

### 3.4. Schwingungen einer kreisförmigen Membran

Wir betrachten noch kurz ein weiteres physikalisches System, für das wir Eigenfunktionen und Eigenwerte gewinnbringend einbringen können:

eine kreisförmige elastische Membran mit Radius  $R > 0$ , die am Rand festgehalten wird. Bewegungsgleichung:

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^2, |x| < R, \\ u(t, x) = 0, & |x| = R. \end{cases} \quad (*)$$

(+ Anfangsbedingungen, um die wir uns hier nicht kümmern werden.)

• Wir suchen separate Lösungen

$$u(t, x) = e^{i\omega t} v(x), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

welche (\*) lösen genau dann, wenn

$$\begin{cases} -\frac{1}{c^2} \omega^2 v(x) - \Delta v(x) = 0, & |x| < R, \\ v(x) = 0, & |x| = R. \end{cases} \quad (*)$$

Angeichts der Randbedingung bietet es sich an, in Polarkoordinaten  $r, \varphi$  zu arbeiten, also  $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ ; dann ist

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + r^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) v(r, \varphi) = -\frac{\omega^2}{c^2} v(r, \varphi) \\ v(R, \varphi) = 0. \end{cases}$$

• Wir separieren weiter:

$$v(r, \varphi) = e^{im\varphi} w(r), \quad m \in \mathbb{N}_0. \quad (m < 0 \text{ via komplexe Konjugation})$$

Dann löst  $w$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} w'' + \frac{1}{r} w' + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) w = 0, & 0 < r < R, \\ w(R) = 0. \end{cases}$$

Wir verlangen, dass  $v$  am Ursprung  $x=0$  glatt ist; man kann zeigen, dass dies impliziert, dass  $w(r) = O(r^m)$ .

- Schreiben wir  $w(r) = J(\frac{\omega}{c} r)$ , so erfüllt  $J(\rho)$  ( $\rho = \frac{\omega}{c} r$ )
 
$$\begin{cases} J''(\rho) + \frac{1}{\rho} J'(\rho) + (1 - \frac{m^2}{\rho^2}) J(\rho) = 0, \\ J(\frac{\omega}{c} R) = 0. \end{cases}$$

Dies ist die Besselsche Differentialgleichung mit Lösung  $J = J_m$ .

- Die Randbedingung bestimmt die Frequenz  $\omega$ : wir nummerieren die Nullstellen von  $J_m$  via

$$0 < x_{m,1} < x_{m,2} < \dots$$

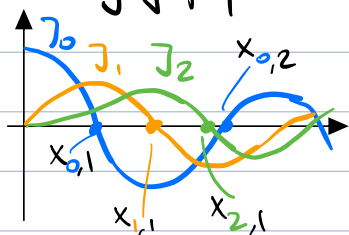
$$\Rightarrow \omega_{m,j} = \frac{c}{R} x_{m,j} \text{ mit separaten reellen Lösungen}$$

$$v_{m,j}(r, \varphi) = J_m\left(\frac{\omega_{m,j}}{c} r\right) \cos(m(\varphi - \varphi_0)),$$

$$u_{m,j}(t, r, \varphi) = v_{m,j}(r, \varphi) \cos(\omega_{m,j}(t - t_0)).$$

**Bemerkung.** Alle  $v_{m,j}$  sind orthogonal bzgl.  $(f, g) = \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \overline{g(r, \varphi)} r d\varphi dr$ . (Dies folgt aus der Selbstadjungiertheit von  $\Delta^0$ :  $(\Delta f, g) = (f, \Delta g)$  für  $f, g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $f = g = 0$  für  $|x| = R$  — Übung.)

- Niedrigste Schwingungsfrequenzen von  $x_{0,1} = 2.40$ ,

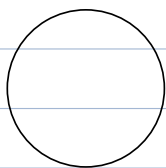


$$x_{1,1} = 3.83,$$

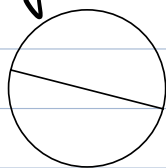
$$x_{2,1} = 5.13,$$

$$x_{0,2} = 5.52.$$

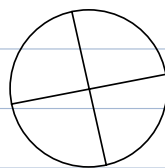
- Qualitative Beschreibung von  $v_{m,j}$  via Knotenlinien = Nullstellen:



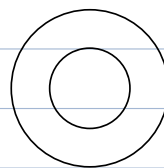
$$\omega_{0,1} = 2.40 \frac{c}{R}$$



$$\omega_{1,1} = 3.83 \frac{c}{R}$$



$$\omega_{2,1} = 5.13 \frac{c}{R}$$



$$\omega_{0,2} = 5.52 \frac{c}{R}$$