

4. Distributionen

- **Motivation.** Eine Ladungsdichteverteilung $\rho = \rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, erzeugt ein elektrostatisches Potential u gemäss der Gleichung

$$\Delta u = -4\pi \rho.$$

Die Gesamtladung ist $Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) dx$.

Eine **Punktladung** e im Ursprung soll also beschrieben werden durch eine "Funktion"

$$\rho(x) = e \delta(x) : \quad \begin{array}{l} \rho(x) = 0 \text{ für } x \neq 0, \\ \text{aber dennoch } Q = e. \end{array}$$

Behauptung: für dieses ρ ist $u(x) = \frac{e}{|x|}$.

Beweis: Für $x \neq 0$ verwenden wir Kugelkoordinaten, also $u = \frac{e}{r}$ und daher

$$\Delta u = e(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r)\frac{1}{r} = 0.$$

• Andererseits gilt (formal)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \frac{e}{|x|} dx &= \int_{|x| \in \mathbb{R}} \operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{e}{|x|} dx \\ &\stackrel{\text{Divergenzsatz/Gauss}}{=} \int_{|x|=R} \underbrace{(\operatorname{grad} \frac{e}{|x|}) \cdot \frac{x}{|x|}}_{\text{Normalenvektor}} d\Omega(x) \end{aligned}$$

$$= - \int_{|x|=R} \sum_i \frac{e x_i}{|x|^3} \cdot \frac{x_i}{|x|} d\Omega(x)$$

$$= - \frac{e R^2}{R^3 \cdot R} \int_{|x|=R} d\Omega(x)$$

$$= - \frac{e}{R^2} 4\pi R^2 = -4\pi e. \quad \square$$

- Wir haben bereits häufiger **Integralkerne** gesehen, z.B. $K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, sodass $\int_{\mathbb{R}^3} f(x-y) K_t(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow \infty} f(x)$ gilt, also " $K_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \delta(x)$ "?