$$\|\varphi - \varphi_R\|_{L^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Es genügt also,  $\varphi_R$  durch Schwartz-Funktionen in der  $L^2$ -Norm zu approximieren.

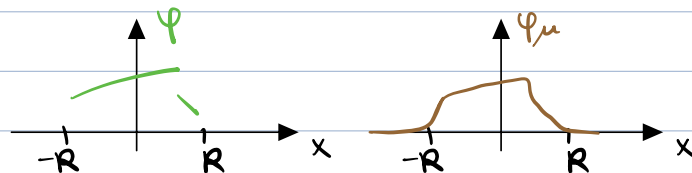
• Sei nun  $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx < \infty$ ,  $\varphi(x) = 0$  für  $|x| > R$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx < \infty$ .

Schritt 2: Glättung. Wir setzen

$$K_\mu(z) = (2\pi\mu)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{2\mu}} \quad (\text{vgl. Beweis von Satz 2.5})$$

und betrachten  $\varphi_\mu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) K_\mu(x-y) dy$ .

Wir werden  $\varphi_\mu$  später als Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$  mit Anfangsbedingung  $\varphi$  zum Zeitpunkt  $t = \mu$  wiedersehen!



$$\text{Es gilt: (i) } |\varphi_\mu(x)| \leq \int_{|y| \leq R} |\varphi(y)| K_\mu(x-y) dy \leq \frac{1}{2} (1 + |\varphi(y)|^2)$$

$$\leq C \max_{|y| \leq R} K_\mu(x-y), \quad C := \int_{|y| \leq R} |\varphi(y)| dy < \infty.$$

Da  $K_\mu(x-y)$  für  $|y| \leq R$  und  $|x| \rightarrow \infty$  schnell abfällt  
 $(K_\mu(x-y) \leq \frac{C_{N,R}}{(1+|x|)^N} \quad \forall N)$ , fällt auch  $|\varphi_\mu(x)|$  schnell ab.

(ii) Ebenso fällt

$$|\partial^\beta \varphi_\mu(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \partial^\beta K_\mu(x-y) dy \right| \\ \leq C \max_{|y| \leq R} |\partial^\beta K_\mu(x-y)|$$

Schnell ab, wenn  $|x| \rightarrow \infty$ .  $= (\text{Polynom in } (x-y)) \cdot K_\mu(x-y)$

(iii) Aus (i) + (ii) folgt:  $\varphi_\mu \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $\mu > 0$ .

(iv) Zu zeigen:  $\|\varphi - \varphi_\mu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0$ .

Nur für Interessierte.

Wir zeigen dies hier nur im Fall, dass  $\varphi$  stetig ist. Dann gibt es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , sodass  $|x-y| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ .

Es folgt:

$$|\varphi(x) - \varphi_\mu(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(y) - \varphi(x)) K_\mu(x-y) dy \right| \\ \leq \int_{|y-x| < \delta} |\varphi(y) - \varphi(x)| K_\mu(x-y) dy \\ + \int_{|y-x| \geq \delta} (|\varphi(y)| + |\varphi(x)|) K_\mu(x-y) dy \\ \leq \varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} K_\mu(x-y) dy}_{=1} + 2(\sup |\varphi|) \int_{|z| \geq \delta} K_\mu(z) dz.$$

Da  $\delta$  fix ist, gilt

$$\int_{|z| \geq \delta} K_\mu(z) dz \stackrel{z = w\sqrt{\mu}}{=} \int_{|w| \geq \delta\sqrt{\mu}} K_\mu(w\sqrt{\mu}) \mu^{\frac{n}{2}} dw \\ = \int_{|w| \geq \delta\sqrt{\mu}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|w|^2}{2}} dw \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0, \\ \underbrace{\delta\sqrt{\mu}}_{\rightarrow \infty \text{ wenn } \mu \rightarrow 0}$$

Wir können also  $\mu$  so klein wählen, dass  $|\varphi(x) - \varphi_\mu(x)| < 2\varepsilon$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt. Für  $|x| \geq 2R$  gilt ausserdem

$$|\varphi_\mu(x)| \stackrel{(i)}{\leq} C \max_{|y| \leq R} K_\mu(x-y) \leq C (2\pi\mu)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{(|x|-R)^2}{2\mu}}$$

$$\Rightarrow \int_{|x| \geq 2R} |\varphi_\mu(x)|^2 dx \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} 0 \quad (\text{Übung}).$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x) - \varphi_\mu(x)|^2 dx \leq \text{vol}(B(2R)) \cdot 2\varepsilon + \int_{|x| \geq 2R} |\varphi_\mu(x)|^2 dx$$

$$< C_R \varepsilon$$

für alle hinreichend kleinen  $\mu > 0$ .

□

Bemerkung 2.13. Im Rahmen der Vorlesung **Mass und Integral** (D-MATH)

wird der Raum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  unter Verwendung der Masstheorie eingeführt.

Er besteht dann aus allen „messbaren“ Funktionen  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

mit  $\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx < \infty$ , wobei  $\int_{\mathbb{R}^n}$  hier das „Lebesgue-Integral“ bezeichnet. Elemente von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sind „fast überall“ definierte Funktionen.

- Satz 2.12 gilt weiterhin — das heisst, dass unsere Definition 2.9 zur masstheoretischen Definition äquivalent ist.
- Von nun an werden wir Elemente von  $L^2(\mathbb{R}^n)$  wie Funktionen behandeln.

Um wieder auf die Fouriertransformation zurückzukommen, bemerken wir, dass per Definition gilt:

$$\text{Satz 2.14. } \varphi \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \check{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (\hat{\varphi})^\vee = \varphi, \quad (\check{\varphi})^\vee = \varphi,$$

$$\begin{array}{ccccccc} \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ [\varphi_j] & & [\hat{\varphi}_j] & & [\check{\varphi}_j] & & [(\hat{\varphi}_j)^\vee] = [\varphi_j] \end{array}$$

$$\text{und } \|\varphi\|_{L^2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j\|_{L^2} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{\varphi}\|_{L^2}. \quad (\text{Plancherel.})$$

Beispiel 2.15. Aus § 2.1 (iv):  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}(k) = \frac{2 \sin k}{k} \in L^2.$

$$\Rightarrow \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-1}^1 1^2 dx = 2$$

$$\stackrel{\text{Plancherel}}{=} (2\pi)^{-1} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2 \sin k}{k}\right)^2 dk,$$

$$\text{d.h. } \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k}\right)^2 dk = \pi.$$