

Ziel Alle irreduziblen (endlich-dimensionalen komplexen) Darstellungen von $SU(2)$ klassifizieren. (Theorie des quantenmechanischen Drehimpulses.)

Bemerkung Bekommen damit auch alle irreduziblen Darstellungen von $SO(3)$.

Da $SU(2)$ zusammenhängend ist, ist jede Darstellung ρ von $SU(2)$ eindeutig bestimmt durch die Darstellung ρ_* von $\underline{su}(2)$.

Bemerkung Allgemeine Theorie ("SU(2) ist einfach zshgd.") sagt uns, dass umgekehrt jede Darstellung von $\underline{su}(2)$ von einer Darstellung von $SU(2)$ kommt. Statt dieses abstrakte Resultat zu verwenden, werden wir die Darstellungen von $SU(2)$ ganz explizit angeben.

Betrachten also $\underline{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : X + X^* = 0, \text{Tr } X = 0\}$; **reelle** Lie-Algebra. Lineare Algebra ist einfacher über \mathbb{C} ; betrachten daher, etwas allgemeiner, die **Komplexifizierung** $\underline{su}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ von $\underline{su}(n)$. Konkret:

Lemma (i) Jedes $z \in \underline{sl}(n, \mathbb{C})$ kann eindeutig geschrieben werden als
$$z = X + iY, \quad X, Y \in \underline{su}(n).$$

(ii) Sei $\tau : \underline{su}(n) \rightarrow \underline{gl}(V)$ eine Darstellung auf einem komplexen Vektorraum V . Dann ist

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbb{C}} : \underline{sl}(n, \mathbb{C}) &\rightarrow \underline{gl}(V), \\ z = X + iY &\mapsto \tau(X) + i\tau(Y) \end{aligned}$$

eine (komplexe, d.h. \mathbb{C} -lineare) Darstellung von $\underline{sl}(n, \mathbb{C})$, die auf $\underline{su}(n) \subset \underline{sl}(n, \mathbb{C})$ mit τ übereinstimmt.

(iii) τ ist genau dann irreduzibel/vollständig reduzibel, wenn $\tau_{\mathbb{C}}$ irreduzibel/vollständig reduzibel ist.

Beweis $\underline{sl}(n, \mathbb{C}) = \{z \in M_n(\mathbb{C}) : \text{Tr}(z) = 0\}$.

(i) Nehmen $X = \frac{z - z^*}{2}$, $Y = \frac{z + z^*}{2i}$.

(ii) zu zeigen: für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\tau_{\mathbb{C}}((a+ib)(X+iY)) = (a+ib) \tau_{\mathbb{C}}(X+iY)$.

Da $\tau_{\mathbb{C}}$ \mathbb{R} -linear ist, genügt es zu zeigen:

$$\tau_{\mathbb{C}}(i(X+iY)) \stackrel{?}{=} i \tau_{\mathbb{C}}(X+iY)$$

$$\tau_{\mathbb{C}}(-Y+iX) = -\tau(Y) + i\tau(X) \stackrel{\checkmark}{=} i(\tau(X) + i\tau(Y)).$$

• Weiter gilt $[\tau_{\mathbb{C}}(X), \tau_{\mathbb{C}}(Y)] = \tau_{\mathbb{C}}([X, Y])$ für $X, Y \in \underline{su}(n)$,
also auch für $X, Y \in \underline{sl}(n, \mathbb{C})$, da beide Seiten der
Gleichung \mathbb{C} -bilinear in X, Y sind.

(iii) Sei $W \subset V$ ein komplexer Untervektorraum.

• Ist W $\tau_{\mathbb{C}}$ -invariant, so ist W $\tau = \tau_{\mathbb{C}}|_{\underline{su}(n)}$ -invariant.

• Ist W τ -invariant, so gilt für $X, Y \in \underline{su}(n)$, $w \in W$ auch

$$\tau_{\mathbb{C}}(X+iY)w = \tau(X)w + i\tau(Y)w \in W. \quad \square$$

Neues Ziel: alle endl.-dim. kompl. irreduziblen Darstellungen von

$$\underline{sl}(2, \mathbb{C}) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : \text{Tr}(X) = 0\}$$

klassifizieren.

Lemma Verwenden als Basis von $\underline{sl}(2, \mathbb{C})$ (als \mathbb{C} -Vektorraum)

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Lie-Algebra-Struktur von $\underline{sl}(2, \mathbb{C})$:

$$[h, e] = 2e$$

$$[h, f] = -2f$$

$$[e, f] = h.$$

(ii) 1-zu-1-Korrespondenz zwischen

Darstellungen $\tau: \underline{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \underline{gl}(V)$ (\mathbb{C} -linear)

und

lineare Abbildungen $E, F, H \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$ mit

$$\left\{ \begin{array}{l} [H, E] = 2E \\ [H, F] = -2F \\ [E, F] = H \end{array} \right.$$

Diese Korrespondenz ist gegeben durch $E := \tau(e), F := \tau(f), H := \tau(h)$,
und umgekehrt $\tau(ae + bf + ch) := aE + bF + cH$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$).

Sei nun (τ, V) eine komplexe Darstellung von $\underline{sl}(2, \mathbb{C})$, d.h. $\tau: \underline{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \underline{gl}(V)$.

Lemma Sei $0 \neq v_0 \in V$ ein Eigenvektor von $H = \tau(h)$ mit dem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit grösstem Realteil: $Hv_0 = \lambda v_0$.

(i) $Ev_0 = 0$. (v_0 heisst primitiv mit Gewicht λ .)

(ii) Für $v_k = F^k v_0$, $k = 1, 2, \dots$ gilt

$$\left\{ \begin{array}{l} Hv_k = (\lambda - 2k) v_k \\ Ev_k = k(\lambda - k + 1) v_{k-1} \end{array} \right.$$

Wir sehen: E, F sind "Leiternoperatoren", ähnlich wie beim quantenmechanischen harmonischen Oszillator.

$$\begin{array}{ccc} & v_0 & \\ F \downarrow & \uparrow E & \\ & v_1 & \\ F \downarrow & \uparrow E & \\ & v_2 & \\ & \vdots & \end{array} \quad \begin{array}{c} - \lambda \\ - \lambda - 2 \\ - \lambda - 4 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Eigenwerte} \\ \text{von } H \end{array}$$

Beweis (i) $H(Ev_0) = E(Hv_0) + [H, E]v_0 = E \cdot \lambda v_0 + 2Ev_0 = (\lambda + 2)Ev_0$
• Wäre $Ev_0 \neq 0$, so wäre also Ev_0 ein Eigenvektor von H

mit Eigenwert $\lambda+2$. Aber $\operatorname{Re}(\lambda+2) > \operatorname{Re}(\lambda) \Rightarrow$ Widerspruch zur Wahl von λ !

Also: $E v_0 = 0$.

(ii) Für $k=0$ stimmt dies.

Berechnen: $H v_{k+1} = H F v_k = F H v_k + [H, F] v_k$
 $= F (\lambda - 2k) v_k - 2 F v_k$
 $= (\lambda - 2(k+1)) F v_k$
 $= (\lambda - 2(k+1)) v_{k+1}$

und

$$\begin{aligned} E v_{k+1} &= E F v_k = F E v_k + [E, F] v_k \\ &= F k(\lambda - k + 1) v_{k-1} + H v_k \\ &= k(\lambda - k + 1) v_k + (\lambda - 2k) v_k \\ &= (k+1)(\lambda - k) v_k. \end{aligned}$$

□

Folgerungen: (1) $\operatorname{span} \{v_0, v_1, \dots\} \subset V$ ist ein invariantes Unterraum $\neq \{0\}$, also $= V$.

(2) Ist $v_j \neq 0$, so sind v_0, \dots, v_j linear unabhängig, da sie Eigenvektoren von H zu verschiedenen Eigenwerten sind.

(3) $\dim V < \infty$ und (1)+(2) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}_0$ sodass $v_n \neq 0$ und $v_{n+1} = 0$ ($\Rightarrow v_j = 0 \forall j \geq n+1$).

Aber dann ist $0 = E v_{n+1} = (n+1)(\lambda - n) v_n$
 $\Rightarrow \lambda = n$.

Wir haben also den Grossteil des folgenden Satzes gezeigt:

Satz (i) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, und schreibe v_0, \dots, v_n für die Standardbasis von \mathbb{C}^{n+1} . Dann definiert

$$\otimes \begin{cases} H v_k = (n-2k) v_k \\ E v_k = k(n-k+1) v_{k-1} & (\text{für } k=0: E v_0 = 0) \\ F v_k = v_{k+1} & (\text{für } k=n: F v_n = 0) \end{cases}$$

eine irreduzible Darstellung $\tau_n: \underline{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \underline{gl}(\mathbb{C}^{n+1})$.

(ii) Jede komplexe $(n+1)$ -dimensionale irreduzible Darstellung von $\underline{sl}(2, \mathbb{C})$ ist isomorph zu τ_n .

Beweis (i) • Rechnung (Übung): $E, F, H \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^{n+1})$ definiert durch \otimes , erfüllen die Kommutationsrelationen (\oplus oben).

• Irreduzibilität: Sei $0 \neq W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ invariant. Dann hat $H|_W: W \rightarrow W$ einen Eigenvektor, notwendigerweise v_m für ein $m=0, \dots, n$. Aber dann gilt auch $E^j v_m, F^j v_m \in W \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$; daher $v_0, \dots, v_n \in W$, also $W = \mathbb{C}^{n+1}$.

(ii) folgt aus den obigen Betrachtungen. \square

Nächster Schritt: τ_n ($n \in \mathbb{N}_0$) kommt von einer Darstellung der Lie-Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ (und auch von $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$).

Lemma Sei $U_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j z_1^j z_2^{n-j} : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \right\}$ der Raum der homogenen Polynome in $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2)\}$ vom Grad n . Definieren $\rho_n: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(U_n)$, $(\rho_n(A)p)(z) = p(A^{-1}z)$.

Dann ist $(\beta_n)_* = \tau_n : \underline{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \underline{gl}(\mathbb{C}^{n+1})$, wobei wir den Isomorphismus $\mathbb{C}^{n+1} \cong U_n$, $v_k \mapsto p_k := \frac{(-1)^k}{(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}$, verwenden.

Beweis Rechnung! Sei $p \in U_n$, $z \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned} \cdot ((\beta_n)_*(h)p)(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p(\exp(t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})^{-1} z) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p\left(\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p(e^{-t} z_1, e^t z_2) \\ &= (-z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}) p(z). \end{aligned}$$

Für $p = p_k$: $(\beta_n)_*(h)p_k = (n-2k)p_k$.

$$\begin{aligned} \cdot ((\beta_n)_*(e)p)(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p(\exp(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})^{-1} z) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p\left(\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p(z_1 - tz_2, z_2) \\ &= -z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} p(z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } p = p_k: (\beta_n)_*(e)p_k &= \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \cdot (-1) \cdot k \cdot z_1^{k-1} z_2^{n-k+1} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(n-(k-1))!} z_1^{k-1} z_2^{n-(k-1)} \cdot k(n-k+1) \\ &= k(n-k+1) p_{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot ((\beta_n)_*(f)p)(z) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p(\exp(t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})^{-1} z) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} z\right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} p(z_1, -tz_1 + z_2) \end{aligned}$$

Für $P = P_k$: $(g_n)_*(f) P_k = \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \cdot (-1)^{(n-k)} z_1^{k+1} z_2^{n-k-1}$
 $= P_{k+1}$.

$\rho_n|_{\text{SU}(2)}: \text{SU}(2) \rightarrow \text{GL}(U_n)$ irreduzibel.

$$SU(2) \rightarrow SO(3) \rightarrow GL(3, \mathbb{C})$$

doppelte Überlagerung

definierte Darstellung
(Matrix-Vektor-Produkt)

Lemma Sei $\varphi: G \rightarrow H$ ein stetig differenzierbarer Homomorphismus von Matrix-Lie-Gruppen. Dann ist $\varphi_*: \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus, wobei

$$\varphi_*(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\exp(tX)), \quad X \in \text{Lie}(G).$$

Beweis Genau wie im Fall, dass $\varphi: G \rightarrow GL(V)$ eine Darstellung ist — damals haben wir von $GL(V) =: H$ nichts anderes verwendet als dass es eine Matrix-Lie-Gruppe ist! \square

Beispiel. $\varphi: SU(2) \rightarrow SO(3)$ doppelte Überlagerung,

$$\widehat{\varphi(A)X} = A \hat{X} A^* \quad \text{für } X \in \mathbb{R}^3,$$

$$\hat{X} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

φ induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_*: \underline{su}(2) &= \{X \in M_2(\mathbb{C}) : X + X^* = 0, \text{Tr}(X) = 0\} = \text{span}_{\mathbb{R}} \{i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3\} \\ &\rightarrow \underline{so}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A + A^T = 0\}. \end{aligned}$$

Übung: (i) Sei $X = \sum_{j=1}^3 n_j i\sigma_j$, $|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right| = 1$, dann ist

$$\exp(tX) = \cos(t) 1_{2 \times 2} + \sin(t) X$$

$$(ii) \varphi(\cos(t) 1 + \sin(t) X) = R(\vec{n}, -2t).$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } \varphi_*(i\sigma_1) &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(\exp(t i\sigma_1)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \varphi(\cos(t) 1 + \sin(t) i\sigma_1) \right|_{t=0} \end{aligned}$$

$$= \left. \frac{d}{dt} R(\vec{e}_1, -2t) \right|_{t=0}$$

$$\Rightarrow \varphi_*(-\frac{1}{2} i\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{infinitesimale } x\text{-Drehung})$$

Ähnlich: $\varphi_*(-\frac{1}{2}i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} y \\ z \end{matrix} \right)$

$\varphi_*(-\frac{1}{2}i\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} x \\ z \end{matrix} \right).$

Lemma $\varphi_*: \underline{su}(2) \rightarrow \underline{so}(3)$ ist ein Isomorphismus von Lie-Algebren.

Korollar Jede irreduzible Darstellung (ρ, V) von $SO(3)$ ist äquivalent zu $(\tilde{\rho}_n, U_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gerade, wobei

$$\tilde{\rho}_n(R) = \rho_n(A) \quad \text{für } R \in SO(3) \text{ und } A \in SU(2), \varphi(A) = R$$

Beweis. $(\rho \circ \varphi, V)$ ist eine irreduzible Darstellung von $SU(2)$,

also $(\rho \circ \varphi, V) \cong (\rho_n, U_n)$ für ein n . Aber

$$\underbrace{(\rho \circ \varphi)}_{\substack{\uparrow \\ \underline{su}(2)}}(-I) = \underbrace{\rho}_{\substack{\uparrow \\ \underline{so}(3)}}(I) = 1_V,$$

und $\rho_n(-I) = (-1)^n \cdot 1_{U_n}$.

Daher muss $(-1)^n = 1$, also n gerade sein.

Umgekehrt: $\tilde{\rho}_n$, für n gerade, ist irreduzibel, da $(\tilde{\rho}_n)_*: \underline{so}(3) \rightarrow \underline{gl}(V)$

irreduzibel ist. (Wir verwenden hier: $\varphi_*: \underline{su}(2) \rightarrow \underline{so}(3)$ ist ein

Isomorphismus, und $(\tilde{\rho}_n)_* = (\rho_n)_* \circ (\varphi_*)^{-1}$, mit $(\rho_n)_*: \underline{su}(2) \rightarrow \underline{gl}(V)$ irreduzibel.) \square

Zusammenfassend:

• $SU(2)$ hat eine irreduzible Darstellung für jede Dimension $n+1 = 1, 2, 3, \dots$ — Spin $\frac{n}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$ (halbzahliger Spin)

• $SO(3)$ hat eine irreduzible Darstellung für jede ungerade Dimension $n+1 = 1, 3, 5, 7, \dots$ — Spin $0, 1, 2$ (ganzzahliger Spin)

Notation in der Physik • $J_z = \frac{\hbar}{2} H$, $J_+ = \hbar E$, $J_- = \hbar F$ für Darstellung \mathfrak{so}_n .

- $j = \frac{n}{2}$, $m = \frac{n}{2} - k = -j, -j+1, \dots, j-1, j$,
 $|j, m\rangle = v_k = v_{j-m}$.

- Dann ist also $J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle$

$$J_+ |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |j, m+1\rangle$$

$$J_- |j, m\rangle = \hbar \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |j, m-1\rangle.$$

$J_z =$ Drehimpulsoperator (bzgl. z-Achse)

$$J_x = \frac{1}{2} (J_+ + J_-)$$

x-Achse

$$J_y = \frac{1}{2i} (J_+ - J_-)$$

y-Achse

$\begin{cases} J_+ \\ J_- \end{cases}$ "Leitoperatoren"

Gesamtdrehimpuls²: $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \hbar^2 j(j+1)$ (Vielfaches des Identitätsoperators)
 (Übung.)

Also sind die $|j, m\rangle$ Eigenvektoren (Eigenzustände) von J^2 und J_z .

⊗ - Begründung für die Definition von J_x, J_y, J_z ?

Haben $J_z = \hbar \tau_n \left(\frac{1}{2} h \right)$, $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$.

$\Leftrightarrow \varphi_* \left(\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{2} h \right) = \text{infinitesimale z-Rotation} \in \mathfrak{so}(3)$

Setzen also $J_x = \hbar \tau_n \left(\frac{1}{2} \sigma_1 \right) = \hbar \tau_n \left(\frac{1}{2} (e+f) \right) = \frac{\hbar}{2} (E+F)$

$$J_y = \hbar \tau_n \left(\frac{1}{2} \sigma_2 \right) = \hbar \tau_n \left(\frac{1}{2} (-ie+if) \right) = \frac{\hbar}{2i} (E-F),$$

Schlussendlich $SU(2)$ ist kompakt. Können also ρ_n unitär machen,

Reskalieren: $u_k = \lambda_k v_k$, mit $\lambda_k = \sqrt{\frac{(n-k)!}{k!}}$.

Berechnen:
$$\begin{cases} H u_k = (n-2k) u_k \\ E u_k = \sqrt{k(n-k+1)} u_{k-1} \\ F u_{k-1} = \sqrt{k(n-k+1)} u_k. \end{cases}$$

Bezüglich des Skalarproduktes auf \mathbb{C}^{n+1} , in dem u_0, \dots, u_n orthonormiert sind, gilt dann $H^* = H$, $E^* = F$.

Also
$$\left. \begin{aligned} (\rho_n)_*(h)^* &= (\rho_n)_*(h) \\ (\rho_n)_*(e)^* &= (\rho_n)_*(f) = (\rho_n)_*(e^*) \\ (\rho_n)_*(f)^* &= (\rho_n)_*(e) = (\rho_n)_*(f^*) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\rho_n)_*(X)^* = (\rho_n)_*(X^*) \quad \forall X \in \underline{sl}(2, \mathbb{C})$$

Für $X \in \underline{su}(2)$ (also $\text{Tr}(X) = 0$ und $X^* = -X$) gilt daher

$$(\rho_n)_*(X)^* + (\rho_n)_*(X) = 0 \Rightarrow \exp((\rho_n)_*(X)) = \rho_n(\exp(X)) \in U(n)$$

$\Rightarrow \rho_n|_{\underline{su}(2)}$ ist unitär.

Satz (i) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gibt es genau eine (bis auf Äquivalenz) irreduzible Darstellung (ρ_n, U_n) mit $\dim U_n = n+1$.

Explizit: $U_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j z_1^j z_2^{n-j} : a_j \in \mathbb{C} \right\}$,

$$(\rho_n(A)p)(z) = p(A^{-1}z).$$

Zudem ist ρ_n unitär bzgl. des Skalarproduktes auf U_n , in welchem eine Orthonormalbasis gegeben ist durch $\frac{z_1^k z_2^{n-k}}{\sqrt{k!(n-k)!}} =: v_k$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ gerade gibt es genau eine irreduzible Darstellung $(\tilde{\rho}_n, U_n)$ von $SO(3)$ mit $\dim U_n = n+1$ (ungerade),
 $(\tilde{\rho}_n(R)p)(z) = p(A^{-1}z)$, wobei $R \in SO(3)$, $\varphi(A) = R$.
 doppelte Überlagerung.

Tensorprodukte von $SU(2)$ -Darstellungen; Clebsch-Gordan-Zerlegung

Physikalische Motivation: quantenmechanische Systeme, die aus mehreren Komponenten mit Drehimpuls/Spin zusammengesetzt sind.

Einfaches Beispiel: 2 Teilchen mit Spin. Ein einzelnes Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$

wird beschrieben durch die Spin- $\frac{1}{2}$ -Darstellung $\rho_1: SU(2) \rightarrow GL(V_1)$, $V_1 = \mathbb{C}^2$,
 d.h. der Zustand ist $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ ($|\psi_{\pm}|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit}$,
 dass der Spin des Teilchens in der z-Richtung $= \pm \frac{\hbar}{2}$ ist.)

Erklärung für Interessierte: $J_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ψ hat Spin $\pm \frac{\hbar}{2}$, falls
 ψ im Eigenraum von J_z zum Eigenwert $\pm \frac{\hbar}{2}$ liegt.

Orthogonale Projektion $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ auf den $\pm \frac{\hbar}{2}$ -Eigenraum:

$$\Pi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wahrscheinlichkeit, dass $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ bei Messung z-Spin $\pm \frac{\hbar}{2}$ hat:

$$\langle \psi, \Pi_{\pm} \psi \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \Pi_{\pm} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \rangle = |\psi_{\pm}|^2.$$

Basis von V_1 : $|+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, $|-\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$.

• Spin 1-Teilchen: Zustand $\in V_2$; Basis: $|j, k\rangle = |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$

- Ein System aus Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Spin 1 wird beschrieben durch die Darstellung

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : SU(2) \rightarrow GL(V_1 \otimes V_2).$$

Beispiel eines Zustands: $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \otimes |1, -1\rangle$

(Teilchen 1: Spin $\frac{1}{2}$, z-Spin $+\frac{\hbar}{2}$
 2: Spin 1, z-Spin $-\hbar$.)

Basis von $V_1 \otimes V_2$: solche elementaren Tensorprodukte (2×3 an der Zahl).

Allgemein: (i) Die $|j, k\rangle$ ($k = -j, \dots, j$) sind gemeinsame Eigenvektoren

von J^2 (Eigenwert $\hbar^2 j(j+1)$)

J_z (Eigenwert $\hbar k$),

also sind $|j_1, k_1\rangle \otimes |j_2, k_2\rangle$ gemeinsame Eigenvektoren von

$$J_1^2 = J^2 \otimes 1 \quad (\hbar^2 j_1(j_1+1)), \quad J_2^2 = 1 \otimes J^2 \quad (\hbar^2 j_2(j_2+1))$$

$$J_{1,z} = J_z \otimes 1 \quad (\hbar k_1), \quad J_{2,z} = 1 \otimes J_z \quad (\hbar k_2)$$

(ii) Gesamtdrehimpuls² des Systems: $J^2 = J_1^2 + J_2^2$

Drehimpuls um z-Achse: $J_z = J_{1,z} + J_{2,z}$.

Fragen: Eigenwerte von J^2, J_z ?

gemeinsame Eigenbasis von J^2, J_z, J_1^2, J_2^2 ?

Mathematische Betrachtung.

Beobachtung Seien (ρ, V) und (ρ', V') zwei Darstellungen einer Matrix-Lie-Gruppe G , und sei $\rho \otimes \rho' : G \rightarrow GL(V \otimes V')$,

$$(g \otimes g')(g) = g(g) \otimes g'(g),$$

die Tensorprodukt-Darstellung. Dann gilt für $X \in \mathfrak{Lie}(G)$:

$$\begin{aligned} (g \otimes g')_*(X) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\exp(tX)) \otimes g'(\exp(tX)) \\ &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\exp(tX)) \right) \otimes g'(\exp(0)) \\ &\quad + g(\exp(0)) \otimes \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g'(\exp(tX)) \right) \\ &= g_*(X) \otimes 1_V + 1_V \otimes g'_*(X). \end{aligned}$$

Aufgabe: Tensorprodukte von $SU(2)$ -Darstellungen in irreduzible Darstellungen zerlegen. (Da $SU(2)$ kompakt ist, ist jede endlich-dimensionale Darstellung vollständig reduzibel.)

Betrachten: $n', n'' \in \mathbb{N}_0$, $\rho = \rho_{n'} \otimes \rho_{n''}$ (=System zusammengesetzt aus Spin $\frac{n'}{2}$ und Spin $\frac{n''}{2}$ -Teilchen), $\tau = \rho_* = (\rho_{n'})_* \otimes 1 + 1 \otimes (\rho_{n''})_*$.

Darstellungsraum $V_{n'}$ von $\rho_{n'}$ hat Basis $v'_0, \dots, v'_{n'}$,

und $\tau_{n'} = (\rho_{n'})_*$ erfüllt $H'v'_k = (n' - 2k)v'_k$

$$E'v'_k = k(n' - k + 1)v'_{k-1}$$

$$F'v'_k = v'_{k+1};$$

ähnlich für $\rho_{n''}$ und $v''_0, \dots, v''_{n''}$

(Schreiben $E' = \tau_{n'}(e)$, $E'' = \tau_{n''}(e)$, $E = \tau(e) = \rho_*(e)$; ähnlich für F, H .)

Müssen finden: primitive Vektoren und deren Gewichte.

Schritt 1. Eigenvektoren von $H' = \tau(h)$ ($\cong J_z = J_{1,z} \otimes I + I \otimes J_{2,z}$ in Notation der Motivation, ohne $\frac{\hbar}{2}$):

$$\begin{aligned}
 H(v'_j \otimes v''_k) &= (H' \otimes 1 + 1 \otimes H'')(v'_j \otimes v''_k) \\
 &= H'v'_j \otimes v''_k + v'_j \otimes H''v''_k \\
 &= (n' - 2j + n'' - 2k) v'_j \otimes v''_k
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Eigenwerte von H sind $n' + n'' - 2l$, $l = 0, 1, \dots, n' + n''$,
 und Eigenraum zu $n' + n'' - 2l$ ist aufgespannt durch
 $v'_j \otimes v''_k$ mit $j + k = l$.

Schritt 2: im Eigenraum zum Eigenwert $n' + n'' - 2l$ (mit $0 \leq l \leq n' + n''$)
 den Kern von E finden. Ansatz: $w_l = \sum_{j=0}^l a_j v'_j \otimes v''_{l-j}$, zunächst für $l \leq \min(n', n'')$.

Rechnen:

$$\begin{aligned}
 Ew_l &= \sum_{j=0}^l a_j (E'v'_j \otimes v''_{l-j} + v'_j \otimes E''v''_{l-j}) \\
 &= \sum_{j=1}^l a_j j(n' - j + 1) v'_{j-1} \otimes v''_{l-j} + \sum_{j=0}^{l-1} a_j (l-j)(n'' - l + j + 1) v'_j \otimes v''_{l-j-1} \\
 &= \sum_{j=0}^{l-1} [a_{j+1} (j+1)(n' - j) + a_j (l-j)(n'' - l + j + 1)] v'_j \otimes v''_{l-j-1}
 \end{aligned}$$

Dies soll $= 0$ sein \Rightarrow Rekursionsformel

$$a_{j+1} = - \frac{(l-j)(n'' - l + j + 1)}{(j+1)(n' - j)} a_j, \quad j = 0, \dots, l-1.$$

Explizite Lösung: $a_j = (-1)^j \frac{(n' - j)! (n'' - l + j)!}{j! (l - j)!}$.

\Rightarrow Für $l = 0, 1, \dots, \min(n', n'')$ haben wir einen irreduziblen Unterraum
 der Dimension $n' + n'' + 1 - 2l$ gefunden: $\text{span} \{w_l, Fw_l, \dots, F^{n' + n'' - 2l} w_l\}$.

• Summe der Dimensionen dieser Unterräume:

$$\sum_{l=0}^{\min(n', n'')} (n' + n'' + 1 - 2l) = (n' + 1)(n'' + 1) = \dim(\mathbb{C}^{n'+1} \otimes \mathbb{C}^{n''+1}).$$

Also haben wir sogar schon die Tensorprodukt-Darstellung vollständig zerlegt! Zurück zur Lie-Gruppen-Darstellung erhalten wir:

Satz (Clebsch-Gordan-Zerlegung): Zerlegung des Tensorproduktes $\rho_{n'} \otimes \rho_{n''}$ der irreduziblen Darstellungen $(\rho_{n'}, V_{n'}), (\rho_{n''}, V_{n''})$ von $SU(2)$:

$$(i) \quad \rho_{n'} \otimes \rho_{n''} \underset{\substack{\text{Isomorphismus von} \\ \text{Darstellungen}}}{\cong} \rho_{n'+n''} \oplus \rho_{n'+n''-2} \oplus \dots \oplus \rho_{|n'-n''|}.$$

$n'+n''-2 \min(n', n'')$

(ii) Die irreduzible Unterdarstellung der Dimension $n'+n''-2l+1$ ist aufgespannt durch $w_l, Fw_l, \dots, F^{n'+n''-2l}w_l$, wobei

$$w_l = \sum_{j=0}^l (-1)^j \frac{(n'-j)! (n''-l+j)!}{j! (l-j)!} v'_j \otimes v''_{l-j}. \quad \textcircled{\#}$$

Zusammenhang mit physikalischer Motivation:

$F^q w_l$ (mit $l=0, 1, \dots, \min(n', n'')$, $q=0, 1, \dots, n'+n''-2l=:2j$) ist ein simultaner Eigenvektor von:

$$J_z = \frac{\hbar}{2} H \quad (\text{mit Eigenwert } \hbar k, \quad k=j-q \in \{-j, \dots, j\})$$

$$J^2 \quad (\text{mit Eigenwert } \hbar^2 j(j+1))$$

$$\left(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2, \quad \begin{aligned} J_x &= \frac{\hbar}{2} (E+F) \\ J_y &= \frac{\hbar}{2i} (E-F) \end{aligned} \right. \text{, wie zuvor})$$

$$J_1^2 \quad (\text{mit Eigenwert } \hbar^2 j'(j'+1), \quad j' = \frac{n'}{2})$$

$$J_2^2 \quad (\text{mit Eigenwert } \hbar^2 j''(j''+1), \quad j'' = \frac{n''}{2})$$

$$\text{Schreiben } c_{j\ell} F^q w_l = |J^2 = \hbar^2 j(j+1), J_z = \hbar k, J_1^2 = \hbar^2 j'(j'+1), J_2^2 = \hbar^2 j''(j''+1)\rangle.$$

$$\underbrace{(\text{Normierungskonstante, so dass } |c_{j\ell} F^q w_l| = 1)}_{=1} = |j, k, j_1, j_2\rangle$$

• Haben zwei Basen von $V_{n'} \otimes V_{n''}$:

$$\otimes |j, k, \underset{\frac{n'}{2}}{j'}, \underset{\frac{n''}{2}}{j''}\rangle \quad (j = \frac{1}{2}|n'-n''|, \dots, \frac{1}{2}(n'+n'') \text{ [in } \frac{1}{2}\text{-Schritten]}, \\ k = -j, \dots, j)$$

$$\text{und } \otimes |\bar{j}', k'; \underset{\frac{n'}{2}}{j''}, \underset{\frac{n''}{2}}{k''}\rangle := |j', k'\rangle \otimes |j'', k''\rangle \quad (= v_{k'}' \otimes v_{k''}'') \\ (k' = -j', \dots, j', \quad k'' = -j'', \dots, j'') \quad (\text{bis auf die Normierungskonstante})$$

• Im Satz haben wir \otimes für $k=j$ durch \otimes ausgedrückt. Allgemeiner sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten die Koeffizienten in der Transformation (Basiswechsel)

$$|j, k, \bar{j}', j''\rangle = \sum |j', k'; j'', k''\rangle \langle j', k'; j'', k'' | j, k, \bar{j}', j'' \rangle \in \mathbb{C}.$$

• Formeln für E, E', E'' etc. geben Rekursionsformeln für diese Koeffizienten, ausgehend von $k=j$.

Beispiel zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen: $n' = n'' = 1$. $V_1 = \text{span}_{\mathbb{C}} \{v_0, v_1\}$

$$S_1 \otimes S_1 \cong S_0 \oplus S_2$$

Spin-Singlett, Basis $\overset{\text{Normierung}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}(v_0 \otimes v_1 - v_1 \otimes v_0)$ ($l=1$ in der Formel \oplus)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) = |J^2=0, J_z=0, J_1^2=\hbar^2 \cdot \frac{3}{4},$$

$$\text{Spin-Triplett, Basis } v_0 \otimes v_0 = |++\rangle = |J^2=\hbar^2 \cdot 2, J_z=\hbar, J_1^2=\hbar^2 \cdot \frac{3}{4}, J_2^2=\hbar^2 \cdot \frac{3}{4}\rangle$$

($l=0$ in der Formel \oplus),

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mp (v_0 \otimes v_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 \otimes v_0 + v_0 \otimes v_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+-\rangle + |-+\rangle) = |2\hbar^2, 0, \frac{3}{4}\hbar^2, \frac{3}{4}\hbar^2\rangle$$

$$\frac{1}{2} \mp^2 (v_0 \otimes v_0) = v_1 \otimes v_1 = |--\rangle = |2\hbar^2, -\hbar, \frac{3}{4}\hbar^2, \frac{3}{4}\hbar^2\rangle.$$

Genug zu $SU(2)$ (fast...)! Wir betrachten zu guter Letzt noch eine wichtige Realisierung der irreduziblen Darstellungen von $SO(3)$.

→ Kugelfunktionen

Betrachten Funktionen auf $S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}|=1\}$.

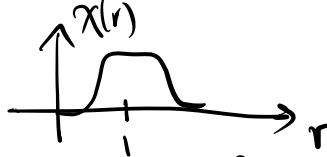
Integralbegriff: $\int_{S^2} f(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ unter Verwendung von Polarkoordinaten, also $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$

Für $f: S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ und $R \in SO(3)$ können wir definieren

$$\rho(R)f: S^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\rho(R)f)(\vec{x}) = f(R^{-1}\vec{x}).$$

Fakt. $\int_{S^2} (\rho(R)f)(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = \int_{S^2} f(\vec{x}) d\Omega(\vec{x})$
(Rotationsinvarianz von $d\Omega$.)

(Kann bewiesen werden, indem man $\chi = \chi(|\vec{x}|)$ nimmt mit



$$\int \chi(r) r^2 dr = 1,$$

und dann $\int_{S^2} f(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f\left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right) \chi(|\vec{x}|) d\vec{x};$

hier jetzt \vec{x} durch $R^{-1}\vec{x}$ ersetzen, und bemerken, dass $d\vec{x}$ Rotationsinvariant ist.)

Skalarprodukt $(f, g) = \int_{S^2} \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x}) d\Omega(\vec{x}).$

Schreiben $H_\ell = \left\{ \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^3 \\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \ell}} c_\alpha x^\alpha : c_\alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}.$

homogene Polynome in \mathbb{R}^3 vom Grad $\ell \in \mathbb{N}_0$.

Setzen $V_\ell = \{ p \in H_\ell : \Delta p = 0 \}, \quad \Delta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ (Laplace-Operator).
Harmonische Polynome.

Beispiele $\underbrace{1}_{l=0}, \underbrace{x_1, x_2, x_3}_{l=1}, \underbrace{x_1 x_2, x_2^2 - x_3^2}_{l=2}, (x_1 + i x_2)^l, (x_1 - i x_2)^l$.

Lemma Sei $p \in V_\ell$. Dann gilt für $u = p|_{S^2}$:

$\Delta_{S^2} u = -\ell(\ell+1)u$,
wobei $\Delta_{S^2} = \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ der sphärische Laplace-Operator ist.

Beweis In Polarkoordinaten gilt $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \Delta_{S^2}$. Nun gilt für $kl=1$:

$$p(rx) = r^\ell p(x) = r^\ell u(x), \text{ also}$$

$$0 = \Delta p = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^\ell u(x)) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^\ell u(x)) + r^2 \Delta_{S^2} u(x) \\ = r^{\ell-2} (\ell(\ell-1) + 2\ell + \Delta_{S^2}) u(x). \quad \square$$

Definition Elemente von $\hat{V}_\ell := \{p|_{S^2} : p \in V_\ell\}$ heißen Kugelfunktionen vom Index ℓ . (Für $f \in \hat{V}_\ell$ ist dann $r^\ell f = \ell^\ell f(\frac{x}{|x|}) \in V_\ell$, d.h. $\Delta(r^\ell f) = 0$)

Satz (i) $\ell \neq k \Rightarrow \hat{V}_\ell$ und \hat{V}_k sind orthogonal bzgl. des obigen Skalarproduktes (\cdot, \cdot) .
(ii) $\dim \hat{V}_\ell = 2\ell + 1$.

Beweis (i) Seien $f \in \hat{V}_\ell, g \in \hat{V}_k$, so gilt $p := r^\ell f \in V_\ell, q := r^k g \in V_k$,

$$\text{also } 0 = \int_{|\vec{x}|=1} (\Delta \bar{p} \cdot q - \bar{p} \cdot \Delta q) d\vec{x} \\ \stackrel{\text{Greensche Identität}}{=} \int_{|\vec{x}|=1} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} q - \bar{p} \frac{\partial q}{\partial r} \right) d\Omega(\vec{x}) \\ = \underbrace{(\ell - k)}_{\neq 0} \underbrace{\int_{S^2} \bar{p}(\vec{x}) q(\vec{x}) d\Omega(\vec{x})}_{=0}$$

("Besserer" Beweis: $\int_{S^2} \Delta_{S^2} \bar{f} \cdot g d\Omega = \int_{S^2} \bar{f} \cdot \Delta_{S^2} g d\Omega$)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \bar{f} \cdot g \, d\Omega = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{f} \cdot g \, d\Omega.$$

Selbe Schlussfolgerung. Benutzen: $\Delta_{\mathbb{R}^2}$ ist selbstadjungiert.)

(ii) Beachte: $\Delta: H_\ell \rightarrow H_{\ell-2}$, und

$$r^2: H_{\ell-2} \rightarrow H_\ell \quad (\text{d.h. } p(x) \mapsto r^2 p(x) = x_1^2 p(x) + x_2^2 p(x) + x_3^2 p(x))$$

Wir haben sicher $\dim \hat{V}_\ell = \dim V_\ell = \dim \ker_{H_\ell} \Delta \geq \dim H_\ell - \dim H_{\ell-2} \oplus = 2\ell+1.$

(Verwenden: $\dim H_\ell = \sum_{\alpha_1=0}^{\ell} \sum_{\alpha_2=0}^{\ell-\alpha_1} 1 = (\ell+1) + \ell + (\ell-1) + \dots + 1 = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}.$)

Behauptung: $H_\ell = r^2 H_{\ell-2} \oplus V_\ell.$ \otimes

Daraus folgt dann $\dim V_\ell = \dim H_\ell - \dim H_{\ell-2} = 2\ell+1.$

Um \otimes zu zeigen, zeigen wir direkt: $H_\ell = V_\ell \oplus r^2 V_{\ell-2} \oplus \dots$
 $= \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} r^{2k} V_{\ell-2k}.$

Nun sind Elemente von H_ℓ (und $V_{\ell-2k}$) eindeutig durch ihre Einschränkung auf \mathbb{R}^2 bestimmt; nach Teil (i) sind die Räume $\hat{V}_{\ell-2k}$, $k=0, \dots, \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor$ paarweise orthogonal, also

$$\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2} = \dim H_\ell \geq \dim \left(\bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} r^{2k} V_{\ell-2k} \right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} \dim \hat{V}_{\ell-2k}$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor} (2(\ell-2k)+1) = (2\ell+1) + (2\ell-3) + \dots + 1 = \frac{(\ell+1)(\ell+2)}{2}.$$

Daher muss überall Gleichheit gelten. \square

Nun gilt $\Delta f = 0 \Rightarrow \Delta (\rho(R)f) = 0 \quad \forall R \in SO(3)$ (Übung),
also haben wir eine Darstellung $\tilde{\kappa}_\ell$ von $SO(3)$ auf V_ℓ (äquivalent
zur Darstellung auf \hat{V}_ℓ).

Satz. $\tilde{\kappa}_\ell \cong \mathcal{S}_{2\ell}$ (Spin ℓ -Darstellung).

Beweis. $SU(2)$ -Darstellung $\kappa : SU(2) \xrightarrow{\varphi} SO(3) \xrightarrow{\tilde{\kappa}_\ell} GL(V_\ell)$ ist

$$(\kappa_\ell(A)f)(x) = f(\varphi(A)^{-1}x). \quad (f \in V_\ell, x \in \mathbb{R}^3, A \in SU(2)).$$

Schritt 1. Berechnen Lie-Algebra-Darstellung; für $X = \sum_{j=1}^3 \alpha_j i\sigma_j$, $\vec{\alpha} = -\vartheta \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, $|\vec{n}|=1$:

$$(\kappa_*(X)f)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(R(n, t\vartheta)^{-1}x)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f((x \cdot n)n + (x - (x \cdot n)) \cos t\vartheta - (n \times x) \sin t\vartheta)$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(-t\vartheta(n \times x))$$

$$= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(2t(\alpha \times x))$$

$$= 2 \left((\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (\alpha_3 x_1 - \alpha_1 x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + (\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f(x).$$

Setzen ein $X = h \quad (\leadsto \alpha = (0, 0, -i))$

$e \quad (\leadsto \alpha = (-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, 0))$

$f \quad (\leadsto \alpha = (-\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, 0)),$

bekommen $H = \kappa_*(h) = -2i \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)$

$$E = \kappa_*(e) = x_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) - (x_1 + ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F = \kappa_*(f) = x_3 \left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + (x_1 - ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Schritt 2 Haben $v_0 := (x_1 + ix_2)^l \in V_l$,

$$\text{und } \left. \begin{aligned} H v_0 &= 2l v_0 \\ E v_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_0 \text{ ist primitiv mit Gewicht } 2l$$

$\Rightarrow \text{span}\{v_0, Fv_0, \dots, F^{2l}v_0\}$ ist ein irreduzibler $(2l+1)$ -dim. Unterraum von V_l , also $= V_l$. \square

Normierung $\| (x_1 + ix_2)^l \|^2 = 4\pi \frac{2^{2l} l!^2}{(2l+1)!}$ (bzgl. Skalarprodukt (\cdot, \cdot))

$$\Rightarrow u_{l,l}(x) = \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \overset{\text{Konvention}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^l} (x_1 + ix_2)^l \text{ hat Norm } 1, \text{ ebenso dann}$$

$$u_{l,l-j} = \frac{F u_{l,l-j+1}}{\sqrt{j(2l+1-j)}}, \quad F \text{ wie oben, } j=1, \dots, 2l$$

Einschränkung auf S^2 , mit $x_1 = \sin \vartheta \cos \varphi$, $x_2 = \sin \vartheta \sin \varphi$, $x_3 = \cos \vartheta$, gibt:

Satz. Sei $l \in \mathbb{N}_0$, $Y_{l,l}(\vartheta, \varphi) := \sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}} \left(-\frac{1}{2}\right)^l (\sin \vartheta)^l e^{il\varphi}$,

$$Y_{l,l-j} = \frac{F Y_{l,l-j+1}}{\sqrt{j(2l+1-j)}}, \quad F = e^{-i\varphi} \left(-\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \cot \vartheta \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

($j=1, \dots, 2l$).

Dann ist $\{Y_{l,m} : m=-l, \dots, l\}$ eine Orthonormalbasis von \hat{V}_l .

Satz $\{Y_{l,m} : l=0, 1, \dots, m=-l, \dots, l\}$ ist eine vollständige Orthonormalbasis von $L^2(S^2, d\Omega)$

Beweis (für Interessierte). Der Raum der stetigen Funktionen ist dicht in $L^2(S^2, d\Omega)$. Sei also $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ stetig; dann ist

$\tilde{f}(x) := |x| f\left(\frac{x}{|x|}\right): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, Weierstrassches Approximations-

satz $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ Polynom p sodass $|\tilde{f}(x) - p(x)| < \varepsilon \quad \forall |x| \leq 1$. \otimes

Können schreiben $p = \sum_{l=0}^N r^l u_l$ für $u_l \in V_l$. Da $u_l|_{S^2} \in \hat{V}_l$

eine Summe von Kugelfunktionen vom Index l ist, folgt aus \otimes also

an $|x|=1$: $\left| f(x) - \sum_{l=0}^N \sum_{m=-l}^l c_{lm} Y_{lm}(x) \right| < \varepsilon$ für geeignete $c_{lm} \in \mathbb{C}$.

\Rightarrow die lineare Hülle der $\{Y_{lm}\}$ ist dicht in $L^2(S^2, d\Omega)$. \square