

2.3. Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Unsere Erwartung ist nun, dass $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ sich auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gut verhalten.
Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2.5. (i) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} = \mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\check{g} = \mathcal{F}^{-1}g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Die Abbildung

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

ist linear, stetig und bijektiv. Ihr Inverses ist

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni g \mapsto \check{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Für den Beweis von Teil (i) müssen wir verstehen, wie \mathcal{F} und $x^\alpha \partial^\beta$ interagieren.

Lemma 2.6. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\partial_j \varphi, x_j \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und:

(i) $(\partial_j \varphi)^\wedge(k) = i k_j \hat{\varphi}(k).$

(ii) $(x_j \varphi)^\wedge(k) = i \partial_j \hat{\varphi}(k)$ (hier $\partial_j = \frac{\partial}{\partial k_j}$).

(iii) $(\partial_j \varphi)^\vee(x) = -i x_j \check{\varphi}(x).$

(iv) $(x_j \varphi)^\vee(x) = -i \partial_j \check{\varphi}(x).$

Beweis. (i): Wir berechnen

$$\begin{aligned} (\partial_n \varphi)^\wedge(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi(x) e^{-i x \cdot k} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_n} \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) e^{-i x_n k_n} dx_n \right) e^{-i(k_1 x_1 + \dots + x_{n-1} k_{n-1})} dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\underbrace{\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) e^{-i x_n k_n}}_{\mathcal{B}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_n} e^{-i x_n k_n}}_{= -i k_n e^{-i x_n k_n}} dx_n \right) e^{-i(k_1 x_1 + \dots + x_{n-1} k_{n-1})} dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Für alle $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ verschwindet der Randterm \mathcal{B} , da

$$|\mathcal{B}| \stackrel{\text{Lemma 2.3}}{\leq} \frac{C}{1 + |(x_1, \dots, x_{n-1})|} \underbrace{|e^{-i x_n k_n}|}_{=1} \xrightarrow{|x_n| \rightarrow \infty} 0.$$

$$\Rightarrow (\partial_n \varphi)^\wedge(k) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) i k_n e^{-i x_n k_n} dx_n \right) e^{-i(k_1 x_1 + \dots + x_{n-1} k_{n-1})} dx_1, \dots, dx_{n-1} \\ = i k_n \hat{\varphi}(k).$$

(ii) – (iv): Übung. □

Lemma 2.7. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \hat{\varphi}, \check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildungen $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$, $\varphi \mapsto \check{\varphi}$ sind stetig.

Beweis. (i) Wir zeigen $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$k^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(k) \stackrel{\text{Lemma 2.6 (i)}}{=} k^\alpha [(-i x)^\beta \varphi]^\wedge(k)$$

$$\stackrel{\text{Lemma 2.6 (i)}}{=} [(-i \partial)^\alpha (-i x)^\beta \varphi]^\wedge(k), \\ \text{also } |k^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(k)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (-i \partial)^\alpha (-i x)^\beta \varphi(x) e^{-i x \cdot k} dx \right| \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|(-i \partial)^\alpha (-i x)^\beta \varphi(x)|}_{\stackrel{\text{Lemma 2.3}}{\leq} \frac{C}{1+|x|^{n+1}}} dx \\ \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C}{1+|x|^{n+1}} dx < \infty. \quad (\text{da } \partial^\alpha x^\beta \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

$$\Rightarrow \sup_{k \in \mathbb{R}^n} |k^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(k)| < \infty. \text{ Da } \alpha, \beta \text{ beliebig waren, folgt } \hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Die obige Abschätzung zeigt, für $|\alpha|, |\beta| \leq k$: $\|\hat{\varphi}_j\|_k \leq C_k \|\varphi_j\|_{k+n+1}$.

haben wir also eine konvergente Folge $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, so gilt für alle k :

$$\|\hat{\varphi}_j - \hat{\varphi}\|_k \leq C_k \|\varphi_j - \varphi\|_{k+n+1} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

also $\hat{\varphi}_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}$. Folglich ist $\mathcal{F}: \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ stetig. □

Beweis von Satz 2.5. (i) Wir zeigen: $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi = (\hat{\varphi})^\vee$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Wir haben

$$(\hat{\varphi})^\vee(x) = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(k) e^{ix \cdot k} dk \quad (*)$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-iy \cdot k} dy \right) e^{ix \cdot k} dk.$$

(Die Integrale können wir nicht vertauschen: dies würde zu dem Ausdruck

$$\text{führen.}) \quad (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \underbrace{(2\pi)^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot k} dk \right)}_{\substack{\text{Integral konvergiert nicht!} \\ (\text{Für Physiker: der Wert des Integrals} \\ \text{ist } \delta(x-y)!)}} dy$$

Wir führen in $(*)$ einen **konvergenzbeschleunigenden Faktor** ein: und zwar gilt

$$(\hat{\varphi})^\vee(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} e^{ix \cdot k} dk. \quad (**)$$

(Der Beweis ist **völlig analog** zu dem Argument in Schritt 2.(iii) des Beweises von **Satz 1.17**. Im Detail: ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wähle

$R < \infty$ sodass $\int_{|k| > R} |\hat{\varphi}(k)| dk < \varepsilon$, und dann $\mu_0 > 0$ so klein, dass für alle $\mu \leq \mu_0$ $|k| \leq R$ gilt $|\hat{\varphi}(k) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} - \hat{\varphi}(k)| < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(B(R))}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} e^{ix \cdot k} dk - \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{ix \cdot k} dk \right| \\ & \leq \int_{|k| \leq R} |\hat{\varphi}(k) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} - \hat{\varphi}(k)| dk + \int_{|k| > R} |\hat{\varphi}(k) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} - \hat{\varphi}(k)| dk \\ & \leq \int_{|k| \leq R} |\hat{\varphi}(k) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} - \hat{\varphi}(k)| dk + \int_{|k| > R} \underbrace{|\hat{\varphi}(k) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} - \hat{\varphi}(k)|}_{\leq 2|\hat{\varphi}(k)|} dk \\ & < \frac{\varepsilon}{\text{vol}(B(R))} \cdot \text{vol}(B(R)) + 2 \cdot \int_{|k| > R} |\hat{\varphi}(k)| dk < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

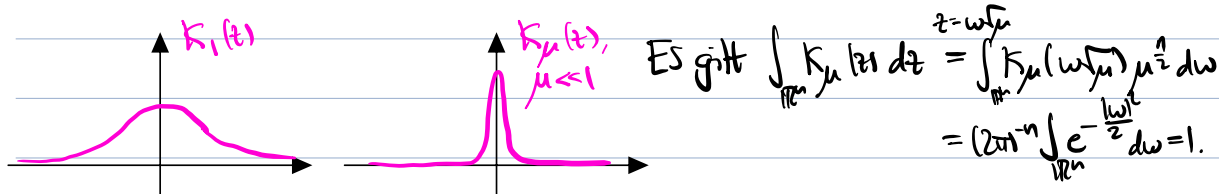
Setzen in $(**)$ die Definition von $\hat{\varphi}$ ein und erhalten

$$(\hat{\varphi})^\vee(x) = \lim_{\mu \rightarrow 0} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) e^{-iy \cdot k} dy \right) e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} e^{ix \cdot k} dk$$

Können Integrale vertauschen, da der Integrand in y, k schnell abfällt

$$= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) K_\mu(x-y) dy, \quad (***)$$

wobei $K_\mu(z) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iz \cdot k} e^{-\frac{\mu |k|^2}{2}} dk = (2\pi\mu)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z|^2}{4\mu}}.$



(Intuition: " $K_\mu(z) \rightarrow \delta(z)$ "...)

$$\text{Also ist } (***) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} [\underbrace{\varphi(x) + (\varphi(y) - \varphi(x))}_{=: E}] K_\mu(x-y) dy$$

$$= \varphi(x) + \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(y) - \varphi(x)) K_\mu(x-y) dy.$$

Nun gilt aber $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq C|x-y|$ für alle y .

(Begründung: Taylor gibt $|\varphi(y) - \varphi(x)| = \left| \int_0^1 (y-x) \cdot \nabla \varphi(x+t(y-x)) dt \right| \leq |y-x| \cdot \max_{z \in \mathbb{R}^n} |\nabla \varphi(z)|$.)

$$\Rightarrow |E| \leq C \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y| K_\mu(x-y) dy$$

$$= C \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |z| K_\mu(z) dz$$

$$\stackrel{z=w\sqrt{\mu}}{=} C \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |w|\sqrt{\mu} K_\mu(w\sqrt{\mu}) \mu^{\frac{n}{2}} dw$$

$$= C \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\underbrace{\sqrt{\mu}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |w| (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|w|^2}{2}} dw}_{< \infty, \text{ unabhängig von } \mu} \right) = 0.$$

Wir haben also gezeigt: $(\hat{\varphi})^\vee(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Auf dieselbe Art und Weise zeigt man $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi = (\check{\varphi})^\vee$. \square