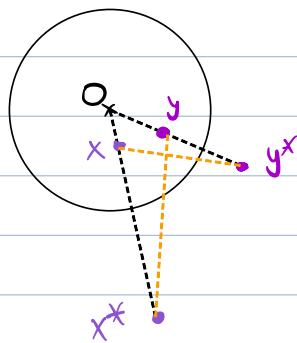


## 5.2. Greensche Funktion für den Ball

Sei  $D = B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ . Für  $y \in D$  schreiben wir

$$y^* := \frac{R^2}{|y|^2} y \notin D \quad (\text{"Spiegelung um die Sphäre } \partial D \text{"}).$$

Lemma 5.7.  $y^{**} = y$ ,  $|y^*| = \frac{R^2}{|y|}$ ,  $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x - y^*|}{|y - x^*|}$ .



(Dreiecke  $Oxy^*$  und  $Ox^*y$  sind ähnlich, da  $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|y|}{|x^*|}$ .)

• Für  $n \geq 3$  setzen wir  $\underbrace{=: v(y, x)}_{=: v(y, x)}$

$$G(y, x) = E(x - y) - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} E(x - y^*).$$

(i) Da für  $y \in D$  gilt  $y^* \notin D$ , ist  $\Delta_x v(y, x) = 0$  ( $y \in D, x \in \bar{D}$ ).

(ii) Für  $x \in \partial D$  und  $y \in D$  gilt  $x = x^*$  und daher

$$\begin{aligned} |x - y|^{-n+2} &\stackrel{\text{Lemma 5.7}}{=} |x - y^*|^{-n+2} \\ &\stackrel{||}{=} |x^* - y|^{-n+2} \end{aligned}$$

Folglich  $G(y, x) = 0$ .

• Der Fall  $n=2$  wird im Skript behandelt.

Nach kurzer Rechnung folgt aus Satz 5.6:

Satz 5.8. (Poisson-Formel).  $n \geq 2$ ,  $D = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f$  stetig auf  $\partial D$ .

Dann ist die eindeutige Lösung  $u$  von (D) gegeben durch

$$u(x) = \int_{|y|=R} H(y, x) f(y) d\Omega(y), \quad x \in D,$$

wobei

$$H(y, x) = \frac{\partial G(y, x)}{\partial n_y} \Big|_{|y|=R} = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n} \quad (\omega_n = \text{area}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}).$$

Beweis Der Nachweis, dass  $u(x) \rightarrow f(y)$  konvergiert, wenn  $D \ni x \rightarrow y \in \partial D$ , wird im Skript erbracht.  $\square$

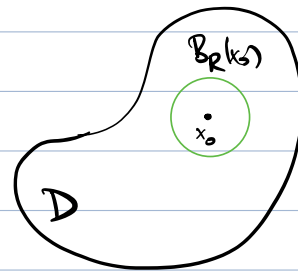
Wir ziehen zwei wichtige Schlussfolgerungen:

Satz 5.9. (Mittelwertprinzip.) Sei  $u$  harmonisch auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Für jede Kugel  $B_R(x_0) \subset D$  gilt dann

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) d\Omega(y).$$

Beweis. O.B.d.A.  $x_0 = 0$ .  $u$  löst

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u(x) = u(x), & x \in \partial B_R(0), \end{cases}$$



$$\text{also nach Satz 5.8} \quad u(0) = \int_{|y|=R} H(y, 0) u(y) d\Omega(y) = \frac{1}{\omega_n R} \frac{R^2}{|y|^n} = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} = \frac{1}{|\partial B_R(0)|} \quad \square$$

Korollar 5.10. (Maximumsprinzip.) Sei  $u$  harmonisch auf dem zusammenhängenden Gebiet  $D$ . Hat  $u$  eine Maximalstelle  $x_0 \in D$ , d.h.  $u(x_0) \geq u(x) \forall x \in D$ , so ist  $u$  konstant.

Beweis Für  $D = B_R(x_0)$ : nach dem Mittelwertsatz auf  $B_R(x_0)$ ,  $R < R_0$ , ist

$$u(x_0) = (\text{Mittelwert von } u(y), |y - x_0| = R) \leq u(x_0)$$

Dies ist nur möglich, wenn  $u(y) = u(x_0) \quad \forall y, |y - x_0| = R$ .

Da  $R$  beliebig ist, folgt  $u \equiv u(x_0)$ .  $\square$