Gruppen

Def. Eine **Gruppe** ist eine Menge G (endlich oder unendlich) mit einem Produkt (Multiplikation, Verknüpfung)

$$G \times G \to G, \quad (g,h) \longmapsto gh,$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Einselement / neutrales Element: $\exists\, 1 \in G$ sodass

$$g1 = 1g = g \quad \forall\, g \in G.$$

(2) Inverses Element: $\forall\, g \in G\ \exists\, g^{-1} \in G$ sodass

$$g g^{-1} = g^{-1} g = 1.$$

(3) Assoziativität: $\quad g(hk) = (gh)k \quad \forall\, g,h,k \in G.$

Begriffe:

- $|G|$ = Anzahl der Elemente von G = **Ordnung** von G
- G heisst **abelsch**, wenn $gh = hg \ \forall\, g,h \in G$ (d.h. die Verknüpfung ist kommutativ).

  Schreibweise (häufig):

  $$gh \rightsquigarrow g+h$$
  $$1 \rightsquigarrow 0$$
  $$g^{-1} \rightsquigarrow -g.$$
  $$g-h = g+(-h).$$

- **(Direktes) Produkt** von zwei Gruppen G_1, G_2: $G_1 \times G_2$, mit Produkt $(g_1,g_2)\cdot(g_1',g_2') = (g_1 g_1', g_2 g_2')$, Einselement $(1,1)$, und $(g_1,g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.

Beispiel. · $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$. Eine **Permutation** von n Elementen ist eine bijektive Abbildung $\pi: \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}$.

Schreibweise: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$

(d.h. π bildet 1 auf $\pi(1)$ ab, 2 auf $\pi(2)$, usw.)

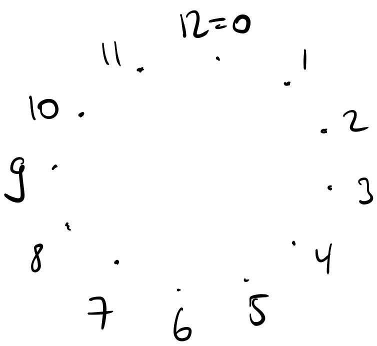
· $S_n = \{\text{Permutationen von } n \text{ Elementen}\}$, "symmetrische Gruppe".

- **Produkt**: Verknüpfung von Abbildungen,
  $(\pi_1 \pi_2)(i) = \pi_1(\pi_2(i))$.
- **Einselement**: Identität, $i \longmapsto i$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.
- **Inverses** von π: π^{-1} mit $\pi^{-1}(\pi(i)) = i$.

- $|S_n| = n!$

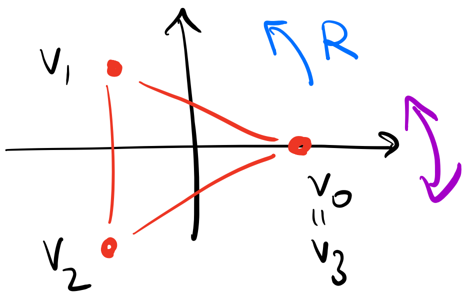
<u>Beispiel</u> **Zyklische Gruppe** der Ordnung n: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (mit Addition mod n) ist eine abelsche Gruppe.

$n = 12$:



<u>Beispiel</u> $n \geq 3$. Die **Diedergruppe** D_n besteht aus den orthogonalen Transformationen der Ebene, die ein reguläres, im Ursprung zentriertes n-Eck auf sich selbst abbilden.

$n = 3$:



S: Spiegelung um Achse durch v_0

R: Rotation um den Ursprung mit Winkel $\frac{2\pi}{n}$.

Ecken, nummeriert gegen den Uhrzeigersinn: $v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n = v_0$.

S: $v_i \longmapsto v_{n-i}$

R: $v_i \longmapsto v_{i+1}$.

<u>Lemma</u>. Die Elemente von D_n sind

$1, R, R^2, \ldots, R^{n-1}$,

$S, RS, R^2S, \ldots, R^{n-1}S$.

Insbesondere ist $|D_n| = 2n$.

Beweis · Die angegebenen Elemente sind in D_n, und paarweise verschieden. (Sie bilden (V_0, V_1) auf unterschiedliche Paare von Ecken ab.)

· Umgekehrt, sei $X \in D_n$. Dann $X V_0 = V_j$ für ein j.

Dann gilt entweder $X V_1 = V_{j+1}$ (Fall 1)

oder $X V_1 = V_{j-1}$. (Fall 2).

Fall 1: $X V_i = R^j V_i$ für $i = 0, 1$.

Fall 2: $X V_i = R^j S V_i$ für $i = 0, 1$.

Da $\{V_0, V_1\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist, ist $X = R^j$ (Fall 1)

$X = R^j S$ (Fall 2). □

· Im letzten Beispiel betrachteten wir Elemente von D_n als Abbildungen auf der Menge $\{V_0, \dots, V_{n-1}\}$ der Ecken. Allgemeiner:

Definition Eine Gruppe G operiert auf einer Menge X wenn eine Abbildung $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$, gegeben ist, sodass:

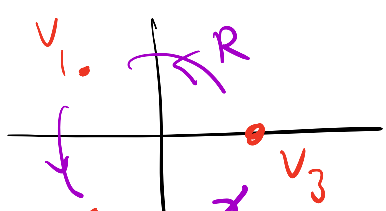
(1) $1x = x \quad \forall x \in X$,

(2) $g(g'x) = (gg')x \quad \forall g, g' \in G, x \in X$.

Die Abbildung $(g, x) \mapsto gx$ heisst auch Linkswirkung.

· Weiterhin sind die Gruppen S_3 und D_3 "dieselben" ("isomorph"): Stellen Sie sich Elemente von S_3 als Permutationen der Ecken des Dreiecks vor.

Dann entspricht R der Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, usw.



v_2

Definition • Ein **Homomorphismus** $\varphi: G \to H$ (mit G, H Gruppen) ist eine Abbildung mit $\varphi(g g') = \varphi(g)\varphi(g')$ $\forall g, g' \in G$.

• Ist φ zusätzlich bijektiv, so heisst φ **Isomorphismus**.

(Schreibweise: $G \cong H$.)

Bemerkung Für einen Homomorphismus φ gilt: $\begin{cases} \varphi(1)\varphi(1) = \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 1. \\ \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(1) \Rightarrow \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}. \end{cases}$

Weitere Beispiele von Gruppen:

Beispiel • Allgemeine lineare Gruppen (general linear group):

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{\text{invertierbare } n \times n\text{-Matrizen mit reellen Einträgen}\},$$

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{ \cdots \text{ komplexen } \cdots \},$$

mit Produkt = Matrix-Multiplikation.

Allgemeiner: V = reeller / komplexer Vektorraum

$$\rightsquigarrow GL(V) = \{\text{invertierbare lineare Abbildungen } V \to V\}.$$

• Orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : (Ax, Ay) = (x, y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$,

wobei $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. Beinhaltet Spiegelungen, Rotationen.

Beobachtung: Per Definition haben wir einen Gruppenhomomorphismus

$$D_n \longrightarrow O(2).$$

• Unitäre Gruppe $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : (Az, Aw) = (z, w) \ \forall z, w \in \mathbb{C}^n\}$,

wobei jetzt $(z, w) = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}$.

• Lorentz-Gruppe $O(1,3) = \{A \in GL(4, \mathbb{R}) : (Ax, Ay)_{1,3} = (x, y)_{1,3} \ \forall x, y \in \mathbb{R}^4\}$, wobei $(x,y)_{1,3} = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$.

(Symmetrien der Raumzeit in Elektromagnetismus, spezieller Relativitätstheorie.)

- Spezielle orthogonale Gruppe
$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = +1\}.$$
(Enthält Rotationen, aber keine Spiegelungen.)

- Spezielle unitäre Gruppe
$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = +1\}.$$

Das Verhältnis etwa von $SO(n)$ zu $O(n)$ wird beschrieben durch:

Definition. Eine Untergruppe H einer Gruppe G ist eine Teilmenge von G (d.h. $H \subset G$) sodass
$$h, h' \in H \Rightarrow hh' \in H; \qquad 1 \in H; \qquad h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H.$$

- Eine Untergruppe $H \subset G$ heisst Normalteiler, falls
$$g h g^{-1} \in H \quad \text{für alle } h \in H, \ g \in G.$$

Also ist $SO(n)$ eine Untergruppe von $O(n)$, und sogar ein Normalteiler, da
$$\det(B A B^{-1}) = \det(B)\det(A)\det(B)^{-1} = \det(A) = 1$$
für $A \in SO(n)$ und $B \in O(n)$ (oder allgemeiner für $B \in GL(n,\mathbb{R})$).

Definition Für eine Untergruppe $H \subset G$, die Menge G/H der Links-Nebenklassen ist die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation
$$g \sim g' \iff \exists h \in H \text{ mit } gh = g'.$$
(Prüfe, dass das in der Tat eine Äquivalenzrelation ist!)

Satz Wenn $H \subset G$ ein Normalteiler ist, so ist G/H eine Gruppe mit Produkt $[g_1][g_2] := [g_1 g_2]$.

Beweis Wenn $[g_1] = [g_1']$ und $[g_2] = [g_2']$, dann gibt es $h_1, h_2 \in H$ mit $g_1' = g_1 h_1$ und $g_2' = g_2 h_2$. Also

$$g_1' g_2' = (g_1 h_1)(g_2 h_2) = g_1 g_2 \, (\underbrace{g_2^{-1} h_1 g_2}_{\in H} h_2) \in [g_1 g_2].$$

Also ist das Produkt auf G/H wohldefiniert.
Weiterhin ist $[1]$ das Einselement, und $[g]^{-1} = [g^{-1}]$. $\square$

Beispiel $O(n)/SO(n) = \{ [\mathbb{1}], [S] \}$, wobei $S \in O(n)$ die Spiegelung um $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist. In der Tat gilt $O(n)/SO(n) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beispiel $\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\} \subset SL(2,\mathbb{C})$ ist eine Untergruppe, und ein Normalteiler, da für $A \in SL(2,\mathbb{C})$ gilt: $A(\pm \mathbb{1})A^{-1} = \pm \mathbb{1}$. Die Gruppe $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\mathbb{1},-\mathbb{1}\}$ ist isomorph zur Gruppe der Möbiustransformationen der Riemannschen Sphäre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, wobei $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Möbiustransformation

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \ni z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

entspricht. (Später: $PSL(2,\mathbb{C}) \cong SO^+(1,3)$, eigentliche orthochrone Lorentzgruppe.)

Und nun noch die letzten beiden allgemeinen Begriffe. Sei $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann ist

$$\ker \varphi = \{ g \in G : \varphi(g) = 1 \}$$ (genannt Kern von φ),

$$\operatorname{im} \varphi = \{ \varphi(g) : g \in G \}$$ (genannt Bild von φ).