

2.7. Wellengleichung.

Wir verwenden jetzt die Fouriertransformation, um die Wellengleichung zu lösen:
in $n+1$ Dimensionen ($n=1,2,3,\dots$) ist dies

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \Delta u(t, x) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) u(t, x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (*)$$

Beispiele: (1) schwingende Saite ($n=1$);

(2) Ausbreitung flacher Wellen auf der Oberfläche ($n=2$);

(3) Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum ($n=3$) — alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Felder lösen (unabhängig voneinander) die Wellengleichung (*).

• Wir wollen das folgende Anfangswertproblem für (*) lösen: gegeben

$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, finde $u: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \\ u(0, x) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x). \end{cases} \quad (*)$$

• Wir ignorieren zunächst jegliche Konvergenz-/Integrationsprobleme und versuchen, eine Formel für u herzuleiten. Dazu verwenden wir die Fouriertransformation in x ,

$$\hat{u}(t, k) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-ix \cdot k} dx.$$

Die Wellengleichung gibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t, k) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) e^{-ix \cdot k} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u(t, x) e^{-ix \cdot k} dx \end{aligned}$$

partielle Integration, ignorieren Randterme

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) \Delta e^{-ix \cdot k} dx = -|k|^2 \hat{u}(t, k).$$

Für festes $k \in \mathbb{R}^n$ ist das eine gewöhnliche Differentialgleichung in t , mit Lösung

$$\hat{u}(t, k) = A(k) \cos(|k|ct) + B(k) \sin(|k|ct).$$

Aus den Anfangsbedingungen für u erhält man

$$\begin{cases} \hat{u}(0, k) = A(k) = \hat{f}(k), \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0, k) = |k|c B(k) = \hat{g}(k), \end{cases}$$

also

$$\hat{u}(t, k) = \hat{f}(k) \cos(|k|ct) + \hat{g}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c}.$$

Wir erhalten also die formale Lösung

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\hat{f}(k) \cos(|k|ct) + \hat{g}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c} \right] e^{ix \cdot k} dk. \quad (\#)$$

Bemerkung. Sind f, g hinreichend glatt und integrierbar (z.B. $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ oder $\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ für $m > n+2$), so konvergiert das Integral $(\#)$ und man darf ∂_x unter dem Integral ableiten — es ist dann $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $(*)$.

Der Ausdruck $(\#)$ ist nicht sehr nützlich, um qualitative Eigenschaften der Lösung zu verstehen.

2.7.1. $n=3$. Wir haben die Funktion $\frac{\sin s}{4\pi s} = G_3(p) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-i p \cdot w} d\Omega(w)$ in § 2.7 gesehen. Allgemeiner gilt

$$\begin{aligned}\int_{|x|=R} e^{ix \cdot k} d\Omega(x) &= R^2 \int_{|y|=1} e^{iRy \cdot k} d\Omega(y) \\ &= R^2 G_3(|k|R) = 4\pi R^2 \frac{\sin(|k|R)}{|k|R},\end{aligned}$$

also ist (mit $R=ct$) der zweite Teil von (*) gleich

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|ct} e^{ix \cdot k} dk \\ = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(k) \frac{t}{4\pi(ct)^2} \int_{|y|=ct} e^{iy \cdot k} d\Omega(y) e^{ix \cdot k} dk.\end{aligned}$$

Führen wir das k -Integral aus, so ist dies weiter

$$= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} g(x+y) d\Omega(y). \quad (**)$$

Analog ist

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(k) \cos(|k|ct) e^{ix \cdot k} dk \\ = \frac{\partial}{\partial t} (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{f}(k) \frac{\sin(|k|ct)}{|k|c} e^{ix \cdot k} dk \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y|=ct} f(x+y) d\Omega(y) \right).\end{aligned}$$

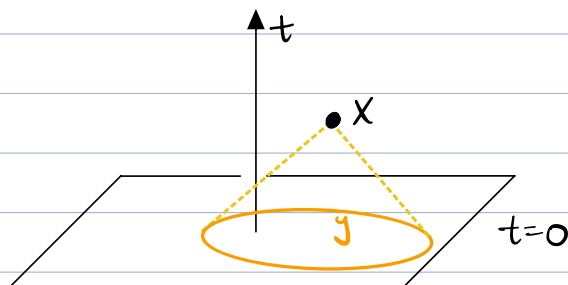
Satz 2.28. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ (oder $C^m(\mathbb{R}^3)$, $m \geq 5$) ist die Lösung des Anfangswertproblems (*) gegeben durch

$$\begin{aligned}u(t, x) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2 t} \int_{|y|=ct} f(x+y) d\Omega(y) \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2 t} \int_{|y|=ct} g(x+y) d\Omega(y) \right]. \quad (***)\end{aligned}$$

Aus der Formel (**) werden zwei Eigenschaften der Lösung ersichtlich:

(i) Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

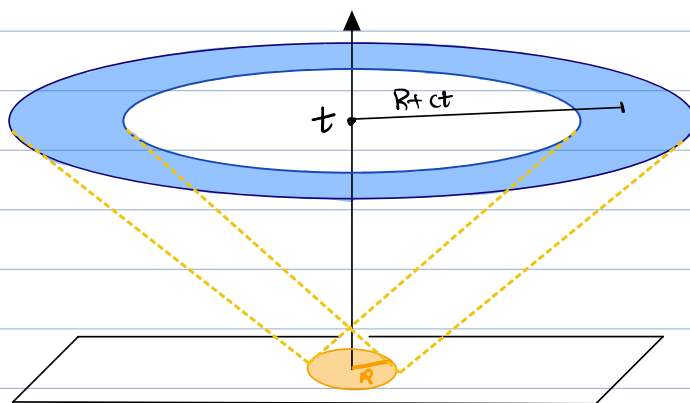
Die Lösung $u(t, x)$ hängt nur von den Anfangsdaten f, g an Punkten y mit $|y - x| = ct$ ab.



Insbesondere breiten sich Wellen nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit c aus.

(ii) (Starkes) Huyghens-Prinzip.

Angenommen, $f(x) = 0 = g(x)$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $|x| \geq R$. Dann gilt $u(t, x) = 0$ für alle x mit $|x| - ct \geq R$. Das heisst: u verschwindet ausserhalb einer Kugelschale mit innerem/äusserem Radius $ct - R$ / $ct + R$: von der Welle ist an einem festen Ort $x \in \mathbb{R}^3$ nichts mehr zu sehen, wenn $t \geq \frac{|x| + R}{c}$.



2.7.2. $n=2$. Gegeben seien nun Anfangsdaten $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Wir erweitern f, g zu Funktionen

$$\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) := f(x_1, x_2)$$

$$G(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2),$$

die also von x_3 unabhängig sind. Wir bezeichnen mit

$$u(t, x_1, x_2, x_3)$$

die Lösung (*) der Wellengleichung in 3+1 Dimensionen mit Anfangsdaten f, g ; dann ist auch u unabhängig von x_3 ; also gilt

$$u(t, x_1, x_2, x_3) = u(t, x_1, x_2), \text{ wobei } u(t, x_1, x_2) = u(t, x_1, x_2, 0);$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

$$0 = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) u(t, x_1, x_2, x_3)$$

$$= \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(t, x_1, x_2).$$

Also löst u das Anfangswertproblem (*) mit Anfangsdaten f, g .

Um die explizite Formel zu bestimmen, berechnen wir

$$\frac{1}{4\pi c t} \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^3 \\ |y|=ct}} G(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) d\Omega(y)$$

obere/untere Halbkugel
+
-

$$= \frac{1}{4\pi c t} \int_{\substack{y \in \mathbb{R}^2 \\ |y| \leq ct}} g(x_1+y_1, x_2+y_2) \frac{ct \, dy_1 dy_2}{\sqrt{(ct)^2 - y_1^2 - y_2^2}} \cdot 2$$

Parametrisation Kugel-
oberfläche mittels

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1, y_2, \pm \sqrt{(ct)^2 - y_1^2 - y_2^2})$$

$$= \frac{1}{2\pi c} \int_{|y| \leq ct} g(x+y) \frac{dy}{\sqrt{(ct)^2 - |y|^2}}.$$

Satz 2.29. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ (oder $C^m(\mathbb{R}^2)$, $m \geq 5$) ist die Lösung des Anfangswertproblems (*) gegeben durch

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|y| \leq ct} f(x+y) \frac{dy}{\sqrt{(ct)^2 - |y|^2}} \right) + \int_{|y| \leq ct} g(x+y) \frac{dy}{\sqrt{(ct)^2 - |y|^2}} \right].$$

Es gilt immer noch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (Punkt (i) oben). Das starke Huyghens-Prinzip gilt allerdings nicht mehr: wir integrieren f, g über die gesamte Kreisscheibe $|y| \leq ct$, nicht nur über ihren Rand. Ist also

$$f(x) = 0 = g(x), \quad |x| \geq R,$$

so kann man nur schließen, dass

$$u(t, x) = 0, \quad |x| \geq t + R;$$

aber im Allgemeinen ist $u \neq 0$ im Inneren $|x| < t + R$.

(Übung: wirf einen Stein in einen Teich.)