Zuletzt noch zurück zur Frage, wieviele irreduzible Darstellungen eine endliche Gruppe hat.

Lemma Seien $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_k, V_k)$ alle irreduziblen Darstellungen von G; benutze auf jedem V_α ein Skalarprodukt, sodass ρ_α unitär ist. Schreibe $\rho_{\alpha,ij}$ für die Matrixelemente von ρ_α bzgl. einer Orthonormalbasis von G. Dann bilden die Funktionen

$$\sqrt{\dim V_\alpha}\, \rho_{\alpha,ij} : G \to \mathbb{C} \qquad (\alpha = 1, \dots, k, \quad i,j = 1, \dots, d_\alpha = \dim V_\alpha) \quad \oplus$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}[G]$.

Beweis Grosser Orthogonalitätssatz $\iff$ $(\rho_{\alpha,ij}, \rho_{\beta,kl}) = \begin{cases} \frac{1}{\dim V_\alpha}, & \alpha = \beta, (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Die $\rho_{\alpha,ij}$ sind orthonormal, insbesondere linear unabhängig.

Zudem ist $\dim \mathbb{C}[G] = |G| = \sum_{\alpha=1}^{k} d_\alpha^2$ = Anzahl der Funktionen $\oplus$.

$\Rightarrow$ $\{\rho_{\alpha,ij}\}$ ist eine Basis. $\square$

Beispiel $G = D_3$, $\rho_1 : D_3 \to GL(2, \mathbb{C})$ wie üblich

$\rho_2 : D_3 \to GL(1, \mathbb{C})$ triviale Darstellung.

g	I	R	R^2	S	RS	R^2S
$\rho_1(g)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\rho_2(g)$	1	1	1	1	1	1

- $\frac{1}{6} \sum |\bullet|^2 = \frac{1}{6}\left(0^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 0^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right) = \frac{1}{2} \leftarrow \dim(\mathbb{C}^2)$
- $\frac{1}{6} \sum |\bullet|^2 = \frac{1}{6}(1^2 + \dots + 1^2) = 1 = \frac{1}{1} \leftarrow \dim(\mathbb{C})$
- $\frac{1}{6} \sum \bullet\, \overline{\bullet} = \frac{1}{6}\left(0 \cdot 1 + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 1 + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 1\right) = 0.$

Satz Selbe Notation. Die Charaktere χ_{ρ_i} bilden eine Orthonormalbasis des Raumes $\{f : G \to \mathbb{C} : f \text{ Klassenfunktion}\} \subset \mathbb{C}[G]$ der Klassenfunktionen.

Beweis Die χ_{ρ_i} sind orthonormal. Es genügt zu zeigen, dass jede Klassenfunktion eine Linearkombination von Charakteren ist.

Idee: Mittelung. Sei $f: G \to \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion, dann gilt

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f(h^{-1}gh), \quad \text{da} \quad f(g) = f(h^{-1}gh) \ \forall h \in G.$$

Wir können zudem schreiben (in der Notation des obigen Satzes)

$$f(g) = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} c_{\alpha,ij} \, \rho_{\alpha,ij}(g), \qquad c_{\alpha,ij} \in \mathbb{C}$$

Zusammengenommen,

$$f(g) = \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{i,j=1}^{d_\alpha} c_{\alpha,ij} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ij}(h^{-1}gh) \right). \quad \circledast$$

Berechnen (da $\rho_\alpha(h^{-1}gh) = \rho_\alpha(h)^* \rho_\alpha(g) \rho_\alpha(h)$)

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \rho_{\alpha,ij}(h^{-1}gh)$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \sum_{k,l=1}^{d_\alpha} \overline{\rho_{\alpha,ki}(h)} \, \rho_{\alpha,kl}(g) \, \rho_{\alpha,lj}(h) =: S.$$

Nach dem Grossen Orthogonalitätssatz gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \overline{\rho_{\alpha,ki}(h)} \, \rho_{\alpha,lj}(h) = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{ij} \delta_{kl}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{d_\alpha} \sum_{k,l=1}^{d_\alpha} \delta_{ij} \delta_{kl} \rho_{\alpha,kl}(g) = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{ij} \chi_\alpha(g).$$

Setzt man dies in $\circledast$ ein, so haben wir gezeigt:

$$f(g) = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{d_\alpha} \frac{c_{\alpha,ii}}{d_\alpha} \right) \chi_\alpha(g).$$

Also ist f eine Linearkombination der χ_α, $\alpha = 1, \dots, k$. $\square$

Korollar Die Anzahl der irreduziblen komplexen endlich-dimensionalen Darstellungen einer endlichen Gruppe G ist $=$ Anzahl der Konjugationsklassen von G.

Die Charaktertafel einer endlichen Gruppe G.

Seien $C_1, \dots, C_k \subset G$ die Konjugationsklassen von G,

$\chi_1, \dots, \chi_k : G \to \mathbb{C}$ die Charaktere aller irreduziblen Darstellungen von G.

Beachte: $\chi_\alpha(g)$ ist konstant für $g \in C_j$, schreiben $\chi_\alpha(C_j)$.

Definition Die Charaktertafel von G ist die quadratische Matrix $\left(\chi_\alpha(C_j)\right)_{\alpha,j=1,\dots,k}$.

Satz Die Matrix $\left(\sqrt{\frac{|C_j|}{|G|}}\,\chi_\alpha(C_j)\right)_{\alpha,j=1,\dots,k}$ ist unitär.

Beweis Die Zeilen sind orthonormal:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{|C_j|}{|G|} \chi_\alpha(C_j)\overline{\chi_\beta(C_j)} = \delta_{\alpha\beta}. \qquad \square$$

Korollar Die Spalten sind orthonormal:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \chi_\alpha(C_i)\overline{\chi_\alpha(C_j)} = \frac{|G|}{|C_i|}\delta_{ij}.$$

Beispiel Charaktertafel von S_3.

Sei $t = (1\ 2)$, $s = (1\ 2\ 3)$. Da

$$S_3 = \{1, (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\},$$

hat S_3 3 Konjugationsklassen:

$$[1] = \{1\}$$
$$[t] = \{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$$
$$[s] = \{(1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$$

$\Rightarrow$ S_3 hat 3 irreduzible Darstellungen.

- Haben bereits gesehen: $\rho_1 : S_3 \to GL(1,\mathbb{C})$ triviale Darstellung

  $\rho_2 : S_3 \longrightarrow GL(V)$, $V = \{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1+z_2+z_3=0\}$.

Für ρ_2, in der Basis $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, haben

$\rho_2(1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$,

$\rho_2(t)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\rho_2(t)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \rho_2(t) = \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$,

$\rho_2(s)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\rho_2(s)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \rho_2(s) = \begin{pmatrix}-1 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

Bislang:

	$[1]$	$3[t]$	$2[s]$
χ_1	1	1	1
χ_2	2	0	-1

- Da $|S_3| = 6 = 1^2 + 2^2 + d_3^2 \Rightarrow d_3 = 1$. Wir suchen also noch eine weitere 1-dimensionale Darstellung.

  Behauptung: $\rho_3 = \det \circ \rho_2 : S_3 \to \mathbb{C}^\times = GL(1,\mathbb{C})$ ist die gesuchte Darstellung. ($\rightsquigarrow$ Übung. Vorzeichen-/Signumsdarstellung.)

  Alternative: suchen dritte Zeile der Charaktertafel, (a,b,c), mit

  $\frac{1}{6}\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right) = 1$

  Grössen der Konjugationsklassen

  $\frac{1}{6}(a\cdot 1\cdot 1 + b\cdot 1\cdot 3 + c\cdot 1\cdot 2) = 0$

  $\frac{1}{6}(a\cdot 2\cdot 1 + b\cdot 0\cdot 3 + c\cdot(-1)\cdot 2) = 0$

  $\Rightarrow (a,b,c) = (1,-1,1)$.

- Zusammenfassung:

	$[1]$	$3[t]$	$2[s]$
χ_1	1	1	1
χ_2	2	0	-1
χ_3	1	-1	1

Grosses Beispiel: irreduzible Darstellungen, Charaktertafel von D_n.

$D_n = \{1, R, \dots, R^{n-1}, S, RS, \dots, R^{n-1}S\}$.

Haben $R^n = 1$, $S^2 = 1$, und $SR = R^{-1}S$.

Lemma. (i) Eine Darstellung $\rho: D_n \to GL(V)$ ist durch $\rho(R), \rho(S)$ eindeutig bestimmt.

(ii) Ist V ein Vektorraum und $\bar{R}, \bar{S} \in GL(V)$ mit

$(*)$ $\bar{R}^n = I$, $\bar{S}^2 = I$, $\bar{S}\bar{R} = \bar{R}^{-1}\bar{S}$, so ist

$$\rho: D_n \to GL(V), \quad \rho(R^i S^j) = \bar{R}^i \bar{S}^j,$$ eine Darstellung.

Beweis (i) Folgt aus der Darstellungseigenschaft $\rho(R^i S^j) = \rho(R)^i \rho(S)^j$.

(ii) Für $i, k = 0, \dots, n-1$ und $j, l = 0, 1$, haben

$$\begin{aligned}
\rho(R^i S^j \cdot R^k S^l) &= \rho(R^{i+k-2jk} S^{j+l}) \\
&= \bar{R}^{i+k-2jk} \bar{S}^{j+l} \\
&= \bar{R}^i \bar{S}^j \circ \bar{R}^k \bar{S}^l \\
&= \rho(R^i S^j)\, \rho(R^k S^l)
\end{aligned}$$

Also ist $\rho: D_n \to GL(V)$ ein Gruppenhomomorphismus. $\square$

Wir müssen also Vektorräume V und Abbildungen $\bar{R}, \bar{S}$ finden, sodass

$(*)$ $\bar{R}^n = I$, $\bar{S}^2 = I$, $\bar{S}\bar{R} = \bar{R}^{-1}\bar{S}$ gilt.

Schritt 1. 1-dimensionale Darstellungen: $V = \mathbb{C}$, $\overline{R}, \overline{S}$ = komplexe Zahlen $\neq 0$.

- $\overline{R}^n = 1 \Leftrightarrow \overline{R} = e^{\frac{2\pi i}{n}k}$ für ein $k = 0, \dots, n-1$.
- $\overline{S}^2 = 1 \Leftrightarrow \overline{S} = \pm 1$.
- $\overline{S}\,\overline{R} = \pm e^{\frac{2\pi i}{n}k} \overset{!}{=} \overline{R}^{-1}\overline{S} = \pm e^{-\frac{2\pi i}{n}k} \Leftrightarrow e^{\frac{2\pi i}{n}k} = e^{-\frac{2\pi i}{n}k}$

$$\Leftrightarrow e^{2\pi i \cdot \frac{2k}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2k}{n} \in \mathbb{Z}. \quad (\#)$$

Fall 1: n ungerade. Nur $k=0$ erfüllt (#). $\Rightarrow$ 2 Darstellungen

$$\begin{cases} \rho_+(R) = \overline{R} = 1 \\ \rho_+(S) = \overline{S} = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \rho_-(R) = \overline{R} = 1 \\ \rho_-(S) = \overline{S} = -1 \end{cases}$$

Fall 2: n gerade. $k = 0, \frac{n}{2}$ erfüllen (#). Da $e^{\frac{2\pi i}{n}k} = -1$ für $k = \frac{n}{2}$,

erhalten wir 4 Darstellungen, $\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--}$,

z.B. $\rho_{+-}(R) = 1$ — Vorzeichen von $\overline{R}$ — Vorzeichen von $\overline{S}$

$\rho_{-+}(S) = -1$.

Schritt 2. 2-dimensionale Darstellungen: $V = \mathbb{C}^2$, $\overline{R}, \overline{S}$ = komplexe invertierbare 2×2 Matrizen.

(i) Sei λ ein Eigenwert von $\overline{R} \Rightarrow \lambda^n$ ist ein Eigenwert von $\overline{R}^n = I$

$\Rightarrow \lambda^n = 1 \Rightarrow \lambda = e^{\frac{2\pi i}{n}k}$ für ein $k = 0, \dots, n-1$.

- Ist $v \in \mathbb{C}^2, v \neq 0$, ein Eigenvektor von $\overline{R}$, $\overline{R}v = \lambda v$, so ist

$\overline{R}^{-1}(\overline{S}v) = \overline{S}\,\overline{R}v = \lambda \overline{S}v \Rightarrow \overline{S}v$ ist ein Eigenvektor von $\overline{R}$ mit Eigenwert λ^{-1}.

Fall 1. $\overline{S}v$ ist proportional zu v.

$\Rightarrow \mathbb{C}v$ ist ein invarianter Unterraum. $\lightning$ zur Irreduzibilität.

Fall 2 (einzige Möglichkeit!) $\{v, \overline{S}v\}$ sind linear unabhängig, also eine Basis von $\mathbb{C}^2$. In Bezug auf diese Basis,

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \qquad (\lambda = e^{\frac{2\pi i}{n}k}).$$

- Diese $\bar{S}, \bar{R}$ erfüllen ⊛. (Übung) $\Rightarrow$ $\rho(S) = \bar{S}, \rho(R) = \bar{R}$ ist Darstellung.
- Falls $\lambda = \lambda^{-1}$, ist die Darstellung reduzibel ($\mathbb{C}\binom{1}{1}$ ist ein invarianter Unterraum); ansonsten ist ρ irreduzibel.

(ii) Fall 1. n ungerade. Für $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{n}k}$, $k = 1, \dots, n-1$ gilt $\lambda \neq \lambda^{-1}$, also haben wir $n-1$ irreduzible 2-dimensionale Darstellungen

$$\rho_k(R) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{n}k} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2\pi i}{n}k} \end{pmatrix}$$

$$\rho_k(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fall 2. n gerade. Die Darstellungen ρ_k für $k = 1, \dots, n-1$, $k \neq \frac{n}{2}$, sind irreduzibel.

(iii) Für k, k' mit $e^{\frac{2\pi i}{n}k} \neq e^{\frac{2\pi i}{n}k'}, e^{-\frac{2\pi i}{n}k'}$ sind die Darstellungen $\rho_k, \rho_{k'}$ inäquivalent, da die Menge der Eigenwerte von $\rho_k(R)$ $\neq$ Menge der Eigenwerte von $\rho_{k'}(R)$ ist.

Zusammenfassung der gefundenen (paarweise inäquivalenten) irreduziblen Darstellungen

n ungerade: ρ_+, ρ_- (1-dim.), $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\frac{n-1}{2}}$ (2-dim.)

$$\Big\} \sum \underbrace{d_j^2}_{\text{Dim. der Darstellungsräume}} = 1^2 + 1^2 + \left(\tfrac{n-1}{2}\right) \cdot 2^2 = 2n = |D_n|$$

n gerade: $\rho_{++}, \rho_{+-}, \rho_{-+}, \rho_{--}$ (1-dim.), $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{\frac{n}{2}-1}$ (2-dim.)

$$\Big\} \sum d_j^2 = 4 \cdot 1^2 + \left(\tfrac{n}{2} - 1\right) \cdot 2^2 = 2n = |D_n|.$$

$\Rightarrow$ Dies sind alle irreduziblen Darstellungen von D_n!

Charaktertafel von D_n:

n ungerade:

	R^a	$R^a S$
χ_{ρ_+}	1	1
χ_{ρ_-}	1	-1
χ_{ρ_k}	$2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}a\right)$	0

$(a=0,\dots,n-1)$

$(k=1,\dots,\frac{n-1}{2})$.

n gerade:

	R^a	$R^a S$
$\chi_{\rho_{++}}$	1	1
$\chi_{\rho_{+-}}$	1	-1
$\chi_{\rho_{-+}}$	$(-1)^a$	1
$\chi_{\rho_{--}}$	$(-1)^a$	$(-1)^{a+1}$
χ_{ρ_k}	$2\cos\left(\frac{2\pi k}{n}a\right)$	0

$(a=0,\dots,n-1)$

$(k=1,\dots,\frac{n}{2}-1)$.

Bemerkung

- Die Orthogonalitätsrelation $(\chi_{\rho_j}, \chi_{\rho_k}) = \delta_{jk}$ schreibt sich
$$\frac{1}{n}\sum_{a=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi j}{n}a\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \delta_{jk}.$$
- Die Standarddarstellung $D_n \to GL(2,\mathbb{R})$, aufgefasst als komplexe Darstellung $\rho: D_n \to GL(2,\mathbb{C})$, ist äquivalent zu ρ_1. (Übung. Berechne den Charakter von ρ: er ist $=\chi_{\rho_1}$.)