Die Gruppen $O(3)$ und $O(1,3)$ beschreiben die Symmetrien des Euklidischen Raums bzw. des Minkowski-Raums der speziellen Relativitätstheorie. (Zur Erinnerung: $O(1,3) = \{A \in GL(4,\mathbb{R}) : (Ax, Ay)_{1,3} = (x,y) \ \forall x,y \in \mathbb{R}^4\}$, wobei $(x,y)_{1,3} = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3$.)

Satz Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, d.h. $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ für alle $x,y \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es $v \in \mathbb{R}^n$, $A \in O(n)$, sodass

$$f(x) = Ax + v \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis Übung. $\square$

Die Menge $\{f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ Isometrie}\}$ ist eine Gruppe. (Übung: diese Gruppe ist $G = O(n) \rtimes \mathbb{R}^n$, d.h. Elemente von G sind Paare $(A,v) \in O(n) \times \mathbb{R}^n$, und die Verknüpfung ist gegeben durch $(A,v)\circ(B,w) = (AB, Aw+v)$. ("Semidirektes Produkt".) Bestimmen Sie das neutrale Element und das Inverse $(A,v)^{-1}$!)

Die Untergruppe $O(n)$ von orthogonalen Transformationen hat selbst eine Untergruppe $SO(n)$.

Betrachten ab jetzt $n=3$. Untersuchen zunächst die Struktur von $SO(3)$ — als Vorbereitung für die Darstellungstheorie von $SO(3)$.

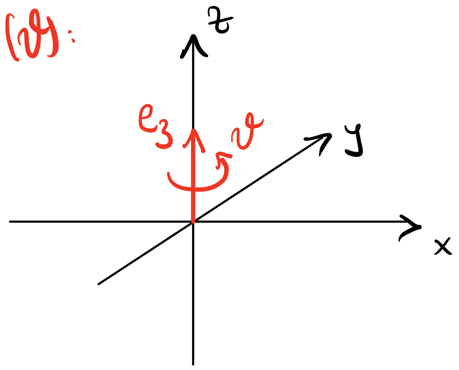
- Die Punktspiegelung $P(x) = -x$ hat $\det P = -1$

  $\Rightarrow$ Jedes Element von $O(3)$ liegt in $SO(3)$ oder hat die Form PA, $A \in SO(3)$.

- Aus der linearen Algebra:

Satz $A \in SO(3) \Rightarrow \exists \vartheta \in \mathbb{R}$ ($[0,2\pi)$ genügt), $O \in SO(3)$, sodass $A = O\, R_3(\vartheta)\, O^{-1}$, $\quad R_3(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_3(\vartheta)$:



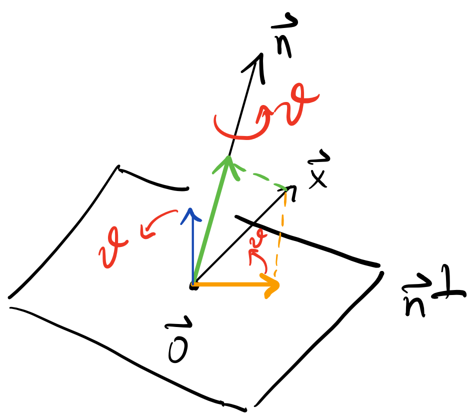
Definition Sei $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor, $O \in SO(3)$ mit $O\vec{e}_3 = \vec{n}$. Dann ist $R(\vec{n},\vartheta) = O\, R_3(\vartheta)\, O^{-1}$ die Drehung um die Achse $\vec{n}$ gegen den Uhrzeigersinn um den Winkel ϑ.

Lemma $R(\vec{n},\vartheta)\vec{x} = (\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n} + \left(\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}\right)\cos\vartheta + (\vec{n}\times\vec{x})\sin\vartheta$.

Insbesondere ist $R(\vec{n},\vartheta)$ unabhängig von der Wahl von O.

Beweis durch Bild:

- $(\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}$ = orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf die Achse $\mathbb{R}\vec{n}$
- $\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}$ = orthogonale Projektion von $\vec{x}$ auf die Ebene $\vec{n}^\perp$
- $\vec{n}\times\vec{x}$ = $90°$-Drehung von $\vec{x} - (\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}$ um die $\vec{n}$-Achse.



$\square$

Satz (Eulerwinkel) Jede Rotationsmatrix $A \in SO(3)$ kann geschrieben werden als $\quad A = R_3(\varphi)\, R_1(\vartheta)\, R_3(\psi)$, wobei

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$R_3(\varphi) = R(\vec{e}_3,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $R_1(\vartheta) = R(\vec{e}_1,\vartheta) = \begin{pmatrix} 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$,

und $\varphi \in [0,2\pi)$, $\vartheta \in [0,\pi]$, $\psi \in [0,2\pi)$. Diese Eulerwinkel sind eindeutig, falls $\vartheta \neq 0,\pi$.

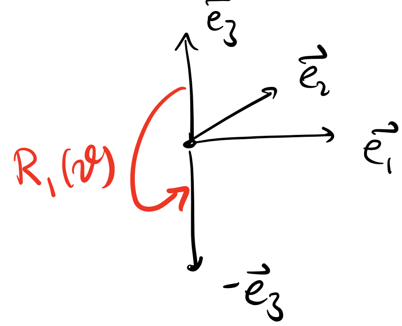
Beweis Schreiben $e_i' = A e_i$, $i=1,2,3$.

Fall 1. $e_3' = e_3 \Rightarrow A =$ Rotation um $\vec{e}_3$-Achse um den Winkel α.

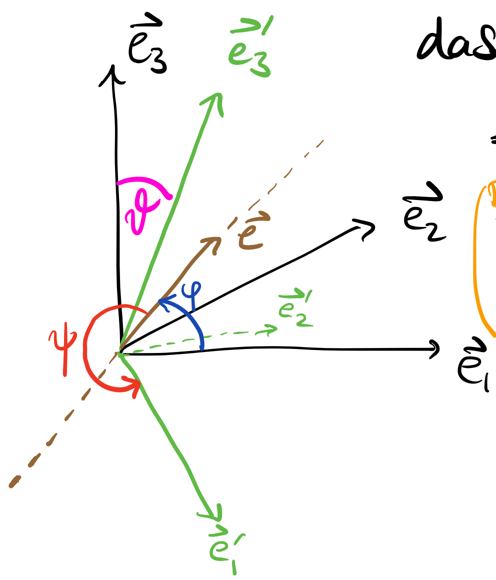
$\Rightarrow (\varphi,\vartheta,\psi) = (\alpha,0,0)$ funktioniert (oder $(\beta,0,\alpha-\beta)$ für beliebige β).

Fall 2. $e_3' = -e_3$. Können $(\varphi,\vartheta,\psi) = (\varphi,\pi,0)$ nehmen für geeignetes φ.

(oder $(\varphi+\beta,\pi,\beta)$ für beliebige β).



Fall 3 $e_3' \neq \pm e_3$. $\Rightarrow$ Die Ebenen $\operatorname{span}\{e_1,e_2\}$ und $\operatorname{span}\{e_1',e_2'\}$ schneiden sich in einer Geraden $\mathbb{R}\vec{e}$. Können $\vec{e}$ so wählen,



dass $\det(\vec{e}_3,\vec{e}_3',\vec{e}) > 0$.

$$\Rightarrow A = R(\vec{e}_3',\psi) \circ R(\vec{e},\vartheta) \circ R(\vec{e}_3,\varphi) \quad (*)$$

Beweis:
$$\vec{e}_1' \longleftarrow \vec{e} \longleftarrow \vec{e} \longleftarrow \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3' \longleftarrow \vec{e}_3' \longleftarrow \vec{e}_3 \longleftarrow \vec{e}_3$$
und daher gilt "=" auch für $\vec{e}_2$.

Müssen jetzt noch $(*)$ mit $\vec{e}_1, \vec{e}_3$ ausdrücken

(i) $R(\vec{e},\vartheta) = R(\vec{e}_3,\varphi) \circ R(\vec{e}_1,\vartheta) \circ R(\vec{e}_3,\varphi)^{-1}$

(ii) $R(e_3',\psi) = R(\vec{e},\vartheta) \circ R(\vec{e}_3,\psi) \circ R(\vec{e},\vartheta)^{-1}$

Einsetzen in $(*)$ ergibt

$$A \overset{(i),(ii)}{=} R(\vec e_1,\vartheta) R(\vec e_3,\psi) R(\vec e_1,\vartheta)^{-1} \cdot R(\vec e_3,\varphi) R(\vec e_1,\vartheta) \underbrace{R(\vec e_3,\varphi)^{-1} \cdot R(\vec e_3,\varphi)}_{=I}$$

$$\overset{(i)}{=} R(\vec e_3,\varphi) R(\vec e_1,\vartheta) \underbrace{R(\vec e_3,\varphi)^{-1} R(\vec e_3,\psi) R(\vec e_3,\varphi)}_{=R(\vec e_3,\psi)} \cancel{R(\vec e_1,\vartheta)^{-1}} \cancel{R(\vec e_3,\varphi)^{-1}} \cdot \cancel{R(\vec e_3,\varphi)} \cancel{R(\vec e_1,\vartheta)}$$

$$= R(\vec e_3,\varphi) R(\vec e_1,\vartheta) R(\vec e_3,\psi). \qquad \square$$

SU(2), SO(3) und Spin $\frac{1}{2}$

Wahrscheinlich haben Sie bereits gelesen, dass z.B. Elektronen nach einer 360°-Drehung noch nicht wieder "sie selbst" sind, sondern erst nach einer 720°-Drehung, "da" ein Elektron ein "Spin $\frac{1}{2}$"-Teilchen ist. Wir werden das jetzt rigoros fassen.

Erinnerung: $SU(2) = \{ A \in GL(2,\mathbb{C}) : A^*A = I,\ \det A = 1 \}$.

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} : \alpha,\beta \in \mathbb{C},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \quad (\text{Übung.})$$

Sei $\mathcal{H}_0 = \{ X \in M_2(\mathbb{C})$ (komplexe 2x2-Matrizen) : $X = X^*,\quad \operatorname{Tr}(X) = 0 \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{3-dim. reeller Vektorraum.}$$

(Später: $\mathcal{H}_0 = \{ i\sigma : \sigma \in su(2) = $ Lie-Algebra von $SU(2) \}$.)

Lemma $\rho : SU(2) \longrightarrow GL(\mathcal{H}_0)$,

$$\rho(A)\, X = A X A^{-1} = A X A^*,$$

ist eine (reelle) Darstellung.

Beweis (i) Müssen zeigen: $X \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow \rho(A) X \in \mathcal{H}_0$. Das folgt aus

$$(\rho(A) X)^* = (A X A^*)^* = A^{**} X^* A^* = A X A^* = \rho(A) X,$$

$$\operatorname{Tr}(\rho(A) X) = \operatorname{Tr}(A X A^{-1}) = \operatorname{Tr}(X) = 0,$$

(ii) $\rho(AB) X = A B X B^{-1} A^{-1} = \rho(A)\,(\rho(B)\, X)$. $\square$

Weiterhin können wir auf H_0 ein Skalarprodukt einführen,

$$(X,Y) := \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(XY) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(XY^*) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} X_{ij}(Y^*)_{ji} = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} X_{ij}\overline{Y_{ij}}$$

(Übung: das ist in der Tat ein Skalarprodukt)

Lemma Die Darstellung $\rho : SU(2) \to GL(H_0)$ ist orthogonal.

Beweis Berechnen $(\rho(A)X, \rho(A)Y) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(\rho(A)X \cdot \rho(A)Y)$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(AX\underbrace{A^{-1}A}_{=I}YA^{-1}) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(AXYA^{-1}) = \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}(XY)$$

$= (X,Y)$. $\square$

Eine Orthonormalbasis von H_0 ist gegeben durch die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Übung.) Identifizieren wir $(H_0, \text{Skalarprodukt}) \cong (\mathbb{R}^3, \text{Standard-Skalarprodukt})$ mittels dieser Basis, besagt obiges Lemma also

$$\rho : SU(2) \to O(3).$$

Behauptung $\rho : SU(2) \to SO(3)$, d.h. $\rho(A) \in SO(3)$ $\forall A \in SU(2)$.

Beweis (i) zeigen: $SU(2)$ ist wegzusammenhängend: für alle $A \in SU(2)$ gibt es eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to SU(2)$ (d.h. alle Matrixelemente $\gamma_{ij} : [0,1] \to \mathbb{C}$ sind stetig) mit $\gamma(0) = I$ und $\gamma(1) = A$. In der Tat, da A diagonalisierbar ist mit Eigenwerten λ und $\frac{1}{\lambda}$ mit $|\lambda|^2 = 1$, gilt $A = B\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}B^{-1}$ mit $B \in SU(2)$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Können also $\gamma(t) = B\begin{pmatrix} e^{it\theta} & 0 \\ 0 & e^{-it\theta}\end{pmatrix}B^{-1}$ nehmen.

(ii) Da $\rho(\gamma(t)) \in O(3)$, ist $\det(\rho(\gamma(t))) = \pm 1$ $\forall t \in [0,1]$.
Aber $\det(\rho(\gamma(t)))$ ist stetig, und $\det(\rho(\gamma(0))) = \det(I) = 1$;
also $\det(\rho(\gamma(t))) = 1$ $\forall t \in [0,1]$. Für $t=1$ folgt $\rho(A) \in SO(3)$. $\square$

Satz $\rho: SU(2) \to SO(3)$ ist surjektiv mit Kern $\{I, -I\}$.

Also ist $SO(3) \cong SU(2)/\{I,-I\}$.

(Isomorphismus von Gruppen)

Beweis (i) Surjektivität. Es genügt zu zeigen, dass $R_1(\varphi)$, $R_3(\vartheta)$ in $\mathrm{im}(\rho)$ liegen.

(i.1) Berechnen für $X = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$

und $A = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$: $AXA^{-1} = \begin{pmatrix} x_3' & x_1' - ix_2' \\ x_1' + ix_2' & -x_3' \end{pmatrix}$ mit

$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = R_3(\vartheta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ (Übung.) Also ist $\rho(A) = R_3(\vartheta)$.

(i.2) Übung: $\rho(A) = R_1(\varphi)$ für $A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

(ii) $\ker(\rho)$? Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, mit $AXA^{-1} = X \ \forall X \in V$, d.h. $AX = XA$.

Für $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erhalten wir $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\bar\beta & -\bar\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & -\bar\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 0, |\alpha| = 1$.

Für $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ folgt dann $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \bar\alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = \bar\alpha$.

Also $\alpha = \pm 1$, und daher $A = \pm I$.

Umgekehrt gilt $\rho(\pm I)X = (\pm I)X(\pm I)^{-1} = X$, also $\pm I \in \ker\rho$. $\square$

Zusammenhang mit Quantenmechanik.

Erinnerung: $\rho: SU(2) \to SO(3)$

$A \in SU(2) \mapsto R = \rho(A) \in SO(3)$

$\pm A \leftrightarrow R$.

Mittels $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \hat{x} := x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$

$= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$

ist hier $\widehat{Rx} = A\hat{x}A^*$.

Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons.

Von **W. Pauli jr.** in Hamburg.

(Eingegangen am 3. Mai 1927.)

Es wird gezeigt, wie man zu einer Formulierung der Quantenmechanik des magnetischen Elektrons nach der Schrödingerschen Methode der Eigenfunktionen ohne Verwendung zweideutiger Funktionen gelangen kann, indem man, gestützt auf die allgemeine Dirac-Jordansche Transformationstheorie, neben den Ortskoordinaten jedes Elektrons, um seinen rotatorischen Freiheitsgraden Rechnung zu tragen, die Komponente seines Eigenimpulsmomentes in einer festen Richtung als weitere unabhängige Veränderliche einführt. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik kann diese Variable jedoch, ganz unabhängig von irgend einer speziellen Art der äußeren Kraftfelder, nur die Werte $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ und $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ annehmen. Das Hinzutreten der genannten neuen Variable bewirkt daher bei einem Elektron einfach ein Aufspalten der Eigenfunktion in zwei Ortsfunktionen ψ_α, ψ_β und allgemeiner bei N Elektronen in 2^N Funktionen, die als die „Wahrscheinlichkeitsamplituden" dafür zu betrachten sind, daß in einem bestimmten stationären Zustand des Systems nicht nur die Lagenkoordinaten der Elektronen in vorgegebenen infinitesimalen Intervallen liegen, sondern auch die Komponenten ihrer Eigenmomente in der festgewählten Richtung bei ψ_α zu $+\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$, bei ψ_β zu $-\frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}$ vorgegebene Werte haben. Es werden Methoden angegeben, um bei gegebener Hamiltonscher Funktion des Systems ebenso viele simultane Differentialgleichungen für die ψ-Funktionen aufzustellen, als ihre Anzahl beträgt (also 2 bzw. 2^N). Diese Gleichungen sind in ihren Folgerungen mit den Matrizengleichungen von Heisenberg und Jordan völlig äquivalent. Ferner wird im Fall mehrerer Elektronen diejenige Lösung der Differentialgleichungen, die der „Äquivalenzregel" genügt, im Anschluß an Heisenberg und Dirac durch ihre Symmetrieeigenschaften bei Vertauschung der Variablenwerte zweier Elektronen in einfacher Weise charakterisiert.

Pauli (1927): Wellenfunktion eines Spin $\frac{1}{2}$ Teilchens (z.B. Elektron):

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

D.h $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^2$ ist ein (normierter) Element des Hilbertraumes $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$, mit Skalarprodukt

$$(\psi, \phi) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\psi_1(x)\overline{\phi_1(x)} + \psi_2(x)\overline{\phi_2(x)} \right) dx.$$

- Pauli-Gleichung für das Elektron

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,x) + \overset{\text{Ladung}}{q}\,\overset{\text{elektrisches Potential}}{V(x)}\,\psi(t,x).$$

- ψ und $e^{i\alpha}\psi$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ beschreiben denselben Zustand.
- Verhalten der Wellenfunktion unter "Drehungen":

$$A \in SU(2) \rightsquigarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \longmapsto \tilde{\rho}(A)\psi,$$

$R = \rho(A)$

$$(\tilde{\rho}(A)\psi)(x) = A\psi(R^{-1}x).$$

$\Rightarrow$ $\tilde{\rho}$ ist eine (unitäre) Darstellung von $SU(2)$ auf $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$,

und $\tilde{\rho}(-I)\psi = -\psi$, obwohl $\rho(-I) = I$.

"360° Rotation" bildet Wellenfunktion auf ihr negatives ab.

Lorentzgruppe und $SL(2,\mathbb{C})$

Haben $O(1,3) = \{ A \in GL(4,\mathbb{R}) : (Ax,Ax)_{1,3} = (x,x)_{1,3} \ \forall x \in \mathbb{R}^4 \}$,

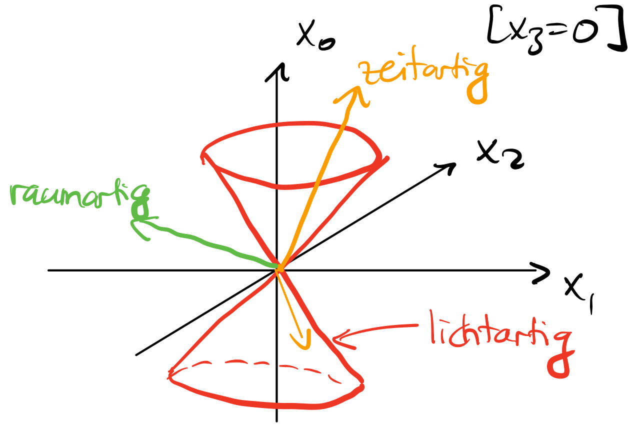
also $(Ax,Ax)_{1,3} = (x,x)_{1,3}$ $\forall x \in \mathbb{R}^4$.

Definition $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$ heisst

lichtartig, falls $(x,x)_{1,3} = 0$,

zeitartig, falls $(x,x)_{1,3} > 0$,

raumartig, falls $(x,x)_{1,3} < 0$.



$\Longrightarrow$ $A \in O(1,3)$ bildet $*$-artige Vektoren auf $*$-artige Vektoren ab ($*$ = licht, zeit, raum).

- Elemente von $O(1,3)$ heissen Lorentz-Transformationen.
- Physikalisch: $x_0 = ct$, c = Lichtgeschwindigkeit.

- $A \in O(1,3) \Longleftrightarrow Ax \cdot gAx = x \cdot gx \ \forall x$; $\cdot$ = Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$, $g = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$, d.h. $A^T g A = g$.

Also $\det(g) = -1 = \det(A^T)\det(g)\det(A) = -\det(A)^2$

$\Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

Schreiben ab jetzt $(x,y) \equiv (x,y)_{1,3}$.

Definition Eine Basis $b_0, \dots, b_3 \in \mathbb{R}^4$ ist orthonormiert (bezüglich der Minkowski-Metrik g), falls $(b_i, b_j) = g_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j=0 \\ -1, & i=j=1,2,3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiel $b_i = e_i$ (Standardbasis).

Satz Seien $b_0, \dots, b_3$ und $b_0', \dots, b_3'$ zwei orthonormierte Basen des Minkowskiraumes $(\mathbb{R}^4, g)$. Dann $\exists$ genau eine Lorentz-Transformation A mit $Ab_i = b_i' \ \forall i$.

Beweis Übung. $\square$

- Bemerkung Eine 4×4-Matrix ist in $O(1,3)$
  $\Longleftrightarrow$ die Spalten sind orthonormiert
  $\Longleftrightarrow$ die Zeilen sind orthonormiert.

- Beispiele von Lorentz-Transformationen.

(i) räumliche Rotation: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, $R \in SO(3)$

räumliche orthogonale Transformation: $R \in O(3)$.

$\Rightarrow$ Können $SO(3)$ und $O(3)$ als Untergruppe von $O(1,3)$ ansehen.

Schreiben R statt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.

(ii) Lorentz-Boost (manchmal auch hyperbolische Rotation),

hier in z-Richtung:

$$L(\chi) = \begin{pmatrix} \cosh\chi & 0 & 0 & \sinh\chi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\chi & 0 & 0 & \cosh\chi \end{pmatrix}, \quad \text{Rapidität } \chi \in \mathbb{R}.$$

Übung: $L(\chi_1)L(\chi_2) = L(\chi_1+\chi_2)$, d.h. $L: \mathbb{R} \to O(1,3)$

ist ein (injektiver) Gruppenhomomorphismus.

Bemerkung. Beziehung zwischen Rapidität χ und γ-Faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$:

$\cosh\chi = \gamma$. ($\Rightarrow \sinh\chi = \pm\sqrt{\gamma^2-1} = \pm\frac{v}{c}\gamma$; Vorzeichen — Boost in positive oder negative z-Richtung? — bestimmt Vorzeichen von χ.)

(iii) Diskrete Lorentztransformationen.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{("time reversal") Zeitumkehr}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{("parity reversal") Raumspiegelung}$$

$PT = -I$.

$\Rightarrow \{I, T, P, PT\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ Untergruppe von $O(1,3)$.

Bemerkung $A \in O(1,3) \Rightarrow (Ae_0, Ae_0) = a_{00}^2 - a_{10}^2 - a_{20}^2 - a_{30}^2 = 1$

$\Rightarrow |a_{00}| \geq 1$, insb. $a_{00} \neq 0$.

Lemma $O_+(1,3) = \{A \in O(1,3) : a_{00} > 0\}$ ist eine Untergruppe.

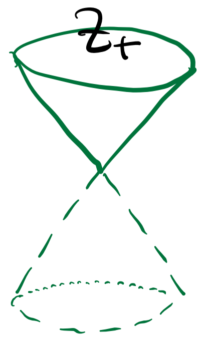
("Orthochrone Lorentzgruppe.")

Beispiele $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, $L(\chi)$, $P \in O_+(1,3)$; $T, PT \notin O_+(1,3)$.

Beweis Geometrische Idee: sei $Z_+ = \{x \in \mathbb{R}^4 : x \text{ zeitartig}, x_0 > 0\}$.

Dann liegt $A \in O(1,3)$ in $O_+(1,3)$

$\iff A : Z_+ \longrightarrow Z_+$.



Die Menge solcher A ist offensichtlich eine Gruppe! □

Schreiten weiter $SO_+(1,3) = \{A \in O_+(1,3) : \det A = +1\}$
("spezielle orthochrone Lorentzgruppe"). (Enthält nicht T, P, PT.)

Satz $O(1,3) =$ disjunkte Vereinigung von

$$\left.\begin{array}{ll} SO_+(1,3) & (a_{00} > 0,\ \det = 1) \\ P \cdot SO_+(1,3) & (a_{00} > 0,\ \det = -1) \end{array}\right\} \text{zusammen: } O_+(1,3)$$

$$\left.\begin{array}{ll} T \cdot SO_+(1,3) & (a_{00} < 0,\ \det = -1) \\ PT \cdot SO_+(1,3) & (a_{00} < 0,\ \det = 1) \end{array}\right\} \text{zusammen: } T \cdot O_+(1,3)$$

Insbesondere gilt $O(1,3) \cong SO_+(1,3) \rtimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(Vergleiche mit dem Fall $O(3) \cong SO(3) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$!)

Bemerkung (zum semidirekten Produkt) Eine Rechnung zeigt: für $A_1, A_2 \in SO_+(1,3)$, $Q_1, Q_2 \in \{I, T, P, PT\}$
gilt $(Q_1 A_1) \cdot (Q_2 A_2) = Q_1 Q_2 \cdot Q_2 A_1 Q_2 A_2$, wobei

$$Q_2 A_1 Q_2 = \begin{cases} A_1, & Q_2 = I, PT = -I \\ (A_1^T)^{-1}, & Q_2 = P, T. \end{cases}$$

Satz $SO_+(1,3)$ ist wegzusammenhängend: für jedes $A \in SO_+(1,3)$ existiert eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$ mit $\gamma(t) \in SO_+(1,3)$ $\forall t$ und $\gamma(0) = I$, $\gamma(1) = A$.

Da $\mathrm{sign}(a_{00})$ und $\det(A)$ stetig von $A \in O(1,3)$ abhängen, ist die Zerlegung von $O(1,3)$ im obigen Satz die Zerlegung in Wegzusammenhangskomponenten (Äquivalenzklassen von $O(1,3)$ bzgl. $A_1 \sim A_2 \iff \exists$ stetiger Pfad in $O(1,3)$ von A_1 nach A_2)

Um den Satz zu beweisen, brauchen wir ein Lemma.

Lemma Sei $A \in SO_+(1,3)$. Dann existieren $R_1, R_2 \in SO(3)$ und $\chi \in \mathbb{R}$, sodass $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_1 \end{pmatrix} L(\chi) \begin{pmatrix} 1 & \\ & R_2 \end{pmatrix}$ ($= R_1 L(\chi) R_2$ in Kurzschreibweise).

Beweis Erste Spalte von A: $\begin{pmatrix} a_{00} \\ \vec{a} \end{pmatrix}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $a_{00}^2 - |\vec{a}|^2 = 1$.

- Nehmen $R \in SO(3)$ mit $R\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{a}| \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow RA = \begin{pmatrix} a_{00} & \\ 0 & \\ 0 & \cdots \\ b & \end{pmatrix}, \quad a_{00}^2 - b^2 = 1. \text{ Da } a_{00} > 0 : \exists \chi \in \mathbb{R} \text{ s.t.}$$

$$\begin{matrix} a_{00} = \cosh(\chi) \\ b = \sinh(\chi) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad L(-\chi) RA = L(\chi)^{-1} RA = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ 0 & \cdots \\ 0 & \end{pmatrix} =: A'$$

- Spalten von A' sind orthonormiert $\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, und $A' \in SO_+(1,3)$ ergibt $R' \in O(3)$, $\det R' = 1 \Rightarrow R' \in SO(3)$.
- Also: $L(\chi)^{-1} RA = R' \Rightarrow A = R^{-1} L(\chi) R'$. $\square$

Beweis des Satzes Schreiben $A = R_1 L(\chi) R_2$; dann ist $\gamma_1 : t \in [0,1] \longmapsto R_1 L((1-t)\chi) R_2$ ein Pfad von $A = \gamma_1(0)$ nach $\gamma_1(1) = R_1 R_2 \in SO(3)$. Können dann weiter $\gamma_1(1)$ mit I verbinden (da $SO(3)$ wegzusammenhängend ist). $\square$

- $SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \det A = 1\} \supset SU(2)$

Unter anderem für relativistische Quantenmechanik benötigt man eine Verallgemeinerung der doppelten Überlagerung $SU(2) \to SO(3)$ für $SO_+(1,3)$. (Bem.: $SO(3) \subset SO_+(1,3)$ via $R \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.)

Sei $H = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : A = A^*\}$.

Also $X \in H \iff X = \hat{x} := \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}$ für ein $x \in \mathbb{R}^4$,

also $\hat{x} = x_0 \mathbb{1} + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$ (σ_j = Pauli-Matrizen).

Wir identifizieren also $H \cong \mathbb{R}^4$, und geben $\mathbb{R}^4$ (und damit H) das Minkowski-Skalarprodukt.

Bemerkung $H_0 \subset H$.

Definieren $\varphi : SL(2,\mathbb{C}) \to GL(H)$,
$A \mapsto \varphi(A)$, $\widehat{\varphi(A)x} = A\hat{x}A^*$.

Bemerkung Die Einschränkung von φ auf $SU(2) \subset SL(2,\mathbb{C})$ ist gerade der Homomorphismus $SU(2) \to SO(3)$ von vorhin.

Lemma $\varphi(A) \in SO_+(1,3)$.

Beweis
- Für $x \in \mathbb{R}^4$ gilt $\det(\hat{x}) = (x,x)$ und

$$(\varphi(A)x, \varphi(A)x) = \det\left(\widehat{\varphi(A)x}\right) = \det(A)\det(\hat{x})\overline{\det(A)}$$
$$= \underbrace{|\det A|^2}_{=1}(x,x) = (x,x).$$

$\Rightarrow \varphi(A) \in O(1,3)$.

- Verwenden jetzt das gleiche Argument wie für $SU(2) \to SO(3)$:

da $SL(2,\mathbb{C})$ zusammenhängend ist (Übung), liegt $\varphi(A)$ in der Wegzusammenhangskomponente von $\varphi(I) = I \in SO_+(1,3)$.
Das ist aber gerade $SO_+(1,3)$. $\square$

Satz $\phi: SL(2,\mathbb{C}) \to SO_+(1,3)$ ist surjektiv mit Kern $\{+I, -I\}$.
Also: $SO_+(1,3) \cong SL(2,\mathbb{C}) / \{\pm I\}$.

Beweis • Da $\phi|_{SU(2)}: SU(2) \to SO(3) (\subset SO_+(1,3))$ surjektiv ist, müssen wir zeigen, dass $L(\chi)$ (Lorentz-Boost) in $\mathrm{im}(\phi)$ liegt. Für $A_\theta = \begin{pmatrix} e^\theta & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ gilt

$$A_\theta \hat{x} A_\theta^* = \begin{pmatrix} e^{2\theta}(x_0+x_3) & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & e^{-2\theta}(x_0 - x_3) \end{pmatrix} = \hat{x'} \quad \text{mit} \quad x_1' = x_1,\ x_2' = x_2,$$

$$\begin{cases} x_0' + x_3' = e^{2\theta}(x_0+x_3) \\ x_0' - x_3' = e^{-2\theta}(x_0 - x_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0' = \cosh(2\theta) x_0 + \sinh(2\theta) x_3 \\ x_3' = \sinh(2\theta) x_0 + \cosh(2\theta) x_3. \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi(A_{\chi/2}) = L(\chi)$. Also ist ϕ surjektiv.

• $A \in \ker\phi \Leftrightarrow A\hat{x}A^* = \hat{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^4$. Für $x = (1,0,0,0)$ ist $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also erhalten wir $AA^* = I \Rightarrow A \in SU(2)$.

Aus unserem vorigen Resultat erhalten wir dann $A = \pm I$. $\square$

Physikalisches Beispiel Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ auf Weyl-Fermionen (Lösungen der Weyl-Gleichung $\sum_{\mu=0}^{3} \sigma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = 0$)