# Darstellungen

$G$ = Gruppe.

**Definition.** Eine (reelle oder komplexe) Darstellung von $G$ auf einem $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$ ist ein Homomorphismus* $G \to GL(V)$.

- $V$ heisst Darstellungsraum.
- Schreiben auch $(\rho, V)$ für die Darstellung $\rho$ auf $V$.

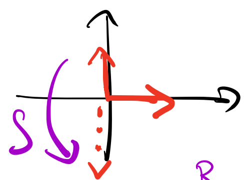
*das heisst: $\varphi(g): V \to V$ invertierbar, $\varphi(g\,g') = \varphi(g)\,\varphi(g')$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(1) = \text{Identität}, \\ \varphi(g)^{-1} = \varphi(g^{-1}) \end{cases}$$

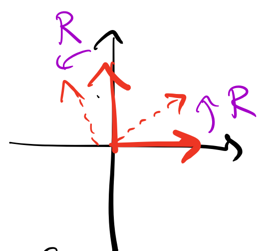
**Beispiele**

- $\rho: D_n \to GL(2, \mathbb{R})$,

$$S \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$




$$R \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$




- Triviale Darstellung: $V = \mathbb{C}$, $\rho(g) = 1 \;\forall g \in G$.
- $G = S_n$, $V = \mathbb{C}^n$ mit Basis $e_1, \dots, e_n$, $\rho(\pi)\, e_i = e_{\pi(i)}$ $(i = 1, \dots, n)$.
- $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $V = \mathbb{C}$, $\rho(k) z = e^{2\pi i k/n} z$.
- $G = O(3)$, $V = \{\text{Funktionen } f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}\}$,

$$(\rho(A) f)(x) := f(A^{-1}x).$$

Check: $(\rho(AB)f)(x) = f((AB)^{-1}x) = f(B^{-1}A^{-1}x)$,

$(\rho(A)(\rho(B)f))(x) = (\rho(B)f)(A^{-1}x) = f(B^{-1}A^{-1}x)$. ✓

**Definition** Die **reguläre Darstellung** einer endlichen Gruppe $G$ ist die Darstellung $\rho_{reg}: G \to \mathbb{C}[G] = \{\text{Funktionen } f: G \to \mathbb{C}\}$,

$$(\rho_{reg}(g) f)(k) = f(g^{-1}k).$$

**Bemerkung** Eine Basis von $G$ ist gegeben durch die Funktionen

$$\delta_g : \begin{cases} g \mapsto 1 \\ g \neq g' \mapsto 0 \end{cases}.$$

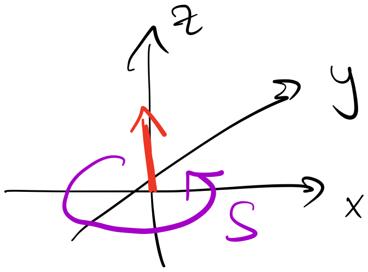
Dann: $\rho_{reg}(g)\, \delta_h = \delta_{gh}$.

Check: $(\rho_{reg}(g)\, \delta_h)(k) = \delta_h(g^{-1}k) = \begin{cases} 1, & g^{-1}k = h \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1, & k = gh \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \delta_{gh}(k). \checkmark$$

Darstellungen können häufig "zerlegt" werden. Zum Beispiel: haben Darstellung $\rho$ von $SO(2)$ auf $\mathbb{R}^3$, wobei $R \in SO(2)$ als Rotation in der $xy$-Ebene wirkt.

(D.h. $\rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.)




$\Rightarrow$ $\rho$ kann auf die $xy$-Ebene / die $z$-Achse eingeschränkt werden.

**Definition** · Ein **invarianter Unterraum** einer Darstellung $(\rho, V)$ ist ein Unterraum $W \subset V$ mit $\rho(g) W \subset W$ für alle $g \in G$. Ist $W \neq \{0\}$, so heisst die Einschränkung $\rho|_W : G \to GL(W)$ **Unterdarstellung** von $G$.

- $(\rho, V)$ heisst **irreduzibel**, falls sie keine invarianten Unterräume

$W \neq \{0\}, V$ besitzt.

- $(\rho, V)$ heisst vollständig reduzibel, falls invariante Unterräume $V_1, \dots, V_n$ existieren, sodass $(\rho|_{V_i}, V_i)$ irreduzibel ist für $i = 1, \dots, n$, und $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$.

Beispiel Die Darstellung von $SO(2)$ auf $\mathbb{R}^3$ oben ist vollständig reduzibel, mit $V_1 =$ $xy$-Ebene, $V_2 = z$-Achse.

Beispiel Nicht jede Darstellung ist vollständig reduzibel: betrachte die Darstellung von $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathbb{R}^2$,

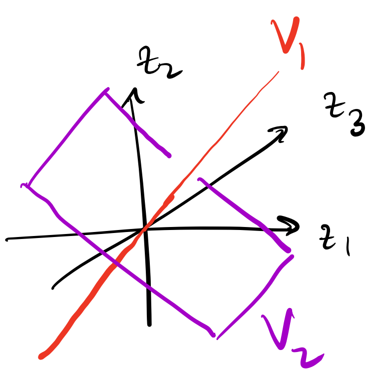
$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein invarianter Unterraum (also die Darstellung reduzibel = nicht irreduzibel), aber die Darstellung ist nicht vollständig reduzibel (Übung).

Beispiel Betrachte die Darstellung der symmetrischen Gruppe $S_3$ auf $\mathbb{C}^3$, gegeben durch $\rho(\sigma) e_i = e_{\sigma(i)}$, $\sigma \in S_3$. (Hier $\{e_1, e_2, e_3\}$ ist die Standardbasis von $\mathbb{C}^3$)

Invariante Unterräume: $V_1 = \{(z, z, z) : z \in \mathbb{C}\}$

$V_2 = \{(z_1, z_2, z_3) : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$.




$\rho|_{V_1}$ ist irreduzibel, da $\dim V_1 = 1$.

$\rho|_{V_2}$ ist irreduzibel: ist $W \subset V_2$ ein invarianter Unterraum, $W \neq \{0\}, V_2$, so ist $\dim W = 1$, also $W = \mathbb{C}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ für geeignete $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Da $W$ invariant ist, sind $\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \\ z_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$

$\Rightarrow\ z_1 = z_2 = z_3 \Rightarrow W = V_1$, Widerspruch.

Also: $(\rho, \mathbb{C}^3)$ ist vollständig reduzibel; $\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$ ist die Zerlegung in invariante Unterräume.

## Endlich-dimensionale komplexe Darstellungen

**Lemma** Sei $(\rho, V)$ eine endl.-dim. komplexe Darstellung mit der Eigenschaft, dass für jeden invarianten Unterraum $W \subset V$ ein invarianter Unterraum $W' \subset V$ existiert mit $V = W \oplus W'$. Dann ist $(\rho, V)$ vollständig reduzibel.

**Beweis** Wir verwenden Induktion nach der Dimension, um das Lemma für alle Darstellungen $(\rho, V)$ mit $\dim V = d$ zu zeigen.

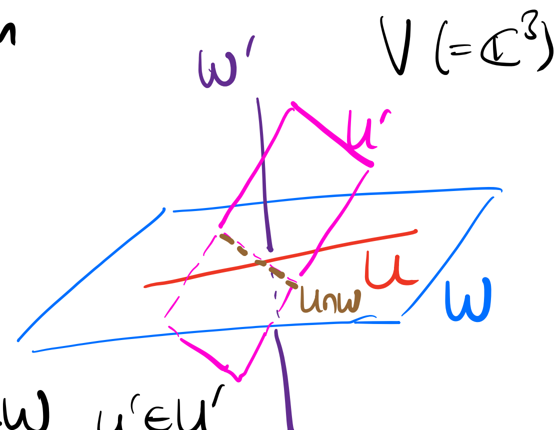
$d=1$. Alle 1-dimensionalen Darstellungen sind irreduzibel.

Induktionsschritt. Sei $\dim V = d \geq 2$.

Fall 1. $V$ ist irreduzibel. Nichts zu zeigen.

Fall 2. $\exists$ invarianter Unterraum $\{0\} \neq W \subsetneq V$ mit $1 \leq \dim W \leq d-1$. Sei $W' \subset V$ invariant mit $V = W \oplus W'$.

Zu zeigen: $W$ und $W'$ sind vollständig reduzibel. Betrachten $W$.
Sei also $\{0\} \neq U \subset W$ ein invarianter Unterraum. Nach Annahme gibt es einen invarianten Unterraum $U' \subset V$ mit $V = U \oplus U'$.




Behauptung: • $U' \cap W$ ist ein invarianter Unterraum (✓)

• $W = U \oplus (U' \cap W)$: Sei $w \in W$, dann $w = u + u'$ mit $u \in U \subset W$, $u' \in U'$.
Also $u' = w - u \in W \Rightarrow u' \in U' \cap W$,

wie gewünscht. $\square$

**Definition** Sei $V$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt.
Eine Darstellung $(\rho, V)$ heisst **unitär**, falls $\rho(g)$ unitär ist für alle $g \in G$, also $\rho(g)^{-1} = \rho(g)^*$.

**Satz** Unitäre Darstellungen $(\rho, V)$ sind vollständig reduzibel.

**Beweis** Sei $W \subset V$ ein invarianter Unterraum.

Behauptung: $W^\perp = \{v \in V : \underbrace{(v, w)}_{\text{Skalarprodukt}} = 0 \ \forall w \in W\}$ ist invariant.

In der Tat, für $v \in W^\perp$ und $g \in G$ gilt $\rho(g)v \in W^\perp$, da $\forall w \in W$

$$(\rho(g)v, w) = (v, \rho(g)^* w) = (v, \rho(g)^{-1} w) = (v, \underbrace{\rho(g^{-1}) w}_{\in W}) = 0.$$

Da $V = W \oplus W^\perp$, folgt der Satz vom obigen Lemma.

Und schliesslich, um alles zusammenzuschnüren:

**Satz.** Sei $(\rho, V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe $G$. Dann existiert ein Skalarprodukt $(\ ,\ )$ auf $V$, sodass $(\rho, V)$ unitär ist.

**Beweis** via Mittelung: Sei $(\ ,\ )_0$ irgendein Skalarprodukt. Setze

$$(v, w) = \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)_0.$$

(1) $(\ ,\ )$ ist ein Skalarprodukt: • $\overline{(v, w)} = (w, v)$ und Linearität in beiden Argumenten folgen von den entsprechenden Eigenschaften von $(\ ,\ )_0$.

• Für $v \neq 0$ ist $(v, v) \geq (v, v)_0 > 0$.

(2) $\rho(h)$ ist unitär: rechnen

$$(\rho(h)v, \rho(h)w) = \sum_{g \in G} (\rho(g)\rho(h)v, \rho(g)\rho(h)w)_0$$

$$= \sum_{g \in G} (\rho(gh)v, \rho(gh)w)_0$$

$$\overset{g \rightsquigarrow gh^{-1}}{=} \sum_{g \in G} (\rho(g)v, \rho(g)w)_0$$
$$= (v, w). \qquad \square$$

**Korollar** Endlich-dimensionale komplexe Darstellungen von endlichen Gruppen sind vollständig reduzibel.

**Vorausschau:** In der Zerlegung der regulären Darstellung einer endlichen Gruppe kommt jede irreduzible Darstellung vor.

Ähnlich zum Fall von Gruppen und Isomorphismen beschreiben wir jetzt, wie man verschiedene Darstellungen miteinander in Beziehung setzen kann:

**Definition** • $(\rho_1, V_1)$ und $(\rho_2, V_2)$ Darstellungen einer Gruppe $G$. Dann ist
$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{ \varphi : V_1 \to V_2 \text{ linear}, \ \varphi(\rho_1(g)v_1) = \rho_2(g)(\varphi(v_1)) \ \forall g \in G \}$$

$\forall g \in G$:
$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & V_1 \arrow[d, "\varphi"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

der Raum der *G-äquivarianten linearen Abbildungen* von $(\rho_1, V_1)$ nach $(\rho_2, V_2)$.

• Wenn eine invertierbare Abbildung $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ existiert, so heissen $(\rho_1, V_1)$ und $(\rho_2, V_2)$ *isomorph*, geschrieben $(\rho_1, V_1) \cong (\rho_2, V_2)$.

**Beispiel** $\rho_1 : SO(2) \to GL(\mathbb{R}^3)$, Rotationen um die z-Achse

$\rho_2 : SO(2) \to GL(\mathbb{R}^3)$, Rotationen um die x-Achse

sind isomorphe Darstellungen. (Übung: was ist die Abbildung $\varphi$?)

**Beispiel** $V$ = Hilbertraum eines quantenmechanischen Systems (z.B. $V = \mathbb{C}^2$ für ein Teilchen mit Spin) mit Symmetriegruppe $G$, d.h. wir haben eine Darstellung $(\varphi, V)$ von $G$. $\Rightarrow$ Der Energieoperator / Hamiltonoperator $\varphi: V \to V$ (d.h. $(\varphi v, v) =$ Energie des Zustands $v \in V$) ist $G$-äquivariant, $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V,V)$.

**Beispiel** Sei $n \geq 2$, $\rho: S_n \to GL(n, \mathbb{C})$ die Darstellung $\rho(\pi) e_i = e_{\pi(i)}$.
Sei $\varphi: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $S_n$-äquivariant. Was können wir über $\varphi$ sagen?

- Schreibe $(\varphi_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ für die Matrix von $\varphi$. Dann gilt $\forall \pi \in S_n$

$$(\varphi\, \rho(\pi))_{ij} = \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \underbrace{\rho(\pi)_{kj}}_{= \begin{cases} 1 & \pi(j)=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} = (\rho(\pi)\varphi)_{ij} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\rho(\pi)_{ik}}_{= \begin{cases} 1 & \pi(k)=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} \varphi_{kj}$$

$$\Rightarrow \varphi_{i,\pi(j)} = \varphi_{\pi^{-1}(i),j}$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{\pi(i),\pi(j)} = \varphi_{ij} \quad \forall i,j = 1,\dots,n \ \forall \pi \in S_n.$$

Scharf hingucken $\Rightarrow \varphi_{11} = \dots = \varphi_{nn} = \lambda, \quad \varphi_{ij} = \mu \ \forall i \neq j$.

$$\Rightarrow \varphi = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & \lambda & \cdots & \mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu & \mu & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Können jetzt leicht alle Eigenwerte von $\varphi$ bestimmen.

- Zusammenhang mit Darstellungstheorie: zerlege $(\rho, \mathbb{C}^n)$ in irreduzible Darstellungen: $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$, $\quad V_1 = \mathbb{C}(1,1,\dots,1)$

$$V_2 = \{(z_1,\dots,z_n) : \sum_{j=1}^n z_j = 0\}.$$

Dann $\varphi: V_1 \to V_1$ — in Bezug auf die Basis $(1,1,\dots,1)$ ist
$$\varphi|_{V_1} = (\lambda + (n-1)\mu) = (\lambda + (n-1)\mu)\, 1_{V_1}.$$

$\varphi: V_2 \to V_2$ — Basis $(1,-1,0,\dots,0), (1,0,-1,0,\dots,0), \dots, (1,0,\dots,0,-1)$ von $V_2$

$$\Rightarrow \varphi|_{V_2} = \begin{pmatrix} \lambda-\mu & & 0 \\ & \lambda-\mu & \\ 0 & & \ddots \ \lambda-\mu \end{pmatrix} = (\lambda-\mu)\, 1_{V_2}$$

**Satz** (Lemma von Schur) Seien $(\rho_1, V_1)$ und $(\rho_2, V_2)$ irreduzible komplexe endlich-dimensionale Darstellungen einer Gruppe $G$.

(1) $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \Rightarrow \varphi \equiv 0$ oder $\varphi$ ist ein Isomorphismus.

(2) $\varphi \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$ sodass $\varphi \equiv \lambda \mathbb{1}$ (d.h. $\varphi(v) = \lambda v$).

Beweis (1) Wenn $V_1 = \{0\}$, dann $\varphi \equiv 0$. Wenn $V_1 \neq \{0\}$, behaupten:

$$\ker \varphi = \{v \in V_1 : \varphi(v) = 0\} \subset V_1$$

$$\mathrm{im}\, \varphi = \{\varphi(v) : v \in V_1\} \subset V_2$$

sind invariant. In der Tat, $v \in \ker\varphi, g \in G \Rightarrow \varphi(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)(\varphi(v)) = 0$, also $\rho_1(g) v \in \ker \varphi$;

und $w = \varphi(v) \in \mathrm{im}\, \varphi, g \in G \Rightarrow \rho_2(g) w = \rho_2(g)\varphi(v) = \varphi(\rho_1(g)v)$, also $\rho_2(g) w \in \mathrm{im}\, \varphi$.

$\Rightarrow$ Entweder $\ker \varphi = V_1 \Rightarrow \varphi \equiv 0$, fertig;

oder $\ker \varphi = \{0\} \Rightarrow \varphi$ injektiv, $\mathrm{im}\, \varphi \neq \{0\}$

$\Rightarrow \mathrm{im}\, \varphi = V_2 \Rightarrow \varphi$ ist Isomorphismus.

(2) $\varphi$ (als lineare Abbildung auf einem endlich-dimensionalen komplexen Vektorraum — nach Wahl einer Basis: eine komplexe $n \times n$-Matrix, $n = \dim V_1$)

hat einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, also $\ker(\varphi - \lambda \mathbb{1}) \neq \{0\}$.

Da $\varphi - \lambda \mathbb{1} \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_1)$, ist $\ker(\varphi - \lambda \mathbb{1})$ invariant (siehe Teil (1)), folglich $\ker(\varphi - \lambda\mathbb{1}) = V_1 \Rightarrow \varphi = \lambda \mathbb{1}$. $\square$

Korollar Endlich-dimensionale komplexe irreduzible Darstellungen $(\rho, V)$ einer abelschen Gruppe $G$ sind 1-dimensional ($\dim V = 1$).

Beweis Sei $g \in G$. Dann gilt $\rho(g) \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$, da

$$\rho(g)\,(\rho(h) v) \qquad \rho(h)\,(\rho(g) v).$$

$$\rho(gh) v = \rho(hg) v$$

Schur $\Rightarrow$ $\rho(g) = \lambda \mathbb{1}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Also ist jeder 1-dimensionale Unterraum von $V$ invariant. $\square$

Beispiel $n \geq 2$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist abelsch. Sei $\rho: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ eine irreduzible Darstellung, dann ist $\rho([k])z = \rho([1] + \dots + [1])z =$

$= \rho([1]) \cdots \rho([1])z = \rho([1])^k z$, und $\rho([1])^n = \rho([n]) = \rho([0]) = 1$,

also ist $\rho([1])$ eine n-te Einheitswurzel, $\rho([1]) = e^{2\pi i j/n}$ (mit $j \in \mathbb{N}_0$).

$\Rightarrow$ Eine vollständige Liste von irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist $\rho_0, \dots, \rho_{n-1}$, mit $\rho_j([k])z = e^{\frac{2\pi i j}{n} k} z$.