

### 4.3. Fundamentallösungen für $\Delta$

Wir kehren nun zu unserem ersten Beispiel zurück. Allgemeiner betrachten wir die Poisson-Gleichung

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (n \geq 2), \quad (*)$$

wobei  $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  vorgegeben ist. Wir suchen eine Lösung im Distributionssinn, also  $u \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n).$$

Dieses Problem ergibt auch Sinn für  $f \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$ . Der Fall  $f = \delta$  hat eine besondere Bedeutung:

Definition 4.23. Eine Fundamentallösung für einen Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{C},$$

mit konstanten Koeffizienten ist eine Distribution  $E \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^n)$  mit

$$L E = \delta.$$

- Für  $(*)$  suchen wir nun  $E$  mit  $\Delta E = \delta$ . Wozu ist das nützlich? Ist ein beliebiges  $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$  gegeben, so gilt

$$\Delta(f * E) = f * \Delta E = f * \delta \stackrel{\text{Beispiel 4.21}}{=} f. \quad (**)$$

- Also ist  $u = f * E$  Lösung von  $(*)$ . (Man kann zeigen, dass dieses  $u$  eine glatte Funktion ist, also eine reguläre Lösung von  $(*)$  definiert.)
- Um  $\Delta E = \delta$  zu lösen, machen wir den Ansatz

$$E(x) = \psi(|x|) \quad (x \neq 0),$$

wobei wir also insbesondere  $\Delta \psi(x) = 0$  für  $x \neq 0$  wollen, also in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi(r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r) = 0.$$

Eine Lösung ist

$$\psi(r) = \begin{cases} c_n r^{-n+2}, & n > 2 \\ c_2 \log r, & n = 2. \end{cases}$$

Die Konstanten  $c_n$  sind noch zu bestimmen.

(Eine weitere Lösung ist  $\psi(r) = c$ , aber dann ist  $\Delta c = 0$ .)

Lemma 4.24.  $\langle E, \varphi \rangle := \int \psi(|x|) \varphi(x) dx$  ( $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ) definiert eine temperierte Distribution  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Beweis

$$\begin{aligned} \left| \int \psi(|x|) \varphi(x) dx \right| &\leq \int |\psi(|x|)| (1+|x|^2)^{-2} \cdot \underbrace{(1+|x|^2)^2}_{\leq C \|\varphi\|_4} |\varphi(x)| dx \\ &\leq C \|\varphi\|_4 \cdot C', \end{aligned}$$

Schwartz Norm

wobei für  $n \geq 3$  gilt

$$C' := \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(|x|)| (1+|x|^2)^{-2} dx$$

$$\begin{aligned} &= \text{area}(S^{n-1}) |c_n| \int_0^\infty r^{-n+2} (1+r^2)^{-2} r^{n-1} dr \\ &= \text{area}(S^{n-1}) |c_n| \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2} dr < \infty. \end{aligned}$$

Ebenso ist  $C' < \infty$  für  $n=2$ . □

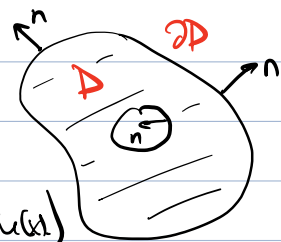
Wir wollen nun  $\Delta E$  (im Distributionensinne) berechnen. Dafür brauchen wir folgende Identität zur partiellen Integration:

Satz 4.25. (Greensche Identität.) Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand  $\partial D$ . Für  $x \in \partial D$  sei  $n(x)$  der nach aussen zeigende Einheitsnormalenvektor. Dann gilt für alle  $C^2$ -Funktionen

$u, v$  auf  $D \cup \partial D$ :

$$\int_D (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) dx$$

$$= \int_{\partial D} \left( \frac{\partial u}{\partial n} v - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\Omega(x). \quad \left( \frac{\partial}{\partial n}(x) = n(x) \cdot \nabla u(x) \right)$$



Beweis Der Gaußsche Divergenz gibt

$$\int_D (\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v) dx = \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u \cdot v - u \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) dx$$

$$= \int_{\partial D} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u \cdot v - u \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} v \right) \underbrace{n_i(x)}_{i\text{-te Komponente von } n(x)} dx.$$

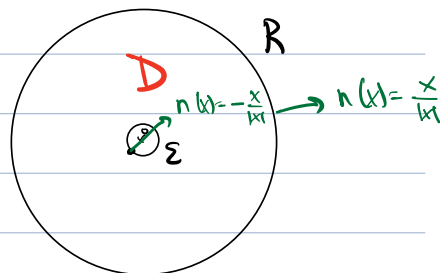
$\square$

Wir berechnen nun für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle \stackrel{\text{Def. 4.14}}{=} \langle E, \Delta \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x|) \Delta \varphi(x) dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq R} \psi(|x|) \Delta \varphi(x) dx.$$

Wir verwenden Satz 4.25 mit  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon \leq |x| \leq R\}$ .



Da  $\Delta \psi(|x|) = 0$  auf  $D$  gilt, haben wir

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\partial D} \psi(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) - \frac{\partial \psi(|x|)}{\partial n} \varphi(x) d\Omega(x).$$

Da  $\varphi, \frac{x}{|x|} \cdot \nabla \varphi$  schnell gegen 0 gehen wenn  $|x| \rightarrow \infty$ , können wir den Limes  $R \rightarrow \infty$  ausführen; es bleibt

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x|=\varepsilon} \psi(|x|) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) - \frac{\partial \psi(|x|)}{\partial n} \varphi(x) d\Omega(x) \right).$$

• Im ersten Term schätzen wir ab  $|\frac{\partial \psi}{\partial n}(x)| \leq \|\psi\|_1$ , also

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=\varepsilon} \psi(x) \frac{\partial \psi}{\partial n}(x) d\Omega(x) \right| &\leq C \int_{|x|=\varepsilon} |x|^{-n+2} d\Omega(x) \\ &= C \left( r^{-n+2} \cdot r^{n-1} \text{area}(\mathbb{S}^{n-1}) \right) \Big|_{r=\varepsilon} \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

• Im zweiten Term berechnen wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}(x) = - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(x) = -\psi'(x) = -\tilde{c}_n |x|^{-n+1},$$

wobei  $\tilde{c}_n = \begin{cases} (-n+2)c_n, & n \geq 3, \\ c_2, & n=2. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Also } \langle \Delta E, \psi \rangle &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} \frac{\partial \psi}{\partial n}(x) \psi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi'(\varepsilon) \cdot \int_{|x|=\varepsilon} (\psi(0) + o(|x|)) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \tilde{c}_n \varepsilon^{-n+1} \text{area}(\mathbb{S}^{n-1}) \varepsilon^{n-1} (\psi(0) + o(\varepsilon)) \right) \\ &= \tilde{c}_n \text{area}(\mathbb{S}^{n-1}) \psi(0). \end{aligned}$$

Damit dies  $= \langle \delta, \psi \rangle$  ist, muss also  $\tilde{c}_n = \frac{1}{\text{area}(\mathbb{S}^{n-1})} \stackrel{\text{Beispiel 2.22}}{=} \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}}$  gelten.

Wir haben bewiesen:

Satz 4.26. (Fundamentallösung von  $\Delta$ ). Die Distribution

$$E = \begin{cases} \frac{\Gamma(n/2)}{2\pi^{n/2}(2-n)} |x|^{-n+2}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x|, & n=2 \end{cases}$$

ist eine Fundamentallösung von  $\Delta$ , d.h.  $\Delta E = \delta$ .

z.B. ist  $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$  ( $n=3$ ); vgl. Motivation vom Beginn dieses Kapitels.

Unter Verwendung von  $(*)$  können wir also die Gleichung

$$\Delta u(x) = -4\pi p(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (*)$$

für  $p \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$  lösen durch

$$u = -4\pi E * p \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}^3).$$

In der Tat gilt sogar, dass die Faltung

$$-4\pi(E * p)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{p(y)}{|x-y|} dy =: u(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

eine glatte Funktion definiert, welche  $(*)$  löst,