

2. Fouriertransformation

- Wir wenden uns jetzt der Zerlegung von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ in $e^{ik \cdot x}$ -Bestandteile zu. (Hierbei ist $k \in \mathbb{R}^n$ und $k \cdot x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$ das Skalarprodukt.)
- Da wir **keine Periodizität von f** annehmen, erwarten wir, dass alle $k \in \mathbb{R}^n$ eine Rolle spielen. (Im Gegensatz dazu brauchen wir uns bei L -periodischen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ nur um $k = \frac{2\pi n}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$, zu kümmern, da nur für diese k die Funktion $x \mapsto e^{ikx}$ selbst L -periodisch ist.)

- Wir verallgemeinern Definition 1.14 wie folgt: für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < \infty$:
 $(\mathcal{F}f)(k) = \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot k} dx, \quad k \in \mathbb{R}^n. \quad (\mathcal{F})$

Wir werden für diverse Klassen von Funktionen f zeigen, dass umgekehrt gilt:

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ix \cdot k} dk. \quad (\mathcal{F}^{-1})$$

Wir schreiben allgemeiner für eine Funktion $g(k)$ ($k \in \mathbb{R}$):

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \check{g}(x) := (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ix \cdot k} dk.$$

- Ein wichtiger Nutzen der Fouriertransformation ist die Lösung von bestimmten partiellen Differentialgleichungen (vgl. Satz 1.17); **später**. Der wesentliche Punkt ist, dass für geeignete f gilt:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)(k) = ik_j (\mathcal{F}f)(k)$$

(Beweis für $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, d.h. $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $\exists R < \infty$ sodass $f(x) = 0$ $|x| \geq R$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right)(k) &= \int_{-\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ik \cdot x} dx = \underbrace{f(x) e^{-ik \cdot x}}_{=0} \Big|_{-\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} - \int_{-\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} (e^{-ik \cdot x}) dx \\ &= ik_j \int_{-\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} f(x) e^{-ik \cdot x} dx = ik_j (\mathcal{F}f)(k). \quad (= -ik_j e^{-ik \cdot x} \quad \square) \end{aligned}$$