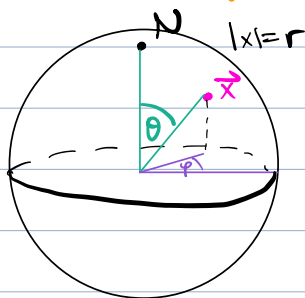


36. Kugelfunktionen

- In Problemen im \mathbb{R}^3 , in denen man Polarkoordinaten verwenden möchte, braucht man häufig den Ausdruck für den Laplace-Operator $\Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ in Polarkoordinaten. (z.B.: elektrostatisches Potential, das durch eine rotationssymmetrische Ladungsdichte $\rho(x)$ erzeugt wird: $\Delta E = 4\pi\rho$.)

- Konvention: $r \geq 0$, $\theta \in (0, \pi)$ (Polarwinkel), $\varphi \in (0, 2\pi)$ (Azimut),

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$



- Es gilt dann (Übung)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + r^{-2} \Delta_{S^2},$$

$$\Delta_{S^2} := \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{sphärischer Laplace-Operator}).$$

- Um Lösungen der Gleichung $\Delta u = 0$ zu verstehen, bietet es sich nun an, Variablen zu separieren: $u(r, \theta, \varphi) = U(r) Y(\theta, \varphi)$; dann

$$0 = \Delta u = \left(U'' + \frac{2}{r} U' \right) Y + U \Delta_{S^2} Y$$

$$\Rightarrow U'' + \frac{2}{r} U' = \lambda U, \quad \Delta_{S^2} Y = -\lambda Y.$$

- Für beliebige Separationskonstanten λ hat die erste Gleichung eine Lösung,

$$U(r) = ar^l + br^{-l-1}, \quad \text{wobei } l \text{ die Gleichung } l(l+1) = \lambda \text{ löst} \\ (\text{und daher auch } -l-1).$$

Sind wir an Lösungen interessiert, die an $r=0$ regulär sind, wollen wir also sicherlich nur $U(r) = ar^l$ mit $l \in \mathbb{N}_0$ zulassen, und daher $\lambda = l(l+1)$

- Was ist mit der zweiten Gleichung? Sie hat den Charakter eines Eigenwertproblems. Wir werden einen Großteil des folgenden Satzes zeigen:

Satz 3.28. Für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ gibt es einen $(2l+1)$ -dimensionalen Raum $\mathcal{H}_l \subset C^\infty(\mathbb{S}^2)$ (glatte Funktionen auf $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|=1\}$, d.h. Einschränkungen auf \mathbb{S}^2 von glatten Funktionen in \mathbb{R}^3) von Eigenfunktionen von $\Delta_{\mathbb{S}^2}$. Ist

$$Y_{l,m} \quad (m=-l, -l+1, \dots, l) \quad (\Delta_{\mathbb{S}^2} Y_{l,m} = l(l+1) Y_{l,m})$$

eine ONB von \mathcal{H}_l in Bezug auf $(f, g) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta, \varphi)} g(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta$, so ist $(Y_{l,m})_{l \in \mathbb{N}_0, |m| \leq l}$ eine vollständige ONB von $L^2(\mathbb{S}^2)$.

Beispiel 3.29. (i) $\Delta 1 = 0$; und $1 = U(r) Y(\theta, \varphi)$ für $U(r) = r^0$, $Y(\theta, \varphi) = 1$.

Hier ist $l=0$: $\Delta_{\mathbb{S}^2} 1 = 0$. Es gilt $\mathcal{H}_0 = \text{span}\{1\}$.

(ii) $\Delta x_j = 0$; und es gilt

$$x_j = r Y_j(\theta, \varphi), \quad \begin{cases} Y_1(\theta, \varphi) = \sin \theta \cos \varphi, \\ Y_2(\theta, \varphi) = \sin \theta \sin \varphi, \\ Y_3(\theta, \varphi) = \cos \theta. \end{cases}$$

Hier ist $l=1$, und

$$\mathcal{H}_1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, Y_3\}. \quad (\Delta_{\mathbb{S}^2} Y_j = 2 Y_j.)$$

• Wir nähern uns der Eigenwertgleichung

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} Y = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y = -\lambda Y$$

durch eine weitere Separation von Variablen:

$$Y(\theta, \varphi) = p(\cos \theta) v(\varphi).$$

Schreiben wir $x = \cos \theta$, ist $\frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x}$, also

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial x} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Wir erhalten also $\frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x} (p(x) v(\varphi)) + \frac{1}{1-x^2} p(x) v''(\varphi) = -\lambda p(x) v(\varphi)$.

Multiplikation mit $(1-x^2) / p(x) v(\varphi)$ ergibt, für eine weitere

Separationskonstante $m \in \mathbb{C}$,

$$v''(\varphi) = -m^2 v(\varphi),$$

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} p(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) p(x) = 0. \quad (*)$$

- Lösungen für $v(\varphi)$ müssen 2π -periodisch sein. Also gilt

$$\Rightarrow v(\varphi) = e^{\pm im\varphi}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

- Für $m=0$ ist $(*)$ gerade die Legendre-Differentialgleichung von Satz 3.27; für $\lambda = l(l+1)$ haben wir also die Lösung P_l .

Die Kugelfunktion Normalisierung (s.u.)

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$$

ist also eine Eigenfunktion von Δ_{S^2} mit Eigenwert $-\lambda = -l(l+1)$.

- Für allgemeine m betrachten wir die Legendre-Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} p(x) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) p(x) = 0 \quad (*)$$

Definition 3.30. Die assoziierten Legendre-Funktionen sind

$$P_{l,m}(x) := (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l$$

für $l \in \mathbb{N}_0$, $m = 0, 1, \dots, l$.

Satz 3.31. (i) $P_{l,m}$ erfüllt $(*)$.

(ii) Für $m \leq l, l'$ gilt

$$\int_{-1}^1 P_{l,m}(x) P_{l',m}(x) dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}.$$

Beweis (i) Wir leiten die Differentialgleichung für P_l ,

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_l(x) - 2x \frac{d}{dx} P_l(x) + l(l+1) P_l(x) = 0,$$

m -mal nach x ab: für $R_{\ell,m}(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$ erhalten wir dann

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} R_{\ell,m}(x) - 2(m+1)x \frac{d}{dx} R_{\ell,m}(x) + (\ell(\ell+1) - m(m+1)) R_{\ell,m}(x) = 0. \quad (**)$$

(Bew. durch Induktion: für $m=0$ klar; falls gültig für m , so erhalten wir durch nochmaliges Ableiten nach x :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} R_{\ell,m} - 2(m+1)x \frac{d}{dx} R_{\ell,m} + (\ell(\ell+1) - m(m+1)) R_{\ell,m} \right) \\ &= \left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dx} R_{\ell,m} - 2x \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} R_{\ell,m} \right] \\ &\quad - \left[2(m+1)x \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} R_{\ell,m} + 2(m+1) \frac{d}{dx} R_{\ell,m} \right] \\ &\quad + (\ell(\ell+1) - m(m+1)) R_{\ell,m} \\ &= (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} R_{\ell,m+1} - 2(m+2)x \frac{d}{dx} R_{\ell,m+1} + (\ell(\ell+1) - (m+1)(m+2)) R_{\ell,m+1}. \end{aligned}$$

Schreiben wir nun $R_{\ell,m}(x) = (1-x^2)^{-\frac{m}{2}} P_{\ell,m}(x)$, so rechnet man einfach nach, dass $P_{\ell,m}$ die Gleichung (*) erfüllt.

(ii). Von (**) lesen wir ab, dass für den Differentialoperator

$$\begin{aligned} L_{\ell,m} f &:= (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} f - 2(m+1)x \frac{d}{dx} f \\ &= (1-x^2)^{-m} \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{m+1} \frac{d}{dx} f \right) \end{aligned}$$

gilt: $L_{\ell,m} R_{\ell,m} = -\lambda_{\ell,m} R_{\ell,m}$, wobei $\lambda_{\ell,m} = \ell(\ell+1) - m(m+1)$.

Außerdem:

- $L_{\ell,m}$ bildet Polynome vom Grad N auf Polynome vom Grad $\leq N$ ab.
- $L_{\ell,m}$ ist selbstadjungiert auf dem Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq N$ mit Skalarprodukt

$$(f, g)_m := \int_{-1}^1 \overline{f(x)} g(x) (1-x^2)^m dx.$$

(Übung.)

Also sind Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander:
für $l \neq l'$ ist

$$0 = (P_{l,m}, P_{l',m})_m = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_{l,m}(x) (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_{l',m}(x) dx \\ = \int_{-1}^1 P_{l,m}(x) P_{l',m}(x) dx.$$

Wir müssen nur noch $N_{l,m} := (P_{l,m}, P_{l,m}) = (P_{l,m}, P_{l,m})_m$ ausrechnen.
haben

$$N_{l,m} = \int_{-1}^1 P_{l,m}(x)^2 (1-x^2)^m dx \\ = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} P_{l,m-1}(x) \cdot \frac{d}{dx} P_{l,m-1}(x) \cdot (1-x^2)^m dx \\ = \left(P_{l,m-1}(x) \frac{d}{dx} P_{l,m-1}(x) \cdot (1-x^2)^m \right) \Big|_{-1}^1 \\ \quad \quad \quad = 0 \\ - \int_{-1}^1 P_{l,m-1}(x) \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^m \frac{d}{dx} P_{l,m-1}(x) \right) dx \\ = (1-x^2)^{m-1} \left((1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2mx \frac{d}{dx} \right) P_{l,m-1}(x) \\ \stackrel{\text{für } m-1}{=} -\lambda_{l,m-1} (1-x^2)^{m-1} P_{l,m-1}(x)$$

$$= \lambda_{l,m-1} \int_{-1}^1 P_{l,m-1}(x)^2 (1-x^2)^{m-1} dx \\ \lambda_{l,m-1} = l(l+1) - (m-1)m \\ = (l-m+1)(l+m) = (l-m+1)(l+m) N_{l,m-1}.$$

Also gilt $N_{l,m} = N_{l,m-1} (l-m+1)(l+m)$
 $= N_{l,m-2} (l-m+1)(l-m+2) \cdot (l+m)(l+m-1)$
 $= \dots$

$$= N_{l,0} \cdot \frac{l!}{(l-m)!} \cdot \frac{(l+m)!}{l!} \\ \left(\text{Satz 3.26 (ii)} : N_{l,0} = \frac{2}{2l+1} \right) \Rightarrow \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}.$$

□

- Also sind die Funktionen $P_{l,m}(\cos \theta) e^{\pm i m \varphi}$ ($l \in \mathbb{N}_0, m=0, \dots, l$) Eigenfunktionen von Δ_{S^2} mit Eigenwert $-l(l+1)$.

Definition 3.32. (Kugelfunktionen.) Für $l=0,1,2, \dots$ und $m=0,1,2, \dots, l$ setzen wir

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(\cos \theta) e^{i m \varphi}$$

$$\begin{aligned} Y_{l,-m}(\theta, \varphi) &= (-1)^m \overline{Y_{l,m}(\theta, \varphi)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l,m}(\cos \theta) e^{-i m \varphi}. \end{aligned}$$

Die Vorzeichen und Normalisierungskonstanten sind Konventionen. Die Normalisierung hat den folgenden Grund:

Satz 3.33. Die Kugelfunktionen $Y_{l,m}$, $|m| \leq l$, bilden eine vollständige Orthonormalbasis des Hilbertraums $L^2(S^2)$ mit Skalarprodukt

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{S^2} \overline{f(\omega)} g(\omega) d\Omega(\omega) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{f(\theta, \varphi)} g(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Beweis. • Orthogonalität: für $m \neq m'$ gilt bereits $\int_0^{2\pi} \overline{e^{i m \varphi}} e^{i m' \varphi} d\varphi = 0$.

Für $m=m'$ berechnen wir dann

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_{l,m}(\cos \theta) \overline{e^{i m \varphi}} P_{l',m}(\cos \theta) e^{i m \varphi} \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\stackrel{x=\cos \theta}{=} 2\pi \int_{-1}^1 P_{l,m}(x) \overline{P_{l',m}(x)} dx \stackrel{\text{Satz 3.31}}{=} 2\pi \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

$$\Rightarrow (Y_{l,m}, Y_{l',m}) = \delta_{ll'}.$$

• Vollständigkeit: wird hier nicht bewiesen.

□

Beispiel 3.34. $Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

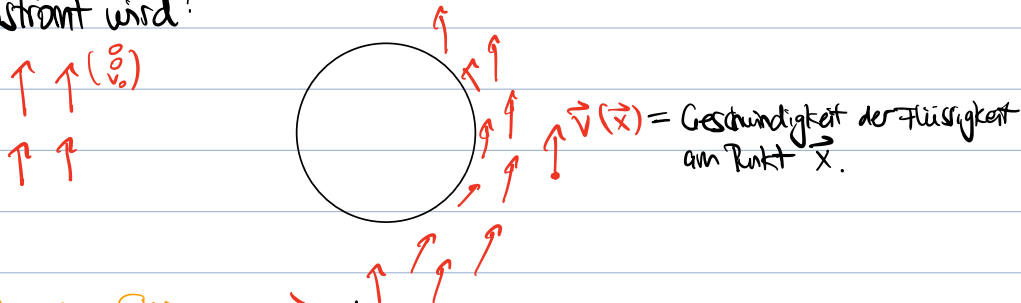
$$Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x - iy}{r}$$

$$Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}$$

$$Y_{1,1}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r}$$

Beispiel 3.35: Strömung um eine Kugel.

Wir betrachten eine Kugel mit Radius $R > 0$, welche von einer Flüssigkeit umströmt wird:



- Stationäre Strömung: \vec{v} ist zeitunabhängig.
- Die Flüssigkeit sei wirbelfrei; das bedeutet $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$. Dann gilt $\vec{v} = \nabla u$
- Die Flüssigkeit sei inkompressibel; das bedeutet $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, also

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \nabla u = \Delta u$$

- $\vec{v}(\vec{x})$ ist tangential zur Kugeloberfläche für $|\vec{x}| = R$, d.h. $\vec{x} \cdot \vec{v}(\vec{x}) = 0$ dort.
- Weit weg von der Kugel soll $\vec{v}(\vec{x}) \sim (0, 0, v_0)$ sein, was aus $u(\vec{x}) \sim v_0 x_3$ folgen würde.

Zusammenfassend:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |\vec{x}| > R, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3, & (*) \\ \vec{x} \cdot \nabla u = 0, & |\vec{x}| = R & (**) \\ u(\vec{x}) \sim v_0 x_3, & |\vec{x}| \rightarrow \infty. & (***) \end{cases}$$

Lösen $(*)$ mittels Separation von Variablen:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{l,m} r^l + b_{l,m} r^{-l-1}) Y_{l,m}(\theta, \varphi),$$

müssen die Koeffizienten $a_{l,m}$, $b_{l,m}$ finden.

- $(**)$ ist äquivalent zu $\frac{\partial u}{\partial r}(R, \theta, \varphi) = 0$, also

$$l a_{l,m} R^{l-1} - (l+1) b_{l,m} R^{l-2} = 0, \quad |m| \leq l \in \mathbb{N}_0. \quad (\#)$$

- Für $l=0$ folgt $b_{0,0} = 0$.

- Wegen $(***)$ (d.h. $|u| = O(r)$) muss zudem $a_{l,m} = 0$ für $l \geq 2$
 $\Rightarrow b_{l,m} = 0$ für $l \geq 2$.

- $a_{0,0}$ ist eine additive Konstante und beeinflusst die physikalische Größe $\vec{v}(\vec{x})$ nicht (da $\nabla a_{0,0} = 0$) \Rightarrow können $a_{0,0} = 0$ setzen.

- Es verbleiben: $a_{1,m}$ und $b_{1,m} = \frac{1}{2} R^3 a_{1,m}$ (wegen $(\#)$ für $l=1$).

$$\Rightarrow u = \sum_{m=-1}^1 a_{1,m} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3}\right) r Y_{1,m}(\theta, \varphi).$$

- Da $r Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) \sim x_1 \pm i x_2$, $r Y_{1,0}(\theta, \varphi) \sim x_3$, folgt aus $(***)$, dass $a_{1,\pm 1} = 0$.

- Wegen $u \sim v_0 x_3$ muss also

$$u(\vec{x}) = v_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{|x|}\right)^3\right) x_3$$

gelten, und dies löst in der Tat $(*) - (***)$.

$$\Rightarrow \vec{v}(\vec{x}) = \nabla u(\vec{x}) = (0, 0, v_0) - \frac{v_0 R^3}{2|x|^5} (3x_1 x_3, 3x_2 x_3, 2x_3^2 - x_1^2 - x_2^2).$$