G = endliche Gruppe

Wir betrachten ausschliesslich komplexe, endlich-dimensionale Darstellungen.

Der grosse Orthogonalitätssatz

Sei (ρ, V) eine Darstellung, und $(\ ,\ )$ ein Skalarprodukt auf V, sodass ρ unitär ist. Ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ $(n = \dim V)$ eine Orthonormalbasis von V, und $\rho_{ij}(g)$ das (i,j)-Matrixelement von $\rho(g)$, so ist die Matrix

$(\rho_{ij}(g))_{i,j=1,\dots,n}$ unitär (d.h. $\rho_{ij}(g^{-1}) = \overline{\rho_{ji}(g)}$)

Satz Seien (ρ, V), (ρ', V') irreduzible unitäre Darstellungen von G. Schreiben $(\rho_{ij}(g))$, $(\rho'_{kl}(g))$ für die Matrixelemente in Bezug auf Orthonormalbasen von V, V'.

(i) Wenn (ρ, V) und (ρ', V') nicht äquivalent sind, so ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)}\, \rho'_{kl}(g) = 0 \qquad \forall\ i,j,k,l.$$

(ii) $\forall\ i,j,k,l$ gilt

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\rho_{ij}(g)}\, \rho_{kl}(g) = \frac{1}{\dim V} \overbrace{\delta_{ik}}^{=\begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}} \delta_{jl}$$

Beweis (i) Starte mit einer beliebigen linearen Abbildung $\phi : V \to V'$. Via Mittelung, konstruiere aus ϕ eine G-äquivariante Abbildung $\phi_G : V \to V'$:

$$\phi_G := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1}) \circ \phi \circ \rho(g).$$

- G-Äquivarianz: $\phi_G \circ \rho(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1})\, \phi\, \rho(g) \rho(h) =$

$$\overset{g \to gh^{-1}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(h g^{-1})\, \phi\, \rho(g) = \rho'(h) \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho'(g^{-1})\, \phi\, \rho(g) =$$

$$= \rho'(h) \circ \phi_G \qquad (\forall h \in G).$$

· Schur $\Rightarrow$ $\phi_G = 0$, also für die Matrixelemente:

$$\left.\begin{aligned} 0 = (\phi_G)_{jl} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \sum_{i,k} (\rho'(g^{-1}))_{ji}\, \phi_{ik}\, \rho_{kl}(g) \\ &= \sum_{i,k} \Big(\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\rho'_{ij}(g)}\, \rho_{kl}(g) \Big)\, \phi_{ik}. \end{aligned}\right\} \circledast$$

· Wählen ϕ so, dass $\phi_{ik} = 1$ und $\phi_{pq} = 0$ für $(p,q) \neq (i,k)$.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{|G|} \sum \cdots = 0$, wie behauptet.

(ii) Für $\phi : V \to V$ linear, definieren wieder $\phi_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho(g^{-1}) \phi \rho(g)$,

also $\phi_G \in \mathrm{Hom}_G(V,V) \overset{\text{Schur}}{\Longrightarrow} \exists \lambda \in \mathbb{C}$, sodass $\phi_G = \lambda \mathbb{1}$.

Was ist λ? Unter Verwendung der Spur, $\mathrm{tr}((A_{ij})_{i,j=1,\dots,n}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$:

$$\lambda \cdot \dim V = \mathrm{tr}(\lambda \mathbb{1}) = \mathrm{tr}(\phi_G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{tr}(\rho(g^{-1}) \phi \rho(g)) =$$

$$\overset{\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{tr}(\phi \overbrace{\rho(g)\rho(g^{-1})}^{=\mathbb{1}}) = \mathrm{tr}(\phi).$$

$\Rightarrow$ $\phi_G = \frac{1}{\dim V} (\mathrm{tr}\,\phi)\, \mathbb{1}$, also $\boxed{(\phi_G)_{jl} = \frac{1}{\dim V} (\mathrm{tr}\,\phi)\, \delta_{jl}}$. $\#$

Wählen jetzt $\phi_{ik} = 1$, $\phi_{pq} = 0$ $((p,q) \neq (i,k))$, dann $\mathrm{tr}\,\phi = \delta_{ik}$,

und die Behauptung folgt aus $\circledast$ & $\#$. $\square$

Charaktere

Definition Der Charakter einer Darstellung (ρ, V) ist die Abbildung

$$\chi_\rho : G \to \mathbb{C}, \quad \chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g)) = \sum_{i=1}^{\dim V} \rho_{ii}(g).$$

Bemerkung Die Spur $\mathrm{tr}(A)$ einer linearen Abbildung $A: V \to V$ kann mittels einer beliebigen Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ ($n = \dim V$) von V via $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ berechnet werden.

Beispiel $D_3 = \{I, R, R^2, S, RS, R^2S\}$, $\rho: D_3 \to GL(2, \mathbb{R})$,

$$\rho(R) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \rho(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

g	I	R	R^2	S	RS	R^2S
$\chi_\rho(g)$	2	-1	-1	0	0	0

Satz (i) $\chi_\rho(h) = \chi_\rho(ghg^{-1})$, d.h. χ_ρ ist konstant auf Konjugationsklassen $\{ghg^{-1} : g \in G\} \subset G$ (mit $h \in G$ fest).

(ii) Ist $(\rho, V) \cong (\rho', V')$, so gilt $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

(iii) $\chi_\rho(1) = \dim V$.

(iv) $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$.

(v) $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

Beweis (i) folgt aus $\mathrm{tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})) = \mathrm{tr}(\rho(h))$. (Etwas Ähnliches haben wir bereits beim Beweis des Grossen Orthogonalitätssatzes verwendet.)

(ii) $\exists\, \phi: V \to V'$ Isomorphismus mit $\rho'(g) \circ \phi = \phi \circ \rho(g)$ $\forall g \in G$

$\Rightarrow \rho'(g) = \phi\, \rho(g)\, \phi^{-1} \Rightarrow \chi_{\rho'}(g) = \mathrm{tr}(\rho'(g)) = \mathrm{tr}(\rho(g)) = \chi_\rho(g)$.

(iii) $\chi_\rho(1) = \mathbb{1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\dim V} \Big\} \dim V$.

(iv) Ist $\{e_1,\dots,e_n\}$ eine Basis von V und $\{e'_1,\dots,e'_{n'}\}$ eine Basis von V', verwende $\{e_1,\dots,e_n,e'_1,\dots,e'_{n'}\}$ als Basis von $V\oplus V'$! Die Matrix von $(\rho\oplus\rho')(g)$ hat dann die Blockform

$$(\rho\oplus\rho')(g)=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{cc}\rho(g) & 0\\ 0 & \rho'(g)\end{array}\right) & \begin{array}{l}\}\,n \text{ Reihen}\\ \}\,n' \text{ Reihen}.\end{array}\\ \begin{array}{cc}\underbrace{}_{n\text{ Spalten}} & \underbrace{}_{n'\text{ Spalten}}\end{array} & \end{array}$$

$\Rightarrow \operatorname{tr}(\rho\oplus\rho')(g)=\operatorname{tr}\rho(g)+\operatorname{tr}\rho'(g)$.

(v) Wähle als Basis von V eine Orthonormalbasis bzgl. eines G-invarianten Skalarprodukts; dann ist

$$\rho_{ij}(g^{-1})=\overline{\rho_{ji}(g)} \Rightarrow \operatorname{tr}\rho(g^{-1})=\sum_{i=1}^{\dim V}\overline{\rho_{ii}(g)}=\overline{\operatorname{tr}\rho(g)}. \qquad \square$$

Bemerkung
- Im Beispiel D_3 sind die Konjugationsklassen gegeben durch $\{1\}$,
  $\{R,\ R^2=SRS^{-1}\}$
  $\{S,\ SR=RSR^{-1},\ SR^2=R^2SR^{-2}\}$.
- Die Konjugationsklassen einer Gruppe G sind die Äquivalenzklassen von G bzgl. der Äquivalenzrelation $g\sim g' \Leftrightarrow \exists h\in G: g'=hgh^{-1}$.
- Eine Funktion $f: G\to\mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(hgh^{-1})=f(g)$ $\forall g,h\in G$ heisst Klassenfunktion. (Beispiel: χ_ρ!)

Beispiel Für die reguläre Darstellung $\rho_{reg}: G\to GL(\mathbb{C}[G])$ gilt

$$\chi_{reg}(g)\ \left(=\chi_{\rho_{reg}}(g)\right)=\begin{cases}|G|, & g=1\\ 0, & g\neq 1.\end{cases}$$

Denn: bzgl der Basis $\{\delta_g : g\in G\}$ von $\mathbb{C}[G]$ sind die Diagonalelemente von $\rho_{reg}(g)$ gegeben durch $\delta_{gh}(h)=\begin{cases}1, & g=1\\ 0, & g\neq 1\end{cases}$

Um sich Rechenarbeit zu sparen, ist es daher von Vorteil, zunächst die Konjugationsklassen einer Gruppe zu bestimmen.

Beispiel $S_n, n \geq 1$. Hilfsmittel: Zykelschreibweise. (Übung. Hier: der relevante Hintergrund.)

(i) Seien $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$ r verschiedene Zahlen. Dann ist der Zykel $(k_1 \; k_2 \; \dots \; k_r) \in S_n$ die Permutation π mit

$$\pi(k_i) = k_{i+1}, \quad \pi(k_r) = k_1, \quad \text{und} \quad \pi(j) = j \quad \text{für } j \neq k_1, \dots, k_r.$$

- Zwischenbeispiel. $n = 5$, Zykel: $(1 \; 2 \; 4)$

$$= \text{Permutation} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii) Falls $\{k_1, \dots, k_r\} \cap \{l_1, \dots, l_s\} = \emptyset$, so ist

$$(k_1 \cdots k_r)(l_1 \cdots l_s) \quad \text{(Verknüpfung von zwei Permutationen)}$$
$$= (l_1 \cdots l_s)(k_1 \cdots k_r)$$

(iii) Lemma Jede Permutation $\pi \in S_n$ kann als Produkt von Zykeln geschrieben werden, deren unterliegenden Mengen paarweise disjunkt sind. Bis auf die Reihenfolge (siehe (ii)) ist diese Schreibweise von π eindeutig.

Beispiel $n = 7$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

$1 \mapsto 3 \mapsto 1$

$2 \mapsto 5 \mapsto 4 \mapsto 7 \mapsto 2$

$6 \mapsto 6$

$\Rightarrow \pi = (1\;3)(2\;5\;4\;7)(6)$

$(= (6)(1\;3)(2\;5\;4\;7)$, oder noch weitere Reihenfolgen).

(iv) Lemma Zwei Permutationen π_1, π_2 sind konjugiert (d.h. $\exists g \in S_n$ sodass $\pi_1 = g \pi_2 g^{-1}$) $\Longleftrightarrow$ die Mengen der

Längen der Zykel übereinstimmen.

Beweisidee Beobachtung: $g\,(k_1 \dots k_r)\,g^{-1} = (g(k_1) \,\cdots\, g(k_r))$.

Dies zeigt $(\Leftarrow)$.

Für $(\Rightarrow)$ ein Beispiel: $n=5$, $\pi_1 = (1\ 2\ 4)(3\ 5)$
$\pi_2 = (3\ 2\ 5)(4\ 1)$.

Dann ist $\pi_1 = g\pi_2 g^{-1}$ für $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. $\square$

(v) Bemerkung Die Zykelschreibweise ist nicht vollkommen eindeutig: so ist $(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2)$.

Zurück zur Theorie der Charaktere.

Auf $\mathbb{C}[G]$ definieren wir das Skalarprodukt

$$(f_1, f_2) := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} f_1(g)\,\overline{f_2(g)}.$$

Bemerkung Die reguläre Darstellung ist unitär bzgl. dieses Skalarproduktes. (Übung.)

Satz (Orthogonalitätsrelationen der Charaktere.) $(\rho, V), (\rho', V')$ irreduzibel.

(i) Gilt $(\rho, V) \cong (\rho', V')$, so ist $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 1$.

(ii) Ist $(\rho, V) \not\cong (\rho', V')$, so gilt $(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = 0$.

Beweis Benutzen den grossen Orthogonalitätssatz.

(i) Haben $\chi_{\rho'} = \chi_\rho$, also $(\chi_\rho, \chi_\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \sum_i \rho_{ii}(g)\, \overline{\sum_j \rho_{jj}(g)} =$

$$= \frac{1}{\dim V} \sum_{i,j=1}^{\dim V} \delta_{ij}\delta_{ij} = 1.$$

(ii) $$(\chi_\rho, \chi_{\rho'}) = \sum_{i,j} \underbrace{\left(\frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \rho_{ii}(g)\, \overline{\rho'_{jj}(g)} \right)}_{=0\ \forall i,j} = 0 \qquad \square$$

Korollar Eine Darstellung (ρ, V) ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $(\chi_\rho, \chi_\rho) = 1$.

Beweis Falls $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ mit $n \geq 2$, wobei ρ_i irreduzibel ist, so ist

$$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \sum_{i,j=1}^{n} (\chi_{\rho_i}, \chi_{\rho_j})$$

$$= (\chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_1}) + (\chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_2}) + \sum (\text{Terme, die } = 0 \text{ oder } 1 \text{ sind})$$

$$\geq 1 + 1 = 2. \qquad \square$$

Beispiel · $\rho: D_3 \to GL(2,\mathbb{R})$ wie oben hat $(\chi_\rho, \chi_\rho) = \frac{1}{6}(1^2 + 1^2 + 2^2) = 1$

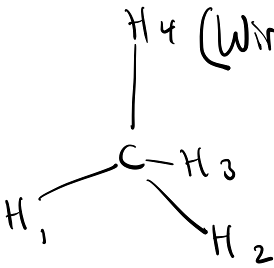
$\Rightarrow$ irreduzibel!

· $\rho: D_3 \to GL(2,\mathbb{R})$ = triviale Darstellung auf $\mathbb{R}^2$ hat

$\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(1_{2\times 2}) = 2 \quad \forall\, g \in G$, also

$(\chi_\rho, \chi_\rho) = \frac{1}{6}(2^2 \cdot 6) = 4 \Rightarrow$ reduzibel.

Beispiel Die Tetraedergruppe = Symmetriegruppe des CH_4-Moleküls $\cong S_4$. (Wird in einer Übung (partiell) behandelt.) Betrachten die Darstellung $\rho: S_4 \to GL(3,\mathbb{C})$, $\rho(\pi)$ = orthogonale Transformation, die Ecke i auf Ecke $\pi(i)$ abbildet, aufgefasst als komplexe Darstellung.



Ist ρ irreduzibel? Um dies mittels Charaktertheorie zu beantworten, berechnen wir:

$(3\ 4)\ (1\ 2\ 4) = (1\ 2\ 3\ 4)$

Drehung um die C-H_3-Achse, gefolgt von Spiegelung $(3\ 4)$. In Basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, $\rho((1234)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ortsvektor von H_1, H_2, H_3

s. Übung

$\pi \in S_4$	$1 = (1)(2)(3)(4)$	$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)$	$(1\ 2\ 3)$ und sieben weitere Drehungen	$(1\ 2)(3\ 4)$ u. 2 weitere solche	$(1\ 2\ 3\ 4)$ u. 5 weitere solche
$\chi_\rho(\pi)$	3	1	0	-1	-1

$\mathrm{tr}(1_{\mathbb{C}^3}) = \dim(\mathbb{C}^3)$

120° Rotation in einer Ebene

$\Rightarrow \rho((123)) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

$\rho((12))$ = Spiegelung entlang der Ebene durch H_3, H_4, C; in geeigneter Basis: $\rho((12)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\rho((12)(34))$ = $180°$-Drehung um die Achse, die die Mittelpunkte von H_1–H_2 und H_3–H_4 verbindet

$\Rightarrow$ in geeigneter Basis: $\rho((12)(34)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (\chi_\rho, \chi_\rho) = \frac{1}{|S_4|}\left(3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1)^2\right)$$
$$= 1 \Rightarrow \rho \text{ ist irreduzibel.}$$

· Alternative (clevere) Herangehensweise: in $\mathbb{C}^4$ bilden die Punkte
$$\begin{cases} H_1 = (3, -1, -1, -1), \\ H_2 = (-1, 3, -1, -1) \\ H_3 = (-1, -1, 3, -1), \\ H_4 = (-1, -1, -1, 3) \end{cases}$$
die Ecken eines regulären Tetraeders, das enthalten ist in dem 3-dim Unterraum $V = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\}$.

Die Darstellung ρ ist dann äquivalent zu der bereits mehrfach gesehenen Darstellung $\rho_{std}: S_4 \to GL(V)$, welche die Einschränkung von $\begin{cases} \tilde{\rho}: S_4 \to GL(4, \mathbb{C}), \\ \tilde{\rho}(\pi) e_i = e_{\pi(i)} \end{cases}$ auf V ist.

Satz Sei (ρ, V) eine Darstellung, und $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ die Zerlegung in irreduzible Darstellungen. Ist σ eine irreduzible Darstellung, so ist $(\chi_\rho, \chi_\sigma) = \#\{i : \rho_i \cong \sigma\}$. (D.h. "$\sigma$ kommt (χ_ρ, χ_σ)-mal in der Darstellung ρ vor.")

Beweis $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \cdots + \chi_{\rho_n}$, also $(\chi_\rho, \chi_\sigma) = (\chi_{\rho_1}, \chi_\sigma) + \cdots + (\chi_{\rho_n}, \sigma)$.

Verwende den vorigen Satz. $\square$

Korollar Sei (ρ, V) eine irreduzible Darstellung. Dann kommt (ρ, V) $(\dim V)$-mal in der regulären Darstellung vor.

Beweis Berechnen $(\chi_\rho, \chi_{reg}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \chi_{reg}(g) = \frac{1}{|G|} \chi_\rho(1) |G| =$
$= \dim V.$ $\square$

Satz Eine endliche Gruppe G hat nur endlich viele irreduzible Darstellungen bis auf Äquivalenz. Ist $(\rho_1, V_1), \dots, (\rho_k, V_k)$ eine Liste aller irreduzibler Darstellungen, und $d_\alpha := \dim V_\alpha$, so gilt
$$\sum_{\alpha=1}^{k} d_\alpha^2 = |G|.$$

Beweis $\chi_{reg} = \sum_{\alpha=1}^{k} d_\alpha \chi_{\rho_\alpha} \Rightarrow |G| = \chi_{reg}(1) = \sum_{\alpha=1}^{k} d_\alpha \chi_{\rho_\alpha}(1) = \sum_{\alpha=1}^{k} d_\alpha^2.$
Da $|G|$ endlich ist, ist auch k endlich. $\square$

Für eine abelsche Gruppe G (endlich) gibt es also $|G|$ verschiedene irreduzible Darstellungen $\rho_1, \dots, \rho_{|G|}$. Die Charaktertafel von G ist dann:

	g_1	g_2	$\cdots$	$g_{\lvert G\rvert}$
χ_{ρ_1}	$\chi_{\rho_1}(g_1)$	$\chi_{\rho_1}(g_2)$	$\cdots$	$\chi_{\rho_1}(g_{\lvert G\rvert})$
χ_{ρ_2}	$\chi_{\rho_2}(g_1)$	$\chi_{\rho_2}(g_2)$	$\cdots$	$\chi_{\rho_1}(g_{\lvert G\rvert})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\chi_{\rho_{\lvert G\rvert}}$	$\chi_{\rho_{\lvert G\rvert}}(g_1)$	$\chi_{\rho_{\lvert G\rvert}}(g_2)$	$\cdots$	$\chi_{\rho_{\lvert G\rvert}}(g_{\lvert G\rvert})$

$\leftarrow$ Gruppenelemente

$\uparrow$ Charaktere

Die kanonische Zerlegung einer Darstellung

- G: endliche Gruppe

- Sei $\rho_j : G \to GL(V_j)$, $j=1,\dots,k$, eine Liste aller irreduziblen Darstellungen von G.
- Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine endlich-dimensionale komplexe Darstellung. Da (ρ, V) vollständig reduzibel ist, haben wir

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_N, \quad \text{mit } U_i = \text{irreduzibler invarianter Unterraum.}$$

Für $j=1,\dots,k$, sei W_j = direkte Summe aller U_ℓ, $\ell = 1,\dots,N$, sodass $\rho|_{U_\ell} \cong \rho_j$.

$$\Rightarrow V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k. \quad (*)$$ (Manche W_j können $=0$ sein.)

Die Unterräume W_j sind invariant und heissen isotypische Komponenten der Darstellung (ρ, V).

Satz (i) Die Zerlegung $(*)$ von V ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung von V in irreduzible Unterräume U_i.

(ii) Die Projektion $p_i : V \to W_i$, $(w_1, \dots, w_k) \mapsto w_i$, ist gegeben durch

$$p_i(v) = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, \rho(g) v. \quad (\#)$$ (χ_i = Charakter von ρ_i).

Beweis. Müssen nur (ii) zeigen, da die Formel $(\#)$ unabhängig von der Zerlegung von V in irreduzible Unterräume ist.

- Schritt 1: p_i ist G-äquivariant. Berechnen für $h \in G$:

$$p_i \circ \rho(h) = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, \underbrace{\rho(g)\rho(h)}_{= \rho(gh)}$$

$$\overset{g \rightsquigarrow gh^{-1}}{=} \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(gh^{-1})}\, \rho(g)$$

versus

$$\rho(h) \circ p_i = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_i(g)}\, \underbrace{\rho(h)\rho(g)}_{= \rho(hg)}$$

$$\overset{g \rightsquigarrow h^{-1}g}{=} \frac{\dim V_i}{|G|} \sum \overline{\chi_i(h^{-1}g)}\, \rho(g).$$

$$\sum_{g\in G}$$

Da $\chi_i(gh^{-1}) = \chi_i(h^{-1}(gh^{-1})h) = \chi_i(h^{-1}g)$, gilt $p_i \circ \rho(h) = \rho(h) \circ p_i$.

- Schritt 2: p_i ist die gewünschte Projektion. Betrachte $p_i|_{U_j}$; da U_j ein invarianter Unterraum ist, gilt $p_i|_{U_j} : U_j \to U_j$.

  Schur $\Rightarrow$ $p_i|_{U_j} = \lambda \mathbb{1}_{U_j}$. Berechnen λ, indem wir die Spur berechnen; wenn χ der Charakter von $\rho|_{U_j}$ ist, so gilt

$$\mathrm{Tr}(p_i|_{U_j}) = \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_i(g)}\, \chi(g) = (\dim V_i)\cdot (\chi_i, \chi)$$
$$= \lambda \cdot \dim U_j .$$

$$\Rightarrow \lambda = \begin{cases} 0, & \rho|_{U_j} \not\cong \rho_i \\ 1, & \rho|_{U_j} \cong \rho_i \quad (\Rightarrow \dim U_j = \dim V_i). \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_i(v) = \begin{cases} v, & v \in W_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

Beispiel $G = \{1,-1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; irreduzible Darstellungen: ρ_1 (trivial), $\rho_2(\pm 1) = \pm 1$. Sei $d \geq 1$, $V = \{f(x) \text{ Polynom vom Grad} \leq d\}$,

$$\rho: G \to GL(V), \quad (\rho(\pm 1)f)(x) = f(\pm x).$$

- Zerlegung von V in isotypische Komponenten:

$$V = V_+ \oplus V_-, \qquad V_\pm = \{f : f(-x) = \pm f(x)\}$$

(odd / even polynomials).

$$(p_+ f)(x) = \frac{1}{2}\left(\chi_{\rho_1}(1)\rho(1) + \chi_{\rho_1}(-1)\rho(-1)\right) f(x)$$
$$= \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x)),$$
$$(p_- f)(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

- Zerlegung von V in irreduzible Unterräume $\Longleftrightarrow$ Wahl von Basen von V_+ und V_-; ein Basiselement f_i entspricht dem invarianten und irreduziblen Unterraum $\mathbb{C} f_i$.