

4.1. Temperierte Distributionen

Distributionen können nicht an einzelnen Punkten ausgewertet werden, aber sie können sehr wohl integriert werden — zumindest gegen geeignete Funktionen.

Definition 4.1. Eine temperierte Distribution auf \mathbb{R}^n ist eine stetige lineare Abbildung $\omega: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \langle \omega, \varphi \rangle$.

(i) $\langle \omega, \varphi + \lambda \psi \rangle = \langle \omega, \varphi \rangle + \lambda \langle \omega, \psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{C};$

(ii) $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \langle \omega, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle \omega, \varphi \rangle$

Der Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ von Distributionen ist ein Vektorraum mit

$$\langle \omega_1 + \lambda \omega_2, \varphi \rangle := \langle \omega_1, \varphi \rangle + \lambda \langle \omega_2, \varphi \rangle.$$

Lemma 4.2. Die Stetigkeit von ω ist äquivalent dazu, dass $C < \infty$ und $k \in \mathbb{N}_0$ existieren, sodass

$$|\langle \omega, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_k \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (*)$$

gilt. Wir verwenden hier $\|\varphi\|_k := \sup_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leq k \\ x \in \mathbb{R}^n}} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$ (Definition 2.1).

Beweis. Gilt (*), so folgt für $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, dass

$$|\langle \omega, \varphi \rangle - \langle \omega, \varphi_n \rangle| = |\langle \omega, \varphi - \varphi_n \rangle| \leq C \|\varphi - \varphi_n\|_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

• Für die Umkehrung bemerken wir, dass ω stetig on $\varphi=0$ ist, wenn ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$d(0, \psi) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{\|\psi\|_k}{1 + \|\psi\|_k} < \delta \Rightarrow |\langle \omega, \psi \rangle| < 1.$$

Sei nun k_0 so, dass $\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\delta}{2}$. Falls $\|\psi\|_{k_0} < \frac{\delta}{2k_0}$, so folgt

$$d(0, \psi) < \sum_{k=0}^{k_0-1} \|\psi\|_k + \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k} \leq k_0 \|\psi\|_{k_0} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

und daher $|\langle \omega, \psi \rangle| < 1$.

Für allgemeine $0 \neq \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist aber $\psi := \varphi \cdot \frac{\delta}{4k_0 \|\varphi\|_{k_0}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\psi\|_{k_0} = \frac{\delta}{4k_0} < \frac{\delta}{2k_0}$, also

$$|\langle \omega, \varphi \rangle| = \frac{4k_0}{\delta} \|\varphi\|_{k_0} |\langle \omega, \psi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{k_0}, \quad C = \frac{4k_0}{\delta}. \quad \square$$

Beispiel 4.3. • Dirac- δ -Distribution. Wir definieren

$$\delta: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(0).$$

Linearität: klar. Stetigkeit: wir verwenden das Kriterium von Lemma 4.2:

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| = |\varphi(0)| \leq \|\varphi\|_0.$$

• Notation in der Physik: $\langle \delta, \varphi \rangle =: \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx$.

Beispiel 4.4. $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ definiert ein Element von $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In der Tat gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \cdot \sup |\varphi| dx = \|f\|_{L^1} \|\varphi\|_0 = C \|\varphi\|_0.$$

Beispiel 4.5. Reguläre Distributionen sind definiert als die Distributionen

von der Form $\omega_f: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ für ein $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(i) $\omega_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: Linearität in φ ist klar; Stetigkeit folgt aus

Beispiel 4.4, da $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. (zur Erinnerung: $|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+1}}$, und $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} < \infty$.)

(ii) Man identifiziert ω_f und f . Das ist erlaubt, da $\omega_f = \omega_g$ für

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ impliziert, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \langle w_f, \overline{f} - \overline{g} \rangle - \langle w_g, \overline{f} - \overline{g} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - g(x)) (\overline{f(x)} - \overline{g(x)}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f - g|^2 dx \quad \Rightarrow f = g. \end{aligned}$$

Dies erlaubt uns Schwartzfunktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit der Distribution "Integration gegen f " zu identifizieren.

Um zu verstehen, wie eine Folge von Funktionen oder Distribution z.B. gegen $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergieren kann, führen wir ein:

Definition 4.6. Eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Distributionen konvergiert gegen $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, falls

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): \langle w_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle w, \varphi \rangle.$$

Man schreibt $w_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} w$.

Satz 4.7. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int f(x) dx = 1$. Setze $f_j(x) := j^n f(jx)$.

Dann gilt $f_j \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$ wenn $j \rightarrow \infty$.

Beweis. Beweisen dies nur im Fall $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. (Für allgemeine f benutzt man dann ein Approximationsargument.) Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(x) dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) \varphi(0) dx}_{=: I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx}_{=: II}.$$

$$\cdot \quad I = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} j^n f(jx) dx \stackrel{x = \frac{z}{j}}{=} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} f(z) dz = \varphi(0).$$

$$\cdot \quad |II| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |j^n f(jx)| \cdot C|x| dx \stackrel{x = \frac{z}{j}}{=} \underbrace{C}_{< \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| |z| dz \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{Also } \int f_j \varphi dx \rightarrow \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

□

Beispiel 4.8. $f(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$
 $\Rightarrow f_{1/t}(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{\mathcal{J}'} \delta(x).$

Ohne Beweis geben wir noch an:

Satz 4.9. Für jedes $f \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ gibt es eine Folge von Schwartz-Funktionen $f_j \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, sodass
$$f = \mathcal{J}'\text{-}\lim_{j \rightarrow \infty} f_j.$$