

3.1. Vektorräume mit Skalarprodukt; Hilberträume.

Wir betrachten hier \mathbb{C} -Vektorräume V mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) , d.h.

(i) $(f, g) = \overline{(g, f)} \quad \forall f, g \in V;$

(ii) $(f, \lambda g + \mu h) = \lambda (f, g) + \mu (f, h) \quad \forall f, g \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{C};$

(iii) $(f, f) \geq 0 \quad \forall f \in V$, und $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Beispiel 3.1. (a) $V = \mathbb{C}^n$, $(f, g) = \sum_{j=1}^n \overline{f_j} g_j$ ($f = (f_1, \dots, f_n)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$).

(b) $V = \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx$. (Das Integral konvergiert, da $|f(x)|, |g(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^{n+1}} \Rightarrow |\overline{f(x)} g(x)| \leq \frac{C^2}{(1+|x|^{n+1})^2}$ ist integrierbar.)

(c) $V = L^2(\mathbb{R}^n)$, $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx$. (Das Integral konvergiert, da $|\overline{f(x)} g(x)| \leq \frac{1}{2} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$, und $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx, \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx < \infty$.)

(d) $V = \ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2 := \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$,
 $(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n$.

(Da $|\overline{a_n} b_n| \leq \frac{1}{2} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$, ist (a, b) wohl-definiert.)

Lemma 3.2 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Für alle $f, g \in V$ gilt

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|, \quad \text{wobei } \|f\| := \sqrt{(f, f)} \geq 0. \quad (*)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f, g linear abhängig sind (d.h. $f = \lambda g$ oder $g = \mu f$).

Beweis. Für $g = 0$ ist alles klar; betrachten also nur den Fall $g \neq 0$.

Nun gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$0 \leq (f - \lambda g, f - \lambda g) = (f, f) - \lambda (f, g) - \overline{\lambda} (g, f) + |\lambda|^2 (g, g)$$

$$= \|f\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\lambda (f, g)) + \lambda^2 \|g\|^2.$$

Für $\lambda = \frac{\overline{(f, g)}}{\|g\|^2}$ folgt:

$$0 \leq \|f\|^2 - 2 \frac{|(f, g)|^2}{\|g\|^2} + \frac{|(f, g)|^2}{\|g\|^4} \|g\|^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{|(f, g)|^2}{\|g\|^2} \leq \|f\|^2.$$

- Gleichheit gilt genau dann, wenn $0 = (f - \lambda g, f - \lambda g)$ für dieses λ gilt; gemäss (iii) folgt dann $f = \lambda g$.
- Umgekehrt gilt für $f = \lambda g$ in (*) ganz offenbar Gleichheit. \square

Korollar 3.3. $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ definiert eine Norm auf V , d.h.

$$(i) \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \quad \forall f \in V, \lambda \in \mathbb{C},$$

$$(ii) \quad \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in V,$$

$$(iii) \quad \|f\| \geq 0, \quad \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Beweis. Nur die Dreiecksungleichung (ii) ist nicht offensichtlich. Haben

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g)$$

$$= (f, f) + 2 \operatorname{Re}(f, g) + (g, g)$$

$$\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f\|^2 + 2 \|f\| \|g\| + \|g\|^2$$

$$= (\|f\| + \|g\|)^2.$$

\square

Wir können also "Geometrie" in V machen, ungeachtet der Tatsache, dass V unendlich-dimensional sein darf. Konkret:

Definition 3.4. Eine (endliche oder unendliche) Familie $(\varphi_j)_{j \in I}$ von $\varphi_j \in V$, $\varphi_j \neq 0 \forall j$, heisst:

(i) orthogonal (oder orthogonales System), falls $(\varphi_j, \varphi_k) = 0 \forall j \neq k$

(ii) orthonormales System, falls zusätzlich zu (i) gilt

$$(\varphi_j, \varphi_j) = 1 \quad \forall j.$$

• Ein orthogonales (oder orthonormales) System heißt **vollständig**, falls

$$(\varphi_j, f) = 0 \quad \forall j \in I \iff f = 0.$$

Die Indexmenge I ist meistens $I = \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

Beispiel 3.5. (a) $V = \mathbb{C}^n$, $\varphi_j = (0, \dots, \overset{j\text{-te Stelle}}{1}, \dots, 0)$, $j \in I = \{1, \dots, n\}$.

$\Rightarrow \{\varphi_j\}_{j \in I}$ ist ein vollständiges orthonormales System.

(b) $V = C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $\varphi_j(x) = e^{2\pi i x j}$, $j \in \mathbb{Z}$, ist ein orthogonales System.

(Wir verwenden das L^2 -Skalarprodukt $(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$) Für $f \in V$ sind

$$(f, \varphi_j) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i x j} dx$$

gerade die Fourierkoeffizienten von f . Nach **Satz 1.9** ist $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ also ein **vollständiges** orthonormales System.

(c) $V = \ell^2$. $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, wobei $(\varphi_j)_n = \delta_{jn}$, ist ein vollständiges orthonormales System.

Der folgende Satz sagt, was die beste Approximation eines gegebenen Vektors $f \in V$ durch Linearkombinationen einer orthonormalen Familie ist:

Satz 3.6. Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum, $\dim V = \infty$ (für den Fall $\dim V < \infty$, siehe **Lineare Algebra**). Sei $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ein orthogonales System.

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : \|\varphi_1 + \dots + \varphi_n\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \dots + \|\varphi_n\|^2$ (**Pythagoras**)

(ii) Ist $\{\varphi_j\}$ orthonormal, so gilt $\forall \varphi \in V$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^n |(\varphi, \varphi_j)|^2 \leq \|\varphi\|^2. \quad (\text{Besselsche Ungleichung.})$$

(iii) Ist $\{\varphi_j\}$ orthonormal, $\varphi \in V$, $n \in \mathbb{N}$, so gilt: die Funktion

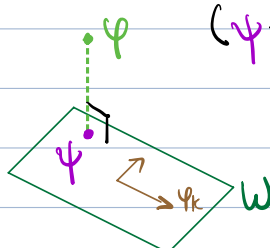
$$C^n \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \left\| \varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\|$$

nimmt ihr globales Minimum an für $\lambda_j = (\varphi_j, \varphi)$.

Eine Reformulierung von Teil (iii) ist: der Vektor im Unterraum $W = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ mit kürzesten Abstand zu φ ist

$$\psi := \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j.$$

Beachte, dass der Verbindungsvektor $\psi - \varphi$ senkrecht auf W steht, da für alle Basisvektoren φ_k , $k=1, \dots, n$, von W gilt

$$(\psi - \varphi, \varphi_k) = \sum_{j=1}^n \underbrace{(\varphi_j, \varphi)}_{= \delta_{jk}} (\varphi_j, \varphi_k) - (\varphi, \varphi_k) = 0. \quad (**)$$


Beweis von Satz 3.6. (i) $\left(\sum_{j=1}^n \varphi_j, \sum_{k=1}^n \varphi_k \right) = \sum_{j,k=1}^n \overbrace{(\varphi_j, \varphi_k)}^{=0 \text{ für } j \neq k} = \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi_j)$

(ii) $0 \leq \left\| \varphi - \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j \right\|^2$

$$= \|\varphi\|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n (\varphi, (\varphi_j, \varphi) \varphi_j) \stackrel{(i)}{+} \sum_{j=1}^n \|(\varphi_j, \varphi) \varphi_j\|^2$$

$$= \|\varphi\|^2 - \sum_{j=1}^n |(\varphi_j, \varphi)|^2.$$

(iii) Wir schreiben

$$\varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j = v + w, \quad v := \varphi - \sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j,$$

$$w := \sum_{j=1}^n [(\varphi_j, \varphi) - \lambda_j] \varphi_j.$$

Die Rechnung (**) zeigt, dass $(v, w) = 0$. Also gilt nach Pythagoras

$$\left\| \varphi - \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \right\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \geq \|v\|^2,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $w=0$, also $(\varphi_j, \varphi) = \lambda_j = 0 \quad \forall j=1, \dots, n$. \square

- Man beachte, dass die Vollständigkeit eines orthonormalen Systems $\{\varphi_j\}$ im Falle $\dim V = \infty$ nicht impliziert, dass $\{\varphi_j\}$ eine Basis von V ist. Z.B. ist

$$a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots) \in \ell^2$$

sicherlich keine Linearkombination der φ_j von Beispiel 3.5 (c). (Beachte: eine Linearkombination ist per Definition immer eine endliche Linearkombination.)

- Stattdessen können wir dieses a beliebig durch Linearkombinationen dieser φ_j approximieren: für $a_k = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots) \in \text{span} \{ \varphi_j : j \in \mathbb{N} \}$ gilt

$$\|a - a_k\|^2 = \left\| (0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots) \right\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 3.7: Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum mit Skalarprodukt.

- (i) Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in V$, ist eine Cauchy-Folge, falls

$$\|f_n - f_m\| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0.$$

Weiterhin konvergiert f_n gegen $f \in V$, falls $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$.

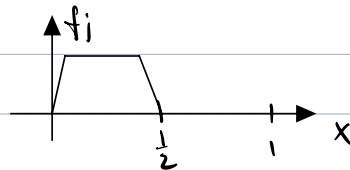
- (ii) V heisst Hilbertraum, falls jede Cauchy-Folge konvergiert.

(\Leftrightarrow) V ist vollständig als metrischer Raum mit $d(f, g) := \|f - g\|$.

Beispiel 3.8. (a) $V = \mathbb{C}^n$ ist ein Hilbertraum.

(b) $V = C^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ mit L^2 -Skalarprodukt ist **kein** Hilbertraum: die Funktionen

$$f_j(x) = \begin{cases} jx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{j} \\ 1, & \frac{1}{j} \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{j} \\ j(\frac{1}{2} - x), & \frac{1}{2} - \frac{1}{j} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$



bilden eine Cauchy-Folge, die nicht konvergiert (**Übung.**)

Satz 3.9. ℓ^2 ist ein Hilbertraum.

Beweis. Sei $(a_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $a = (a_{ij,n})_{n \in \mathbb{N}}$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{ij,n} - a_{ik,n}|^2 \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0.$$

Insbesondere gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $|a_{ij,n} - a_{ik,n}| \xrightarrow{j,k \rightarrow \infty} 0$, d.h. $(a_{ij,n})_{j \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in \mathbb{C} — konvergiert also. Wir schreiben

$$a_n := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{ij,n}.$$

Zu zeigen: (i) $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$

(ii) $a_{ij} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$.

Zu (i): Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{n=1}^N |a_n|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |a_{ij,n}|^2$$

$$\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{n=1}^{\infty} |a_{ij,n}|^2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|a_{ij}\|^2 =: C < \infty$$

wobei wir im letzten Schritt benutzen, dass Cauchy-Folgen beschränkt sind.

Lassen wir $N \rightarrow \infty$, so folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq C \Rightarrow a \in \ell^2.$$

Zu (ii): Sei $\varepsilon > 0$. Wählen j_0 , sodass $\|a_{(k)} - a_{(j)}\|^2 < \varepsilon^2 \forall j, k \geq j_0$.

Also gilt für jedes N , und für $j \geq j_0$:

$$\sum_{n=1}^N |a_n - a_{(j),n}|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |a_{(k),n} - a_{(j),n}|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Da dies für alle N gilt, folgt $\|a - a_{(j)}\| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq j_0$. \square

In einem Hilbertraum H mit orthonormalem System $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ können wir nun hoffen, dass für einen fixen Vektor $\varphi \in H$ die endlich-dimensionalen Approximationen $\sum_{j=1}^n (\varphi_j, \varphi) \varphi_j$ gegen φ konvergieren, wenn $n \rightarrow \infty$. Dies gilt in der Tat genau dann, wenn H vollständig ist. Zur Vorbereitung des Beweises benötigen wir:

Lemma 3.10. Sei $f_n \rightarrow f$ in V ($= \mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt).

Sei $g \in V$. Dann:

(i) $(f_n, g) \rightarrow (f, g)$ (und daher auch $(g, f_n) \rightarrow (g, f)$).

(ii) $\|f_n\| \rightarrow \|f\|$.

Beweis. (i) $|(f_n, g) - (f, g)| = |(f_n - f, g)| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|f_n - f\| \cdot \|g\| \rightarrow 0$.

(ii) $|\|f_n\| - \|f\|| \stackrel{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} \|f_n - f\| \rightarrow 0$. \square

Satz 3.11. Sei H ein Hilbertraum und $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ein orthonormales System.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist vollständig.

(ii) $\forall \varphi \in H$ gilt $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j, \varphi) \varphi_j$ (Konvergenz in H).

(iii) $\forall \varphi \in H$ gilt $\|\varphi\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi_j, \varphi)|^2$ (Parseval-Identität)

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Sei $S_N := \sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi) \varphi_j \in H$. Dann gilt für $N > M$:

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{j=M+1}^N (\varphi_j, \varphi) \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=M+1}^N |(\varphi_j, \varphi)|^2$$

$$\leq \sum_{j=M+1}^{\infty} |(\varphi_j, \varphi)|^2 \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0,$$

da wegen der Besselschen Ungleichung $\sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi_j, \varphi)|^2 \leq \|\varphi\|^2 < \infty$.
 $\Rightarrow (s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

• Da H vollständig ist, konvergiert $s_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} s \in V$.

• Lemma 3.10 (i) impliziert

$$(s - \varphi, \varphi_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{((s_N, \varphi_k) - (\varphi, \varphi_k))}_{=0 \text{ für } N \geq k} = 0.$$

$$= \begin{cases} 0, & N < k \\ (\varphi_k, \varphi), & N \geq k \end{cases}$$

Da (φ_j) vollständig ist, folgt hieraus $s - \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = s$.

(ii) \Rightarrow (iii). Nach Lemma 3.10 (ii) gilt

$$\|\varphi\|^2 = \|s\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|s_N\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |(\varphi_j, \varphi)|^2.$$

(iii) \Rightarrow (i). Ist $\varphi \in H$ mit $(\varphi_j, \varphi) = 0 \forall j$, so gilt $\|\varphi\|^2 = 0$, also $\varphi = 0$. \square

Definition 3.12. Sei H ein Hilbertraum.

(i) Ein vollständiges orthonormales System von H heisst (vollständige) Orthonormalbasis. (Achtung: Dies ist keine Basis im Standard-Sinne.)

(ii) H heisst separabel, falls H eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Zum Schluss beweisen wir, dass alle separablen Hilberträume "gleich" sind — präziser gesagt, isometrisch:

Satz 3.13. Sei H ein separabler Hilbertraum, mit abzählbarer Orthonormalbasis $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Dann definiert die Abbildung

$$\phi: \ell^2 \rightarrow H, \quad a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n,$$

einen isometrischen Isomorphismus, d.h. ϕ ist linear, bijektiv (mit Inverse $\phi^{-1}: \varphi \mapsto ((\varphi_n, \varphi))_{n \in \mathbb{N}}$), und

$$(\phi(a), \phi(b)) = (a, b) \quad \forall a, b \in \ell^2.$$

Beweis. • ϕ ist wohldefiniert. Da H ein Hilbertraum ist, müssen wir nur zeigen, dass $s_N := \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n$ eine Cauchy-Folge ist; aber für $N > M$ ist

$$\|s_N - s_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |a_n|^2 \leq \sum_{n=M+1}^{\infty} |a_n|^2 \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \text{ da } a \in \ell^2.$$

• ϕ ist eine Isometrie. Die Stetigkeit des Skalarprodukts (Lemma 3.10(i)) gibt

$$\begin{aligned} (\phi(a), \phi(b)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N a_j \varphi_j, \sum_{k=1}^M b_k \varphi_k \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \overline{a_j} b_j \\ &= (a, b). \end{aligned}$$

• ϕ ist invertierbar: klar (mittels angegebener Formel für ϕ^{-1}). \square

Beispiel 3.14. (i) Die Räume $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, ℓ^2 sind separable Hilberträume.

(ii) Der Raum $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx. \quad (= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi_j(x)} \psi_j(x) dx,$$

Dies ist ein Spezialfall von Satz 5, wenn $[(\varphi_j)] = f$, $[(\psi_j)] = g$,

Aufgabe 1: $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist als $\varphi_j, \psi_j \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ L^2 -Cauchy-Folgen

Vervollständigung von $(\mathcal{J}(\mathbb{R}^n), d)$,

$d(\varphi, \psi) := \|\varphi - \psi\|_{L^2}$, vollständig mit $d(f, g) = \|f - g\|_{L^2}$.

• Wir werden in §3.3 eine explizite abzählbare vollständige ONB von $L^2(\mathbb{R}^n)$ konstruieren; also ist $L^2(\mathbb{R}^n)$ separabel (und daher nach Satz 3.13 isomorph zu ℓ^2 — einen sehr konkreten Hilbertraum!).