

4.5. Retardierte Fundamentallösung für den d'Alembert-Operator

Wir beschreiben eine weitere Berechnung einer Fundamentallösung, nämlich für den d'Alembert- oder Wellen-Operator (mit $c=1$):

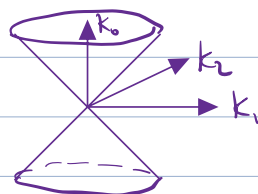
$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

Wir wollen also

$$(-k_0^2 + |\vec{k}|^2) \hat{E}(k) = 1, \quad k = (k_0, k_1, k_2, k_3), \quad (*)$$
$$\vec{k} = (k_1, k_2, k_3),$$

im Distributionssinn (also in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$).

- Da $-k_0^2 + |\vec{k}|^2$ für $|k_0| = |\vec{k}|$ verschwindet, müssen wir zur Lösung von (*) wieder regulisieren.
- Wir versuchen unser Glück mit



$$u_\varepsilon(k) = (- (k_0 - i\varepsilon)^2 + |\vec{k}|^2)^{-1}, \quad \varepsilon > 0.$$

$$= (-k_0^2 + \varepsilon^2 + |\vec{k}|^2 + 2i\varepsilon k_0)^{-1},$$

$\text{II: für } k_0=0: \geq \varepsilon^2 > 0 \quad \text{I: falls } \neq 0: k_0 \neq 0$

was ein Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ definiert; und es existiert der \mathcal{S}' -Limes

$$\hat{E} := (- (k_0 - i0)^2 + |\vec{k}|^2)^{-1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4) \quad (\text{Übung}).$$

- Wir berechnen $E = \mathcal{F}^{-1}(\hat{E}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ unter Verwendung eines konvergenzerzeugenden Faktors:

$$E_{\varepsilon, \varepsilon'}(x) = (2\pi)^{-4} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{-\varepsilon' |\vec{k}|^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{ik_0 x_0}}{- (k_0 - i\varepsilon)^2 + |\vec{k}|^2} d\vec{k} dk_0,$$

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3),$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

- (i) Integration über k_0 : (i.a) Für $x_0 < 0$ schließen wir die k_0 Integrationskontur in der unteren Halbebene — dort hat der Integrand keine

Polstellen, also verschwindet das Integral.

(i.b) Für $x_0 > 0$ schliessen wir die Kontur in der oberen Halbebene, dort gibt es 2 Polstellen, $k_0 = \pm |\vec{k}| + i\varepsilon$.

Also erhält man mit dem Residuensatz:

$$E_{\varepsilon, \varepsilon'}(x) = \begin{cases} 0, & x_0 < 0 \\ (2\pi)^{-4} \cdot 2\pi i \cdot \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\varepsilon' |\vec{k}|^2 + i\vec{k} \cdot \vec{x} - \varepsilon x_0} \left(-\frac{e^{i|\vec{k}|x_0} - e^{-i|\vec{k}|x_0}}{2i|\vec{k}|} \right) d\vec{k}. \end{cases}$$

(ii) Für $x_0 > 0$ verwenden wir Kugelkoordinaten κ , $\cos\theta = z$, φ .

$$E_{\varepsilon, \varepsilon'}(x) = -\frac{i}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{-\varepsilon' \kappa^2 + i\kappa z |\vec{x}| - \varepsilon x_0} \cdot \frac{e^{i\kappa x_0} - e^{-i\kappa x_0}}{2\kappa} \kappa^2 d\kappa dz d\varphi$$

φ -Integral ausführen \Rightarrow

$$= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 e^{-\varepsilon' \kappa^2 + i\kappa z |\vec{x}| - \varepsilon x_0} (e^{i\kappa x_0} - e^{-i\kappa x_0}) \kappa d\kappa dz$$

z -Integral ausführen \Rightarrow

$$= -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-\varepsilon' \kappa^2 - \varepsilon x_0} \frac{e^{i\kappa |\vec{x}|} - e^{-i\kappa |\vec{x}|}}{i\kappa |\vec{x}|} (e^{i\kappa x_0} - e^{-i\kappa x_0}) \kappa d\kappa$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty e^{-\varepsilon' \kappa^2 - \varepsilon x_0} \left(e^{i\kappa(x_0 - |\vec{x}|)} - e^{i\kappa(x_0 + |\vec{x}|)} + e^{-i\kappa(x_0 - |\vec{x}|)} - e^{-i\kappa(x_0 + |\vec{x}|)} \right) d\kappa$$

$$= \frac{1}{8\pi^2 |\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty e^{-\varepsilon' \kappa^2 - \varepsilon x_0} \left(e^{i\kappa(x_0 - |\vec{x}|)} - e^{-i\kappa(x_0 + |\vec{x}|)} \right) d\kappa$$

$$= \frac{e^{-\varepsilon x_0}}{4\pi |\vec{x}|} \left(\delta_{\varepsilon'}(x_0 - |\vec{x}|) + \delta_{\varepsilon'}(x_0 + |\vec{x}|) \right), \quad (**)$$

wobei $\delta_{\varepsilon'}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-\varepsilon' \kappa^2} e^{i\kappa y} d\kappa = (4\pi \varepsilon')^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon'}}$.

(iii) Grenzwerte. Wir lassen nun $\varepsilon \rightarrow 0$ und $\varepsilon' \rightarrow 0$; da $\delta_{\varepsilon'}(x_0 \pm |\vec{x}|) \xrightarrow{\varepsilon' \rightarrow 0} 0$ für $x_0 > 0$, trägt nur der erste Term in (**) bei, und wir erhalten

$$E = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \delta(x_0 - |\vec{x}|), \text{ d.h. } \langle E, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \varphi(|\vec{x}|, \vec{x}) d\vec{x}.$$

Dieses E nennt man die **retardierte Fundamentallösung**.

Satz 4.32. Für $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^4)$ ist

$$u(x_0, \vec{x}) = (E * f)(x_0, \vec{x}) \stackrel{\text{Lösung}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} f(x_0 - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}') d\vec{x}'$$

eine Lösung von

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) u = f.$$

Falls $f|_{t < t_0} = 0$, so gilt auch $u|_{t_0 < 0} = 0$.

Interpretation: Die Lösung aus Satz 4.32 zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ hängt **nur** von den Werten von f zu Zeiten $t_0 \leq t$ ab:

die Radiowendung (u) empfängt man erst nach der Erzeugung des Signals durch die Antenne (f).

- Der Wert von u an (t, \vec{x}) ist eindeutig durch die Werte von f an (t', \vec{x}') mit $t' \leq t$ und $|\vec{x}' - \vec{x}| = c(t - t')$ ($c=1$) bestimmt — Signalausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit!