Definition. Lie-Gruppen sind Gruppen G, die die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit haben, sodass Inversion und Gruppenmultiplikation glatte Abbildungen ($G \to G$ bzw. $G \times G \to G$) sind.
(Kontinuierliche Symmetriegruppen.)

- Konkret betrachten wir hier nur Matrix-Lie-Gruppen: das sind bestimmte Untergruppen von $GL(n,\mathbb{R})$ oder $GL(n,\mathbb{C})$, z.B. $O(n)$, $U(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$, $SL(n,\mathbb{C})$, $SO(1,3)$, oder natürlich $GL(n,\mathbb{R})$ und $GL(n,\mathbb{C})$ selbst.
- Für $A, B \in GL(n,\mathbb{C})$ setzen wir $d(A,B)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij} - B_{ij}|^2 = tr\left((A-B)^*(A-B)\right)$.
Dadurch wird $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ ein metrischer Raum. Haben also den Begriff der Stetigkeit.

(i) Bereits gesehen: $\gamma: [0,1] \to G \subset GL(n,\mathbb{C})$ ist stetig
$\iff$ alle Matrixelemente $\gamma_{ij}: [0,1] \to \mathbb{C}$ $(i,j = 1, \dots, n)$ sind stetig.

(ii) $G \subset GL(n,\mathbb{C})$, $H \subset GL(m,\mathbb{C}) \Rightarrow$ Eine Abbildung $\phi: G \to H$ ist stetig an $g \in G$, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ sodass
$|d(g,g')| < \delta \Rightarrow |d(\phi(g), \phi(g'))| < \varepsilon$.

(Übung. Ein Gruppenhomomorphismus ist stetig, wenn er stetig am Einselement ist.)

Definition Eine Matrix-Lie-Gruppe ist eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ oder $GL(n,\mathbb{C})$.

Satz Sei $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ eine Untergruppe. Dann sind

$$G \times G \to G, \quad (A,B) \mapsto AB \quad \text{(Verknüpfung)}$$

und

$$G \to G, \quad A \mapsto A^{-1} \quad \text{(Inversion)}$$

stetig.

Beweis Verknüpfung: Übung. Inversion: $A^{-1} = \left((-1)^{i+j} \frac{\det A^{ji}}{\det A} \right)$,

A^{ji} = A ohne j-te Zeile und i-te Spalte. $\square$

Hatten auch bereits den Begriff des Wegzusammenhangs.

Satz Sei $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ eine Untergruppe. Dann ist $\sim$ mit

$$A \sim B \iff \exists \text{ stetiger Pfad } \gamma : [0,1] \to G, \ \gamma(0) = A, \ \gamma(1) = B,$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse (= Wegzusammenhangs-komponente) G_0 von $I \in G$ ist ein Normalteiler. Haben

$$G/G_0 = \text{(Gruppe der) Wegzusammenhangskomponenten von } G.$$

Beispiele
- $SO(n)$, $SU(n)$, $U(n)$ sind wegzusammenhängend (Übung.)
- $O(n)$ besteht aus 2 Zusammenhangskomponenten.
- $O(1,3)$ besteht aus 4 Zusammenhangskomponenten.

Lie-Algebren

Zunächst ein wenig Motivation. Statt z.B. die Gruppe $SO(3)$ (und ihre Darstellungen) direkt zu analysieren, schaut man sich die Struktur von $SO(3)$ nahe I an — also "infinitesimale Drehungen".

Konkret: $$\frac{d}{d\theta} R_3(\theta)\Big|_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

· Beobachtung: die Menge der infinitesimalen Drehungen ist ein Vektorraum $\underline{so}(3) = Lie(SO(3))$ mit Basis $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & 0 & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -1 \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

· Ungekehrt: Ist z.B. $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ eine infinitesimale Drehung um die z-Achse, so können wir eine endliche Drehung um den Winkel $\theta_0 \in \mathbb{R}$ als Matrix $R(\theta_0)$ erhalten, wobei

$$\circledast \quad \begin{cases} R(0) = I \\ R'(0) = X, \text{ und allgemeiner } R'(\theta) = X R(\theta) \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\circledast$ ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung (bzw. ein $3^2 \times 3^2$-System); die Lösung ist $R(\theta) = \exp(\theta X)$ — "Matrix-Exponential".

· Mehr Struktur auf $\underline{so}(3)$. Seien $X, Y \in \underline{so}(3)$ zwei infinitesimale Drehungen, und $R(\theta) = e^{\theta X}$, $Q(\theta) = e^{\theta Y} \in SO(3)$. In der Regel kommutieren zwei Drehungen $R(\theta)$ und $Q(\theta)$ nicht. Aber:

$R(\theta)^{-1} Q(\theta)^{-1} R(\theta) Q(\theta) \approx$ Rotation um θ^2 Grad, erzeugt von $XY - YX$. (Übung.)

Definition Ein reeller oder komplexer Vektorraum $\underline{g}$ heisst Lie-Algebra, falls $\underline{g}$ versehen ist mit einer bilinearen Abbildung

$$[\ ,\ ] : \underline{g} \times \underline{g} \to \underline{g},$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $[X, Y] = -[Y, X] \quad \forall\, X, Y \in \underline{g}$ (Antisymmetrie)

(ii) $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0 \quad \forall\, X, Y, Z \in \underline{g}$ (Jacobi-Identität)

Bemerkung Wegen (i) ist die Bilinearität äquivalent zu der Eigenschaft

$$[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X, Z] + \mu [Y, Z] \quad \forall\, X, Y, Z \in \underline{g}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}.$$

Der Raum $\underline{so}(3)$ ist ein Beispiel eine reellen, 3-dimensionalen Lie-Algebra, mit $[X,Y] = XY - YX$ (Kommutator von Matrizen).

Definition Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe. Dann ist die Lie-Algebra $\mathrm{Lie}(G)$ von G die Menge aller Tangentialvektoren $\dot{X}(0) \in M_n(\mathbb{C})$ von glatten Kurven $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$, $X(0) = I$.

Werden zeigen: $\mathrm{Lie}(G)$ ist eine Lie-Algebra, wie der Name anzeigt! Dafür ist aber die obige Definition nicht sehr handlich; stattdessen werden wir eine "praktischere" äquivalente Definition verwenden, die die Exponentialfunktion verwendet.

- **Matrix-Exponentialfunktion**

Arbeiten über $\mathbb{C}$, aber alles funktioniert genau gleich über $\mathbb{R}$.

Für $X = (X_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ definieren wir die Norm

$$\|X\| := \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |X_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = d(0,X).$$

Lemma $\|XY\| \leq \|X\|\,\|Y\|$. Insbesondere: $\|X^k\| \leq \|X\|^k$.

Beweis
$$\|XY\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \Big|\sum_{k=1}^{n} X_{ik} Y_{kj}\Big|^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} |X_{ik}|^2\Big)\Big(\sum_{l=1}^{n} |Y_{lj}|^2\Big)$$
$$= \|X\|^2 \|Y\|^2. \qquad \square$$

Lemma Die Reihe $\exp(X) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$ $(X \in M_n(\mathbb{C}))$ konvergiert absolut.

Beweis $\left\|\frac{X^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|X\|^k}{k!}$, also $\sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{X^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X\|^k}{k!} = e^{\|X\|} < \infty$.

Lemma Seien $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$.

(i) Falls $XY = YX$, gilt $\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$,

(ii) $\exp(X) \in GL(n,\mathbb{C})$, und $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$.

(iii) $\forall\, A \in GL(n,\mathbb{C})$ gilt $A\exp(X)A^{-1} = \exp(AXA^{-1})$.

(iv) $\det(\exp(X)) = e^{\mathrm{Tr}(X)}$

(v) $\exp(X^*) = \exp(X)^*$, $\exp(X^T) = \exp(X)^T$.

Beweis (i) $\exp(X)\exp(Y) = \sum\limits_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{l!} X^k Y^l = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum\limits_{k+l=n} \frac{n!}{k!\,l!} X^k Y^l$

$$\overset{XY=YX}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(X+Y)^n = \exp(X+Y).$$

(ii) folgt aus $\exp(0) = I$ und (i).

(iii), (v): Übung.

(iv): Sei $A \in GL(n,\mathbb{C})$ mit $AXA^{-1} = Y =$ obere Dreiecksmatrix

$$= \begin{pmatrix} y_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y^k = \begin{pmatrix} y_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n^k \end{pmatrix} \Rightarrow A\exp(X)A^{-1} = \begin{pmatrix} e^{y_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{y_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\exp(X)) = \det(A\exp(X)A^{-1}) = e^{y_1+\dots+y_n} = e^{\mathrm{Tr}(Y)}$$

$$= e^{\mathrm{Tr}(AXA^{-1})} = e^{\mathrm{Tr}(X)}.$$ $\square$

Die Exponentialfunktion (oder -abbildung) ist also

$$\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{C}),$$

Beispiel $X = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$. Was ist $\exp(X)$?

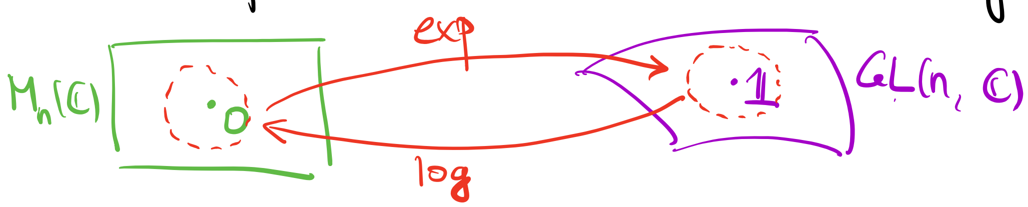
- $X^2 = \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X^{2k} = (-1)^k \theta^{2k} I \\ X^{2k+1} = (-1)^k \theta^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\Rightarrow \exp(X) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\theta^{2k}\right) I + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\theta^{2k+1}\right)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie im Fall der Exponentialfunktion gilt:

Lemma $\exp: M_n(\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ ist in einer Umgebung von $0_{n\times n}$ invertierbar.



Beweis Die Reihe $\log(X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(X-\mathbb{1})^n}{n}$ konvergiert für $\|X - \mathbb{1}\| < 1$ absolut, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| (-1)^{n+1} \frac{(X-\mathbb{1})^n}{n} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|X-\mathbb{1}\|^n}{n} = -\log(1 - \|X-\mathbb{1}\|) < \infty.$$

Wie im Fall $X \in \mathbb{C}$ folgt dann $\begin{cases} \exp(\log X) = X, & \|X - \mathbb{1}\| < 1, \\ \log(\exp(X)) = X, & \|\exp(X) - \mathbb{1}\| < 1. \end{cases}$ $\square$

Definition Eine Abbildung $X: \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{C})$ heisst Einparametergruppe, falls X stetig differenzierbar und ein Gruppenhomomorphismus ist:

$X(0) = I, \quad X(t+s) = X(t)X(s) \;\; \forall\, t,s \in \mathbb{R}.$

Bemerkung Das Bild $\operatorname{im}(X) \subset GL(n,\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe.

Satz (i) $\forall\, X \in M_n(\mathbb{C})$ ist $t \mapsto \exp(tX)$ eine Einparametergruppe.

(ii) Alle Einparametergruppen sind von dieser Form; $X \in M_n(\mathbb{C})$ heisst Erzeuger.

Beweis (i) folgt direkt aus den Eigenschaften von exp.

(ii) Ist $t \mapsto X(t)$ eine Einparametergruppe, so ist

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = \lim_{h\to 0} \frac{X(t+h)-X(t)}{h} = X(t) \lim_{h\to 0} \frac{X(h)-X(0)}{h} \\ \qquad = X(t)\,\dot{X}(0) \\ X(0) = I. \end{cases}$$

Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\Rightarrow X(t) = \exp(\underbrace{\dot{X}(0)}_{\text{Erzeuger}}). \qquad \square$$

Jetzt also die "bessere" Definition von Lie(G):

Definition Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe. Dann ist

$$\mathrm{Lie}(G) = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) : \exp(tX) \in G \ \forall t \in \mathbb{R} \}.$$

Lemma Diese Definition stimmt mit der vorigen ("Lie(G) = Tangentialvektoren an 1") überein.

Beweis.
- $(-\varepsilon,\varepsilon) \ni t \mapsto \exp(tX) \in G$ ist eine glatte Kurve mit
$$\frac{d}{dt} \exp(tX)\Big|_{t=0} = X.$$

- Umgekehrt: sei $X: (-\varepsilon,\varepsilon) \to G$, $X(0)=I$, eine glatte Kurve.

Müssen zeigen: $\exp(t\dot{X}(0)) \in G \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Dazu: sei $t \in \mathbb{R}$. Für grosse $n \in \mathbb{N}$ ist $\| X(\frac{t}{n}) - I \| < 1$, also

$$G \ni X(\tfrac{t}{n})^n = \exp\left[n \log (X(\tfrac{t}{n}))\right]$$
$$= \exp\left[n \log\left(I + \tfrac{t}{n}\dot{X}(0) + \mathcal{O}(n^{-2})\right)\right]$$

$$= \exp\left[n \left(\tfrac{t}{n} \dot{X}(0) + O(n^{-2}) \right) \right]$$

$$= \exp\left(t \dot{X}(0) + O(n^{-1}) \right) \xrightarrow{n\to\infty} \exp(t\dot{X}(0)).$$

Da G abgeschlossen ist, liegt dieser Grenzwert (von Elementen von G) auch in G; dies war zu zeigen. $\square$

Wir werden später zeigen:

Satz Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe. Dann ist $\mathrm{Lie}(G)$ eine (reelle) Lie-Algebra mit Lie-Klammer $[X,Y] = XY - YX$ (Matrix-Kommutator).

Beispiele (1). $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) := \mathrm{Lie}(GL(n,\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$. (In der Tat, für jedes $X \in M_n(\mathbb{R})$ ist $\exp(tX) \in GL(n,\mathbb{R})$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.)

- selbiges für $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$.

- Eine Basis des Vektorraums $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & - & 0 \\ | & 1 & | \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ j & \end{array}, \qquad i,j = 1,\dots,n.$$

Die Lie-Algebra-Struktur ist eindeutig bestimmt durch

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \underbrace{E_{il}\delta_{jk}}_{=E_{ij}E_{kl}} - \underbrace{E_{jk}\delta_{il}}_{=E_{kl}E_{ij}}$$

- $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ hat $\mathbb{R}$-Basis $E_{jk},\ \underset{\sqrt{-1}}{i} E_{jk}$, $j,k = 1,\dots,n$.

- **Bemerke:** $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = n^2$,

$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = 2n^2$.

(2) **Lemma** $\underline{u}(n) = \mathrm{Lie}(U(n)) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : X + X^* = 0\}$,
$\underline{su}(n) = \mathrm{Lie}(SU(n)) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : X + X^* = 0,\ \mathrm{Tr}(X) = 0\}$.

Beweis. Sei $X \in M_n(\mathbb{C})$. Dann ist $\exp(tX) \in U(n)$

$$\Leftrightarrow I = \exp(tX)(\exp(tX))^* = \exp(tX)\exp(tX^*).$$

Ableiten in t: $\quad 0 = X + X^*$.

- Umgekehrt: gilt $X + X^* = 0$, so ist

$$\exp(tX)\exp(tX^*) = \exp\big(t(X+X^*)\big) = \exp(0) = I$$

- $X \in \underline{u}(n)$ liegt in $\underline{su}(n) \Leftrightarrow 1 = \det(\exp(tX)) = e^{t\,\mathrm{Tr}(X)}$ $\forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(X) = 0$. $\square$

(2') $\underline{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : X + X^* = 0, \mathrm{Tr}\, X = 0\} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(t_1, t_2, t_3)$,

$t_j = i\sigma_j$, $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Pauli-Matrizen.

Lie-Algebra-Struktur: $[t_j, t_k] = -2\sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon_{jk\ell}\, t_\ell$, wobei

$$\varepsilon_{jk\ell} = \begin{cases} 0, & \{j,k,\ell\} \neq \{1,2,3\} \\ \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j & k & \ell \end{pmatrix} & \text{sonst} \end{cases}.$$ (Übung.)

(3) **Lemma** $\underline{o}(n) = \mathrm{Lie}(O(n)) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X + X^T = 0\}$
$= \underline{so}(n) = \mathrm{Lie}(SO(n))$.

Beweis Analog zu (2). $\square$

Die Campbell-Baker-Hausdorff (CBH)-Formel

Die Verbindung zwischen der Verknüpfung in einer Matrix-Lie-Gruppe G und dem Matrix-Kommutator in $\underline{g} = \mathrm{Lie}(G)$ ist:

Satz (CBH). Seien $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. Dann gilt für kleine $t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(tX)\exp(tY) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} t^k z_k\Big),$$ wobei z_k = Linearkombination von $(k-1)$-fachen Kommutatoren, und die Reihe konvergiert.

Mini-Version: $\exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(tX + tY + \frac{t^2}{2}[X,Y] + \mathcal{O}(t^3)\right)$.

(Also $Z_1 = X+Y$, $Z_2 = \frac{1}{2}[X,Y]$; weiter $Z_3 = \frac{1}{12}\left([X,[X,Y]] + [Y,[Y,X]]\right), \ldots$)

Beweis der Mini-Version: ausmultiplizieren (Übung). $\square$

Satz Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe. Dann ist $\mathrm{Lie}(G)$ eine (reelle) Lie-Algebra mit Lie-Klammer $[X,Y] = XY - YX$ (Matrix-Kommutator.)

Beweis (1) $\mathrm{Lie}(G)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $X \in \mathrm{Lie}(G)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda X \in \mathrm{Lie}(G)$ per Definition. Ist weiter $Y \in \mathrm{Lie}(G)$, so ist für $t \in \mathbb{R}$

$$G \ni \exp\left(\tfrac{1}{n}tX\right)\exp\left(\tfrac{1}{n}tY\right) \overset{\substack{n \text{ large,} \\ \text{CBH}}}{=} \exp\left(\tfrac{1}{n}t(X+Y) + \mathcal{O}(n^{-2})\right)$$

$$\Rightarrow G \ni \left(\exp\left(\tfrac{1}{n}tX\right)\exp\left(\tfrac{1}{n}tY\right)\right)^n = \exp\left(t(X+Y) + \mathcal{O}(n^{-1})\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \exp\left(t(X+Y)\right)$$

abgeschlossen

$$\Rightarrow \exp\left(t(X+Y)\right) \in G$$

$$\Downarrow \; t \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

$$X+Y \in \mathrm{Lie}(G)$$

(2) $X, Y \in \mathrm{Lie}(G) \Rightarrow [X,Y] \in \mathrm{Lie}(G)$.

Genügt zu zeigen: $\exp([X,Y]) \in G$. (Anwendung mit tX statt X gibt $\exp(t[X,Y]) \in G$ $\forall t \in \mathbb{R}$, also $[X,Y] \in \mathrm{Lie}(G)$)

Dazu: $$\left[\exp\left(\tfrac{1}{n}X\right)\exp\left(\tfrac{1}{n}Y\right)\exp\left(-\tfrac{1}{n}X\right)\exp\left(-\tfrac{1}{n}Y\right)\right]^{n^2} \quad (\in G)$$

$$\overset{\substack{n \text{ large} \\ \text{CBH}}}{=} \left[\exp\left(\tfrac{1}{n}(X+Y) + \tfrac{1}{2n^2}[X,Y] + \mathcal{O}(n^{-3})\right)\exp\left(-\tfrac{1}{n}(X+Y) + \tfrac{1}{2n^2}[X,Y] + \mathcal{O}(n^{-3})\right)\right]^{n^2}$$

$$= \left[\exp\left(\tfrac{1}{n^2}[X,Y] + \mathcal{O}(n^{-3})\right)\right]^{n^2} = \exp\left([X,Y] + \mathcal{O}(n^{-1})\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \exp([X,Y]) \in G,$$ da G abgeschlossen ist. $\square$

Wie kann man umgekehrt eine Lie-Gruppe G aus ihrer Lie-Algebra rekonstruieren?

(1) nicht eindeutig: $O(n)$, $SO(n)$ haben dieselbe Lie-Algebra.
$\rightsquigarrow$ können höchstens die Zusammenhangskomponente G_0 des Einselementes bestimmen.

(2) Naiver Versuch: $G \overset{?}{=} \{\exp(X) : X \in \mathrm{Lie}(G)\}$. Nein! Die Abbildung $\exp: \mathrm{Lie}(G) \to G$ ist nicht immer surjektiv.
(Beispiel: $G = SL(2,\mathbb{R}) \rightsquigarrow$ Übung.)

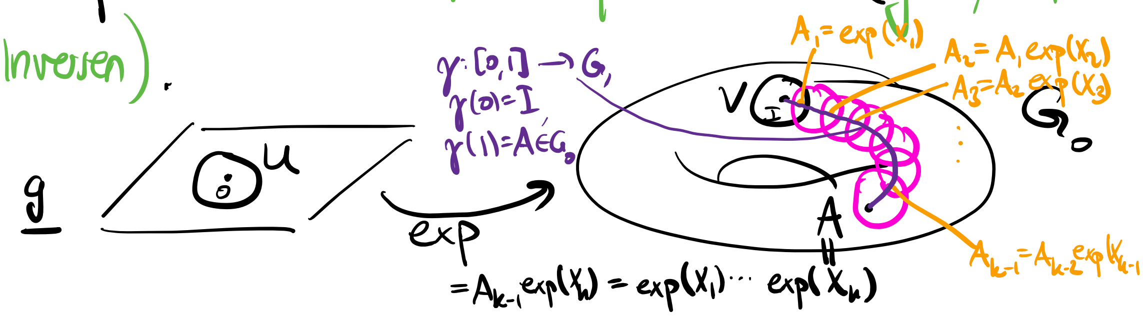
(3) Subtiler: $SU(2)$ und $SO(3)$ haben isomorphe Lie-Algebren, d.h. $\exists\ \phi: \underline{so}(3) \to \underline{su}(2)$ Isomorphismus von Vektorräumen, sodass zudem $[\phi(X), \phi(Y)] = [X,Y]\ \forall X,Y \in \underline{so}(3)$. Aber $SO(3)$ und $SU(2)$ sind nicht isomorphe Lie-Gruppen!

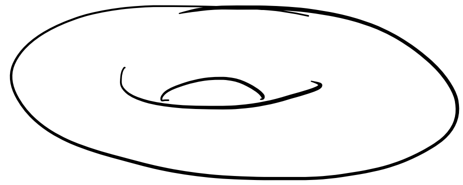
Satz Sei G eine Matrix-Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\underline{g}$. Dann ist die Gruppe aller Matrizen der Form

$$\exp(X_1) \cdots \exp(X_k), \qquad X_1, \dots, X_k \in \underline{g},\ k \geq 1,$$

gleich G_0 = Zusammenhangskomponente von $I \in G$.

Beweis Zentraler Punkt: $\exists$ offene Umgebungen $U \subset \underline{g}$ von 0,
$V \subset G$ von I,
sodass $\exp: U \to V$ ein Diffeomorphismus ist (glatt, mit glatten Inversen).





G (mit mehreren Zshgs.-komponenten) $\square$