

1.1. Definition; Fragestellungen.

Sei $L > 0$ fest.

• "Definition" 1.1. Eine Fourierreihe ist eine Funktion $f = f(x)$ der Form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f_n \in \mathbb{C} \quad (*)$$

• Falls die Reihe $(*)$ für alle x konvergiert, so ist

$$f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

d.h. f ist L -periodisch.

• Fragen: (i) Welche periodischen Funktionen lassen sich als Fourierreihen ausdrücken? (Und was ist der richtige Konvergenzbegriff?)
(ii) Wie hängen Eigenschaften von f (z.B. Regularität, oder Ausdrücke wie $\int_0^L |f'(x)|^2 dx$) mit den Fourier-Koeffizienten f_n zusammen?

Wir werden solche und ähnliche Fragen im Laufe der Vorlesung beantworten.

• Zunächst eine einfache, umgekehrte Frage: wie kann man die f_n in $(*)$ durch f bestimmen?

Lemma 1.2. $\frac{1}{L} \int_0^L e^{\frac{2\pi i n}{L} x} dx = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$

Beweis Bitte selbst überprüfen. \square

Satz 1.3. Seien $f_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{Z}$) so, dass $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < \infty$.

(i) Dann konvergiert die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$$

absolut und gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen eine L -periodische stetige Funktion f .

(ii) Es gilt $f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n}{L} x} dx$.

Beweis. • Da $|f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| = |f_n|$, folgt die absolute Konvergenz
(d.h. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}| < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$).

• Für den Beweis der gleichmässigen Konvergenz schätzen wir ab:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{|n| \leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x} \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{|n| > N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x} \right| = \sum_{|n| > N} |f_n| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Daher ist f , als gleichmässiger Limes der stetigen und L -periodischen Funktionen $f_N(x) := \sum_{|n| \leq N} f_n e^{\frac{2\pi i n}{L} x}$ selbst stetig und L -periodisch (vgl. Analysis I/II).

• Bei gleichmässiger Konvergenz dürfen Integration und Summation vertauscht werden, also gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i m}{L} x} dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} \int_0^L f_n e^{-\frac{2\pi i m}{L} x} dx \\ &\stackrel{\text{Lemma 1.2}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \delta_{m,n} = f_m. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 1.4. Für $|z| < 1$ ist die Fourierreihe $f_z(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{|n|} e^{inx}$ absolut konvergent und definiert eine 2π -periodische Funktion.

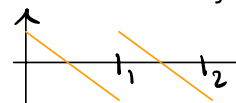
• Explizit ist

$$\begin{aligned} f_z(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (z e^{ix})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (z e^{-ix})^n - 1 \\ &= \frac{1}{1 - z e^{ix}} + \frac{1}{1 - z e^{-ix}} - 1 = \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos x + z^2}. \end{aligned}$$

• Umgekehrt ergibt Satz 1.3 dann die Identität

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos x + z^2} e^{-inx} dx = z^{|n|} \quad (|z| < 1).$$

Beispiel 1.5. Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{2} - x$, fortgesetzt auf $x \in \mathbb{R}$ durch 1-Periodizität. Sollte diese



Funktion als Fourierreihe darstellbar sein, so würden wir **erwarten**, dass die Fourierkoeffizienten f_n durch folgende Rechnung gegeben sein müssten:

$$f_n \stackrel{?}{=} \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = \frac{1}{2\pi i n}.$$

Allerdings konvergiert $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|$ nicht (also kann **Satz 1.3** nicht angewendet werden).

Der schnelle Abfall der Fourierkoeffizienten $z^{|n|}$ (z.B. $2^{-|n|}$ für $z = \frac{1}{2}$) in **Beispiel 1.4** vs. der schwache Abfall in **Beispiel 1.5** wird, zu einem gewissen Grad, durch die folgenden Resultate erklärt.

Satz 1.6 (Riemann-Lebesgue-Lemma, für stetige Funktionen.)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ **stetig** und **L-periodisch**. Dann gilt

$$f_n \rightarrow 0, \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Beweis. Es gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx = \frac{1}{L} \int_a^{L+a} f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx; \quad (*)$$

in der Tat ist ja $g(x) := f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}}$ L-periodisch, und daher

$$\begin{aligned} \int_a^{L+a} g(x) dx &= \int_a^0 g(x) dx + \int_0^L g(x) dx + \int_L^{L+a} g(x) dx \\ &= \int_0^L g(x) dx. \end{aligned} \quad \int_0^a g(x) dx = - \int_a^0 g(x) dx$$

• In $(*)$ setzen wir $x = y + a$:

$$f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(y+a) e^{-\frac{2\pi i n y}{L}} e^{-\frac{2\pi i n a}{L}} dy.$$

Für $a := \frac{L}{2n}$ ist $e^{-\frac{2\pi i n a}{L}} = e^{-i\pi} = -1$, also

$$f_n = -\frac{1}{L} \int_0^L f(y + \frac{L}{2n}) e^{-\frac{2\pi i n y}{L}} dy.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_n &= \frac{1}{2} (f_n + f_n) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx - \frac{1}{L} \int_0^L f(y + \frac{L}{2n}) e^{-\frac{2\pi i n y}{L}} dy \right) \\
&= \frac{1}{2L} \int_0^L [f(x) - f(x + \frac{L}{2n})] e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx. \quad (**)
\end{aligned}$$

- Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f stetig auf dem kompakten Intervall $[-L, 2L]$ stetig ist, ist f gleichmässig stetig.
 $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ sodass für $|n| \geq N$ gilt

$$|f(x) - f(x + \frac{L}{2n})| < \varepsilon \quad (***)$$

(da $|x - (x + \frac{L}{2n})| = |\frac{L}{2n}| \leq \frac{L}{2N}$ kleiner als jede beliebige Schranke ist, wenn N nur gross genug ist).

- Aus (**) erhält man nun

$$\begin{aligned}
|f_n| &\leq \frac{1}{2L} \int_0^L |f(x) - f(x + \frac{L}{2n})| dx \\
&\stackrel{(***)}{\leq} \frac{1}{2L} \int_0^L \varepsilon dx \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

für $|n| \geq N$ — was zu zeigen war. \square

Ist die Funktion $f(x)$ regulärer, so fallen die Fourierkoeffizienten schneller ab:

Satz 1.7. Sei $f \in C^k(\mathbb{R})$ (d.h. f ist k -mal stetig differenzierbar) und L -periodisch. Dann gilt
 $|n|^k |f_n| \rightarrow 0$, $|n| \rightarrow \infty$.

Beweis. Für $n \neq 0$ gilt

$$e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} = \frac{d}{dx} \left(e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \right) \left(-\frac{L}{2\pi i n} \right),$$

also $f_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx$

partielle Integration (k-mal);
Randterme verschwinden,
da $f(0)=f(L)$, $f'(0)=f'(L)$,
..., $f^{(k-1)}(0)=f^{(k-1)}(L)$

$$= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \frac{d^k}{dx^k} \left(e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} \right) \cdot \left(-\frac{L}{2\pi i n} \right)^k dx$$

$$= n^{-k} \cdot \left(\frac{L}{2\pi i} \right)^k \underbrace{\frac{1}{L} \int_0^L f^{(k)}(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{L}} dx}_{=: g_n \text{ (Fourierkoeffizienten von } f^{(k)})}$$

Da nach **Satz 1.6** gilt $|g_n| \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0$, schließen wir also

$$|n^k f_n| = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^k |g_n| \xrightarrow{|n| \rightarrow \infty} 0.$$

□

- Statt **Satz 1.6** zu verwenden, kann man leicht ein schwächeres Resultat zeigen. Und zwar gilt, für stetige L -periodische f ,
 $|f_n| \leq \frac{1}{L} \int_0^L |f(x)| dx$,
d.h. die f_n sind beschränkt.
- Unter Verwendung dieser Tatsache allein gibt der Beweis von **Satz 1.7**:
ist $f \in C^k(\mathbb{R})$ L -periodisch, so ist $|n|^k |f_n|$ beschränkt.
- Umgekehrt gilt (Übung): ist $|f_n| \leq \frac{C}{(1+|n|)^{k+2}}$, so definiert
 $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{\frac{2\pi i n x}{L}}$ eine L -periodische Funktion $f \in C^k(\mathbb{R})$.