Konvention Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe. Dann verlangen wir von einer Darstellung $\rho: G \to GL(V)$ stets:

(1) V ist ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum;

(2) ρ ist stetig (nur für Mathematiker); hier: glatt.

Fakt 1 Existenz des Haarschen Masses auf kompakten Gruppen G (d.h. für uns: $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ abgeschlossen und $\exists\, C > 0$ s.d. $\|A\| \leq C \;\forall A \in G$). Pragmatisch: Existenz eines Integrals

$$\int_G dg : C(G) = \{ f : G \to \mathbb{C} : f \text{ stetig} \} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{sodass:}$$

(i) $\int_G \lambda f(g) + \mu \tilde{f}(g)\, dg = \lambda \int_G f(g)\, dg + \mu \int_G \tilde{f}(g)\, dg$ (Linearität),

(ii) $\int_G f(g)\, dg \geq 0$, falls $f(g) \geq 0 \;\forall g$ (Positivität),

(iii) $\int_G f(gh)\, dg = \int_G f(g)\, dg = \int_G f(hg)\, dg \;\forall h \in G, f \in C(G)$ (Rechts- und Linksinvarianz),

(iv) $\int_G 1\, dg = 1$ (Normalisierung)

Beispiele (1) G = endliche Gruppe $\Rightarrow \int_G f(g)\, dg = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$.

(2) $G = U(1) = \{ e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R} \}$

$$\rightsquigarrow \int_{U(1)} f(g)\, dg = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Fakt 2 Die Darstellungstheorie endlicher Gruppen kann fast vollständig im Fall kompakter Gruppen G entwickelt werden, mit denselben Beweisen — man muss nur $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}$ durch $\int_G dg$ ersetzen.

Einzige Ausnahme: alles, was mit der regulären Darstellung zu tun hat. (Korrekte Verallgemeinerung: $\mathbb{C}[G] \rightsquigarrow L^2(G)$; Peter-Weyl Theorem.)

Beispiel/Lemma Sei $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Dann ist jede irreduzible Darstellung 1-dimensional (da G abelsch ist!), und gleich ρ_j für ein $j \in \mathbb{Z}$, wobei

$$\rho_j(z)\,w = z^j w \qquad (z \in G,\ w \in \mathbb{C}).$$

Beweis Übung, oder später nach der Entwicklung von etwas Theorie. □

Beispiel $G = SU(2)$: kompakt $\Rightarrow$ alle endlich-dim. Darstellungen sind vollständig reduzibel. $SU(2)$ ist nicht abelsch! Werden alle irreduziblen Darstellungen finden, via die Darstellungstheorie der Lie-Algebra $\underline{su}(2)$: $\forall n = 0,1,2,\dots\ \exists!$ irred. Darstellung mit $\dim = n+1$.

Definition · Sei $\underline{g}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{R}$. Eine Darstellung von $\underline{g}$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\tau : \underline{g} \to \underline{gl}(V) = \mathrm{Hom}(V,V)$, sodass

$$\underbrace{[\tau(X), \tau(Y)]}_{\substack{\text{Lie-Klammer von } \underline{gl}(V) \\ = \text{Kommutator } \tau(X)\circ\tau(Y) - \tau(Y)\circ\tau(X)}} = \tau(\underbrace{[X,Y]}_{\text{Lie-Klammer von } \underline{g}})$$

- selbe Definition mit $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.
- Homomorphismus von Lie-Algebren $\underline{g}, \underline{h}$: lineare Abbildung $\phi : \underline{g} \to \underline{h}$ mit $[\phi(X), \phi(Y)] = \phi([X,Y])\ \forall X, Y \in \underline{g}$. Isomorphismus = invertierbarer Homom.
- Invariante Unterräume, Irreduzibilität, vollständige Reduzibilität von solchen Darstellungen werden genauso definiert wie bei Darstellungen von Gruppen.

Beispiele (1) $\underline{u}(1) = \mathbb{R}$, $[x,y] = 0$. Darstellung von $\underline{u}(1)$ auf

V ist $\tau(x) = x\,\tau(1) = x\,A$, wobei $A \in \mathrm{End}(V)$ beliebig (aber fest) ist.
(Beachte: $[\tau(x),\tau(y)] = xy\,[A,A] = 0 = \tau([x,y])$.)

(2) Darstellung τ von $\underline{su}(2)$ $\hat{=}$ drei lineare Abbildungen $A_j := \tau(t_j) \in \mathrm{Hom}(V,V)$ ($t_j = i\sigma_j$ wie vorher) mit $[A_i,A_j] = -2\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_k$. $\Rightarrow$ später mehr dazu.

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen Darstellungen einer Lie-Gruppe und ihrer Lie-Algebra herstellen.

Lemma Sei $\rho: G \to GL(V)$ eine Darstellung einer Lie-Gruppe G.
Dann bildet ρ Einparametergruppen auf Einparametergruppen ab.

Beweis Sei $\mathbb{R} \ni t \mapsto \phi(t) \in G$ eine Einparametergruppe.
$\Rightarrow t \mapsto \psi(t) := \rho(\phi(t)) \in GL(V)$ ist ein Gruppenhomomorphismus, stetig differenzierbar. (Wüssten wir nur Stetigkeit: Lemma unten.) $\square$

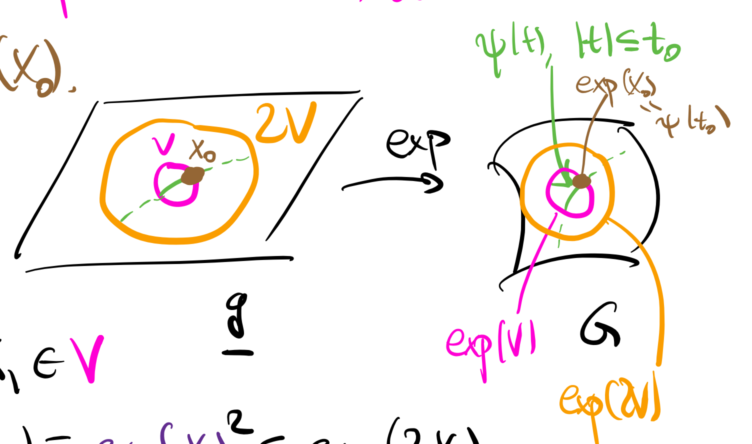
Lemma (nur für Interessierte) Jeder stetige Homomorphismus $\psi: \mathbb{R} \to G$ ist stetig differenzierbar (also insb. eine Einparametergruppe).

(Von so etwas haben Sie in Analysis bestimmt geträumt!)

Beweis · Sei $V \subset \underline{g}$ eine Umgebung von $0 \in \underline{g}$ sodass
$\exp|_{2V}: 2V = \{2v : v \in V\} \longrightarrow \mathcal{U} := \exp(2V) \subset G$ $(*)$
invertierbar ist.

· Sei $t_0 > 0$ so klein, dass $\psi(t) \in \exp(V)\ \forall\ t \in [-t_0, t_0]$.
Sei $X_0 \in V \subset \underline{g}$ sodass $\psi(t_0) = \exp(X_0)$.

· Nun ist $\underset{\underset{\exp(X_0)}{\parallel}}{\psi(t_0)} = \psi(\frac{t_0}{2} + \frac{t_0}{2}) = \psi(\frac{t_0}{2})^2$



Haben $\psi(\frac{t_0}{2}) \in \exp(V)$, also $\exists!\ X_1 \in V$
mit $\psi(\frac{t_0}{2}) = \exp(X_1)$ $\Rightarrow$ $\exp(X_0) = \exp(X_1)^2 = \exp(2X_1)$

$\Rightarrow X_0 = 2X_1$ wegen $\circledast$.

Also gilt: $\psi(\frac{1}{2}t_0) = \exp(\frac{1}{2}X_0)$.

- Induktiv folgt $\psi(2^{-m}t_0) = \exp(2^{-m}X_0)$.
- ψ ist ein Homomorphismus $\Rightarrow$ $\psi(q\,t_0) = \exp(q\,X_0)$ für alle $q = \frac{p}{2^m}$, $p, m \in \mathbb{N}_0$.
- Die Menge solcher q ist dicht in $[0,\infty)$.

ψ stetig $\Rightarrow$ $\psi(t) = \exp(tX)$ $\forall t$, $X := \frac{1}{t_0}X_0 \in \underline{g}$.

Also ist ψ glatt. $\square$

Satz (nur für Interessierte.) Seien G, H zwei Matrix-Lie-Gruppen, und sei $f: G \to H$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Dann ist f glatt.

Beweis • Sei $X_1, \dots, X_n$ eine Basis von $\underline{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Die Abbildung

$$\phi: \mathbb{R}^n \to G, \qquad (t_1, \dots, t_n) \mapsto \exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n),$$

ist glatt, $\phi(0, \dots, 0) = I$, und ihr Differential an $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ ist

$$D_{\vec{0}}\phi(s_1, \dots, s_n) := \frac{d}{dr}\phi(0 + rs_1, \dots, 0 + rs_n)\Big|_{r=0}$$

$$= s_1 X_1 + \dots + s_n X_n,$$

also ein Isomorphismus $\mathbb{R}^n \;(= T_{\vec{0}}\mathbb{R}^n) \longrightarrow \underline{g} \;(= T_{\phi(\vec{0})}G = T_I G)$.

Also ist $\phi|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to V$ ein Diffeomorphismus für geeignete (kleine) Umgebungen $\begin{cases} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \\ V \subset G \end{cases}$ von $\begin{cases} \vec{0} \\ I \end{cases}$.

- Für $(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{U}$ gilt

$$f(\phi(t_1, \dots, t_n)) = f(\exp(t_1 X_1) \cdots \exp(t_n X_n))$$

$$= f(\exp(t_1 X_1)) \cdots f(\exp(t_n X_n)).$$

Nach den Lemma ist $t_j \mapsto f(\exp(t_j X_j))$ glatt für $j=1,\dots,n$.

$\Rightarrow f|_V : V \to H$ ist glatt.

· Da f ein Homomorphismus ist, und V eine Umgebung der Eins, ist $f: G \to H$ glatt. $\square$

Sei nun $\rho: G \to GL(V)$ eine Darstellung.

Definition Für $X \in \mathrm{Lie}(G)$ setze

$$\rho_*(X) := \frac{d}{dt} \underbrace{\underbrace{\rho(\exp(tX))}_{\text{differenzierbar}\ \Downarrow}\Big|_{t=0}}_{\text{wohldefiniert; Einparametergruppe in } GL(V)} \in \mathrm{Lie}(GL(V)) = \mathfrak{gl}(V)$$

$(= \mathrm{Hom}(V,V))$.

Satz ρ_* ist eine Darstellung von $\mathrm{Lie}(G)$.

Beweis (i) Für $X \in \mathrm{Lie}(G) =: \underline{\mathfrak{g}}$ ist $t \mapsto \rho(\exp(tX))$ eine Einparametergruppe, also von der Form $\rho(\exp(tX)) = \exp(tY)$ für ein $Y \in \mathfrak{gl}(V)$. Berechnen $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}$: $\rho_*(X) = Y$.

Also: $\exp(t\,\rho_*(X)) = \rho(\exp(tX)) \quad \forall\, X \in \underline{\mathfrak{g}},\ t \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\rho_*(\lambda X) = \lambda\,\rho_*(X)$, denn:

$$\exp(t\,\rho_*(\lambda X)) = \rho(\exp(t\lambda X)) = \exp(t\lambda\,\rho_*(X)) \quad \forall t.$$

(iii) $X, Y \in \underline{\mathfrak{g}} \Rightarrow \rho_*(X+Y) = \rho_*(X) + \rho_*(Y)$, denn:

$$\exp(t\,(\rho_*(X) + \rho_*(Y))) \overset{\text{CBH}}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\exp\left(\tfrac{t}{n}\rho_*(X)\right)\exp\left(\tfrac{t}{n}\rho_*(Y)\right)\right]^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\rho\left(\exp\left(\tfrac{t}{n}X\right)\right) \rho\left(\exp\left(\tfrac{t}{n}Y\right)\right)\right]^n$$

$$\overset{\rho \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} \rho\left(\left[\exp\left(\tfrac{t}{n}X\right)\exp\left(\tfrac{t}{n}Y\right)\right]^n\right)$$

$$\overset{\text{CBH}}{=} \rho\left(\exp\left(t(X+Y)\right)\right)$$

$$= \exp\left(t\,\rho_*(X+Y)\right).$$

(iv) $\rho_*([X,Y]) = [\rho_*(X), \rho_*(Y)]$: ähnlich (Übung). $\square$

Satz Sei G zusammenhängend. Dann ist $\rho : G \to GL(V)$ eindeutig durch $\rho_* : \underline{g} \to \underline{gl}(V)$ bestimmt.

Beweis Jedes $A \in G$ ist von der Form $A = \exp(X_1)\cdots\exp(X_k)$ für geeignete $X_1, \dots, X_k \in \underline{g}$; dann ist

$$\rho(A) = \rho(\exp(X_1)) \cdots \rho(\exp(X_k))$$
$$= \exp(\rho_*(X_1)) \cdots \exp(\rho_*(X_k)). \qquad \square$$

Beispiel 1-dimensionale Darstellung $\rho : U(1) \to GL(\mathbb{C})$.

Dann $\rho_* : \underline{u}(1) = \{ i\theta : \theta \in \mathbb{R}\} \to \underline{gl}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ (Verknüpfung: Multiplikation),

linear. Also $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ sodass $\rho_*(i\theta) = \theta z_0 \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$.

Aber $1 = \rho(e^{2\pi i}) = \exp(\rho_*(2\pi i)) = \exp(2\pi z_0)$; also

$z_0 = ij$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$, und daher

$$\rho(e^{i\theta}) = \exp(\rho_*(i\theta)) = \exp(\theta \cdot ij) = (e^{i\theta})^j.$$

Und jetzt ein zentrales Resultat:

Satz Sei $\rho: G \to GL(V)$ eine Darstellung einer zusammenhängenden Matrix-Lie-Gruppe. Dann ist ρ irreduzibel / vollständig reduzibel
$\Longleftrightarrow$ $\rho_*: \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{gl}(V)$ ist irreduzibel / vollständig reduzibel.

Beweis · Ist $W \subset V$ ρ-invariant, so gilt für $X \in \mathrm{Lie}(G), w \in W$ auch

$$\rho_*(X)w = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \underbrace{\rho(\exp(tX))}_{\in W\ \forall t} \in W.$$

(Beachte: Untervektorräume sind abgeschlossen.)

· Umgekehrt: ist $W \subset V$ ρ_*-invariant, so gilt für $X \in \mathrm{Lie}(G)$, $w \in W$:

$$\rho(\exp(X))w = \exp(\rho_*(X))w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\rho_*(X)^k w}_{\in W} \in W.$$

Da jedes $A \in G$ von der Form $A = \exp(X_1) \cdots \exp(X_k)$ ist, folgt, dass W ρ-invariant ist. □

Satz (nur für Interessierte)

Ist G einfach zusammenhängend, so gibt es für jede Darstellung $\tau: \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{gl}(V)$ eine (eindeutige) Darstellung $\rho: G \to GL(V)$ mit $\tau = \rho_*$.

Beweis · $\rho(\exp(X)) = \exp(\tau(X))$ für $X \in \mathfrak{g}$.

· Für kleine $X, Y \in \mathfrak{g}$: $\rho(\exp(X)\exp(Y)) \overset{\mathrm{CBH}}{=} \rho(\exp(X+Y+[X,Y]+\cdots))$
$= \exp(\tau(X+Y+[X,Y]+\cdots)) = \exp(\tau(X)+\tau(Y)+[\tau(X),\tau(Y)]+\cdots)$
$\overset{\mathrm{CBH}}{=} \exp(\tau(X))\exp(\tau(Y)) = \rho(\exp(X))\rho(\exp(Y))$, $\Rightarrow \rho$ ist Homomorphismus "nahe der Eins".

· Definieren $\rho(A)$ für allgemeine $A \in G$, $A = \underbrace{\exp(X_1)\cdots\exp(X_k)}_{\text{"Pfad"}}$
via $\rho(A) := \rho(\exp(X_1))\cdots\rho(\exp(X_k))$.

· Benutzen $\pi_1(G) = 0$, um die Unabhängigkeit dieser Definition vom Pfad zu zeigen. (Verwendet, dass ρ ein Homomorphismus nahe der Eins ist.) □

Beispiel • $SU(2)$ ist einfach zusammenhängend, $SO(3)$ nicht.
Jede Darstellung von $SU(2)$ kommt von einer Darstellung von $\underline{su}(2)$ (und umgekehrt). Die Umkehrung ist falsch für $SO(3)$.

• Ist $\rho: SO(3) \to GL(V)$ eine Darstellung, und $\phi: SU(2) \to SO(3)$ die doppelte Überlagerung, so ist $\rho \circ \phi: SU(2) \to GL(V)$ eine Darstellung. Umgekehrt induziert eine Darstellung $\tilde{\rho}: SU(2) \to GL(V)$ eine Darstellung von $SO(3)$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\rho}(-I) = 1_V$.

Bemerkung (nur für Interessierte) Allgemeiner (mit denselben Beweis) gilt:

ist G einfach zusammenhängend und $\tau: \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus, so gibt es einen eindeutigen Lie-Gruppen-Homomorphismus $\phi: G \to H$ mit $\tau = D_I \phi$.