

2.6. Fouriertransformation rotations-invarianter Funktionen

Im Allgemeinen ist es unmöglich (und nicht unbedingt besonders nützlich), Fouriertransformationen explizit zu berechnen: dies funktioniert nur für spezielle Funktionen (Gauss, Treppenfunktionen, ...). Wir betrachten hier **rotations-invariante Funktionen**, die (natürlich) bei der Beschreibung von Systemen mit Rotationsymmetrie eine wichtige Rolle spielen.

Definition 2.20. Eine Funktion $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist **rotations-invariant**, falls $g(Rx) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, R \in O(n)$.

Hierbei ist $O(n) = \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} : R^T R = I\}$ die Gruppe der **orthogonalen $n \times n$ -Matrizen**.

Lemma 2.21. $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist **rotations-invariant** genau dann, wenn sie die Form $g(x) = f(|x|)$ für eine Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ hat.

Beweis. Ist g von dieser Form, so gilt

$$g(Rx) = f(|Rx|) = f(|x|) = g(x).$$

• Umgekehrt setzen wir für **rotations-invariantes g** :

$$f(r) := g(r, 0, \dots, 0).$$

Dann gilt $g(0) = f(0)$. Für $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ wählen wir $R \in O(n)$ mit $R \frac{x}{|x|} = (1, 0, \dots, 0)$; dann gilt

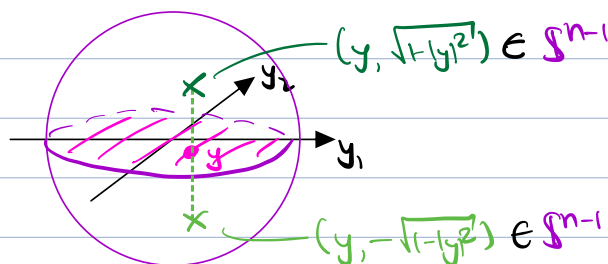
$$g(x) = g(|x| \frac{x}{|x|}) = g(|x| R \frac{x}{|x|}) = g(|x|, 0, \dots, 0) = f(|x|). \quad \square$$

Um solche Funktionen effizient zu integrieren usw., arbeitet man am besten in Polarkoordinaten.

(1) Integrale über Sphären $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x|=1\} \subset \mathbb{R}^n$.

Wir definieren

$$\int_{S^{n-1}} f(y) d\Omega(y) := \int_{\substack{|y| \leq 1 \\ y \in \mathbb{R}^{n-1}}} (f(y, \sqrt{1-|y|^2}) + f(y, -\sqrt{1-|y|^2})) \frac{dy_1 \dots dy_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} \quad (*)$$



• Woher kommt diese Formel? Wir integrieren über die zwei Hemisphären $S_{\pm}^{n-1} = \{x \in S^{n-1} : \pm x \geq 0\}$, welche wir mittels

$$y \mapsto (y, \pm \sqrt{1-|y|^2}), \quad y \in \mathbb{R}^{n-1}, |y| \leq 1,$$

parametrisieren. Ganz allgemein gilt nun: haben wir eine Fläche

$$S = \{p(y) : y \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n,$$

so ist das "Flächenelement" $d\sigma(y)$ (also die Oberfläche eines Parallelepipeds mit Ecke $p(y)$ und Kanten $\frac{\partial p}{\partial y_i}(y)$, $i=1, \dots, n-1$) gegeben durch

$$d\sigma(y) = \sqrt{\det \left(\left(\frac{\partial p}{\partial y_i} \right)^T \left(\frac{\partial p}{\partial y_j} \right) \right)} dy_1 \dots dy_{n-1};$$

und

$$\int_S f(z) d\sigma = \int_U f(p(y)) d\sigma(y), \quad f: S \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung p von S .
(Vgl. Analysis II.)

Im Falle $S = S_+^{n-1}$ nehmen wir $p(y) = (y, \sqrt{1-|y|^2})$; dann ist

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{y_1}{\sqrt{1-|y|^2}} & \frac{y_2}{\sqrt{1-|y|^2}} & \dots & \frac{y_{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^T \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)\right) \overset{\text{Übung!}}{=} 1 + \frac{y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2}{1-|y|^2} = \frac{1}{1-|y|^2}.$$

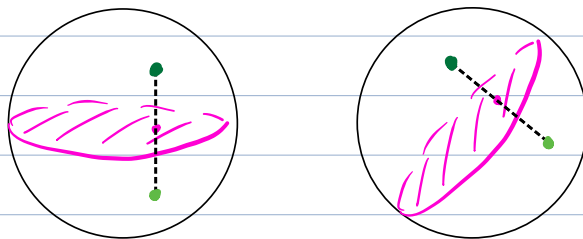
Dies ergibt (*).

(2) Rotationsinvarianz des Integrals über S^{n-1} .

Für jedes $R \in O(n)$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} f(Rx) d\Omega(x) = \int_{S^{n-1}} f(x) dx.$$

(Da das Integral $\int_{S^{n-1}}$ in einer beliebigen Parametrisierung ausgerechnet werden kann, folgt dies z.B. daraus, dass man S^{n-1} einmal wie oben parametrisiert, und einmal via $y \mapsto R(y, \sqrt{1-|y|^2})$.)



(3) Integration über \mathbb{R}^n in Polarkoordinaten:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(r\omega) d\Omega(\omega) \right) r^{n-1} dr. \quad (**)$$

Um dies zu zeigen, parametrisieren wir $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ mittels $r = |x| > 0$ und $y = (\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_{n-1}}{|x|})$ (also $y \in \mathbb{R}^{n-1}, |y| < 1$)

$$p : (r, y) \mapsto (ry_1, \dots, ry_{n-1}, r\sqrt{1-|y|^2}).$$

(Das heißt: wir benutzen unsere vorige Parametrisierung von S_+^{n-1})

für den Punkt $\frac{x}{r} \in S^{n-1}_+$ Eine Rechnung gibt (Übung)

$$|\det(\frac{\partial p}{\partial(r,y)})| = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|y|^2}}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n_+} f(x) dx &= \int_0^\infty \int_{|y|<1} f(p(r,y)) \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}} r^{n-1} dr. \\ &= \int_{S^{n-1}_+} f(r\omega) d\Omega(\omega) \end{aligned}$$

Dies ergibt (**).

Beispiel 2.22. Der Flächeninhalt von S^{n-1} ist

$$|S^{n-1}| = \int_{S^{n-1}} 1 d\Omega(\omega) \stackrel{(1)}{=} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \stackrel{(2)}{=} \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, & k \text{ gerade,} \\ \frac{2^{2k+1}\pi^k k!}{(2k)!}, & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Hierbei ist $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} \frac{dt}{t}$, $s > 0$, die Eulersche Gamma-Funktion mit $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(k) = (k-1)!$

Beweis. Wir zeigen nur (1); (2) folgt dann aus den Rechenregeln für die Γ -Funktion. Der Trick ist, das Integral von $e^{-|x|^2}$ in Polarkoordinaten mittels (**) zu berechnen:

$$\begin{aligned} \pi^{n/2} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2} \underbrace{\int_{S^{n-1}} 1 d\Omega(\omega)}_{=|S^{n-1}|} r^{n-1} dr \\ \stackrel{\substack{t=r^2 \\ r=\sqrt{t}}}{=} &= |S^{n-1}| \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} \\ &= |S^{n-1}| \frac{1}{2} \Gamma(\frac{n}{2}). \end{aligned}$$

□

Wir kehren nun zur Fouriertransformation zurück. Sei also

g rotations-invariant; $\int |g(x)| dx < \infty$.

• Dann ist auch \hat{g} rotations-invariant: für jedes $R \in O(n)$ gilt nämlich $|\det R| = 1$ und daher

$$\begin{aligned}\hat{g}(Rk) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-ix \cdot (Rk)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i(R^T x) \cdot k} dx \\ &\stackrel{x=Py}{\substack{R^T R = I \\ g(Py)=g(y)}} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} g(Py) e^{-iy \cdot k} |\det R| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-iy \cdot k} dy = \hat{g}(k).\end{aligned}$$

• Sei nun $g(x) = g(|x|)$ rotations-invariant (vgl. Lemma 2.21), dann ist

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) e^{-ix \cdot k} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty g(r) \left(\int_{S^{n-1}} e^{-irw \cdot k} d\Omega(w) \right) r^{n-1} dr\end{aligned}$$

Da $\hat{g}(k) = \hat{g}(|k|, 0, \dots, 0)$, folgt also:

Satz 2.23. $\hat{g}(k) = \int_0^\infty g(r) G_n(|k|r) r^{n-1} dr$,

$$G_n(\rho) := \int_{S^{n-1}} e^{-i\rho e_1 \cdot w} d\Omega(w), \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0), \\ e_1 \cdot w = w_1 \quad (\text{für } w = (w_1, \dots, w_n)).$$

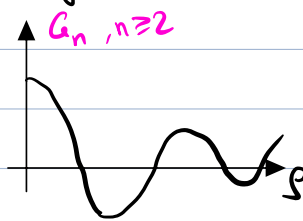
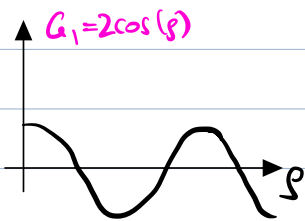
Aus der Rotationsinvarianz des Integrals folgt, dass für $k \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} e^{-iRk \cdot w} d\Omega(w) = \int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot R^T w} d\Omega(w) = \int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot w} d\Omega(w), \quad (\#)$$

also erhalten wir die hübsche Formel $\int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot w} d\Omega(w) = G_n(|k|)$.

(Verwende R mit $Rk = |k|e_1$ in $(\#)$.)

Wir wollen die Funktionen G_n genauer untersuchen.



Lemma 2.24. $G_n(p)$ ist eine holomorphe Funktion von $p \in \mathbb{C}$.

Beweis. Wir müssen die Cauchy-Riemann-Gleichungen zeigen:

$$\frac{d}{dp} G_n(p) \stackrel{!}{=} 0, \quad \text{wobei für } p = x + iy: \quad \frac{d}{dp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Da $p \mapsto e^{-ip \cdot \omega}$ stetig differenzierbar ist, dürfen wir Ableitung und Integral vertauschen, also

$$\frac{d}{dp} G_n(p) = \int_{S^{n-1}} \underbrace{\frac{d}{dp} e^{-ip \cdot \omega}}_{\substack{\text{holomorph} \\ = 0}} d\Omega(\omega) = 0. \quad \square$$

Also (vgl. Funktionentheorie) kann $G_n(p)$ durch eine konvergente Potenzreihe ausgedrückt werden,

$$G_n(p) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j.$$

Unser Ziel ist es, die Koeffizienten a_j zu bestimmen. Der Trick, wie dies elegant erreicht werden kann, ist, eine Differentialgleichung für G_n herzustellen:

Lemma 2.25. Es gilt $G_n''(p) + \frac{n-1}{p} G_n'(p) + G_n(p) = 0$. (***)

Beweis. Mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ (Laplace-Operator) gilt

$$\begin{aligned} \Delta G_n(|k|) &= \Delta \int_{S^{n-1}} e^{-ik \cdot \omega} d\Omega(\omega) \\ &= \int_{S^{n-1}} \Delta e^{-ik \cdot \omega} d\Omega(\omega) \end{aligned}$$

$$= \int_{S^{n-1}} \underbrace{(-w_1^2 - w_2^2 - \dots - w_n^2)}_{= -|w|^2 = -1 \text{ für } w \in S^{n-1}} e^{-ik \cdot w} d\Omega(w)$$

$$= -G_n(|k|).$$

• Wir verwenden jetzt den Ausdruck für Δ in Polarkoordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\Delta_{S^{n-1}}}_{\text{Laplace-Operator auf } S^{n-1}}$$

Dies ergibt die behauptete Gleichung. (Man kann auch direkt $\Delta G_n(|k|)$ mittels $\frac{\partial}{\partial k_j} |k| = \frac{k_j}{|k|}$ ausrechnen.) \square

• Weiter beobachten wir, dass G_n gerade ist: $w \mapsto -w$, Rotationsinvarianz des Integrals

$$\begin{aligned} G_n(-\rho) &= \int_{S^{n-1}} e^{-i(-\rho)e_i \cdot w} d\Omega(w) = \int_{S^{n-1}} e^{-i(-\rho)e_i \cdot (-w)} d\Omega(w) \\ &= \int_{S^{n-1}} e^{-i\rho e_i \cdot w} d\Omega(w) = G_n(\rho). \end{aligned}$$

Also gilt $a_j = 0$, j ungerade.

• Um a_j für gerade j zu bestimmen, berechnen wir

$$G_n'(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j \rho^{j-1} \Rightarrow \frac{1}{\rho} G_n'(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j \rho^{j-2}$$

$$G_n''(\rho) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j \rho^{j-2},$$

$$G_n(\rho) = \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2} \rho^{j-2}.$$

Einsetzen in (**) und Koeffizientenvergleich von ρ^{j-2} gibt, für $j \geq 2$,

$$\underbrace{j(j-1) a_j}_{\text{von } G_n''} + \underbrace{(n-1) j a_j}_{\text{von } \frac{n-1}{\rho} G_n'} + \underbrace{a_{j-2}}_{\text{von } G_n} = 0,$$

also für $j=2m$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_{2m} &= - \frac{a_{2m-2}}{2m(2m+n-2)} \\ &= - \frac{a_{2(m-1)}}{4m(m-1+\frac{n}{2})} \\ &= \frac{(-1)^m}{4^m m(m-1) \dots 1 (m-1+\frac{n}{2})(m-2+\frac{n}{2}) \dots (\frac{n}{2})} a_0 \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \\ &= \frac{(-1)^m}{4^m m! \Gamma(m+\frac{n}{2})} \Gamma(\frac{n}{2}) a_0. \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch a_0 bestimmen: es gilt

$$a_0 = \int_{S^{n-1}} d\Omega(\omega) = |S^{n-1}| \stackrel{\text{Beispiel 2.22}}{=} \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

Folglich ist

$$G_n(\rho) = 2\pi^{n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(m+\frac{n}{2})}. \quad (*)$$

Wir schreiben das mittels Bessel-Funktionen:

Definition 2.26. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Die Bessel-Funktion (erster Gattung) der Ordnung α ist durch die konvergente Potenzreihe

$$J_\alpha(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2m}$$

definiert. Sie ist eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung

$$J_\alpha''(x) + \frac{1}{x} J_\alpha'(x) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) J_\alpha(x) = 0.$$

Durch Vergleich mit (*) erhalten wir nun:

Satz 2.27. $G_n(\rho) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\rho).$

Spezialfälle: $G_1(\rho) = 2 \cos \rho$; $G_3(\rho) = \frac{4\pi \sin \rho}{\rho}$ (\Rightarrow in 3d: $\hat{g}(k) = \frac{4\pi}{|k|} \int_0^\infty g(r) r \sin(|k|r) dr$).