

Proseminar: Levin-Type methods

Marco Läubli

24.11.2008

Themenübersicht

- 1 Das Grundprinzip
 - Problemstellung
 - Collocation (Levin-Type) - Methode
 - Vorgehensweise
- 2 Eindimensionale Integrale
 - Beispiel 1
 - Beispiel 2
- 3 Die verallgemeinerte Form
 - Vorgehensweise
 - Besselfunktionen
 - Beispiel 3
- 4 Mehrdimensionale Integrale
 - Beispiel 4
- 5 Zusammenfassung

Integrale mit stark oszillierenden Integranden

Gesucht ist eine Methode für die numerische Auswertung von Integralen der Form:

$$I = \int_a^b f(x) e^{i\omega q(x)} dx \quad (1)$$

Dabei stellt $\omega > 0$ den Frequenzparameter dar, und f und q sind reelle schwach oszillierende Funktionen.

Ein stark oszillierender Integrand

Zum Beispiel Integranden wie $\cos(x) \cdot e^{i \cdot 300x^2}$ im Intervall $[0,1]$:

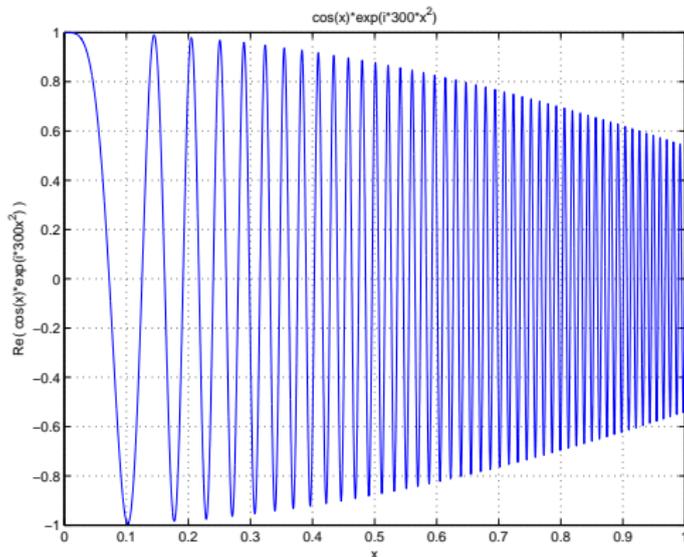


Abbildung: Stark oszillierender Integrand

Die Idee der Levin-Type Methode

$$I = \int_a^b f(x) e^{i\omega q(x)} dx$$

Angenommen f wäre von folgender Form:

$$f(x) = p'(x) + i\omega q'(x)p(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

dann ist $p(x)e^{i\omega q(x)}$ eine Stammfunktion von $f(x)e^{i\omega q(x)}$ und somit ergibt sich:

Berechnung von I

$$I = \left(p(x) e^{i\omega q(x)} \right) \Big|_a^b = p(b) e^{i\omega q(b)} - p(a) e^{i\omega q(a)}$$

Differentialgleichung für p DLG für p

$$f(x) = p'(x) + i\omega q'(x)p(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (2)$$

Gleichung (2) kann als DGL in p aufgefasst werden. Ihre allgemeine Lösung ist:

$$p(x) = \left(\int_a^x f(t) e^{i\omega q(t)} dt + C \right) e^{-i\omega q(x)}$$

$$p(x) = \underbrace{p_0}_{\text{part. Lsg}} + \underbrace{c \cdot e^{-i\omega q(x)}}_{\text{homog. Lsg.}}$$

dann ergibt sich:

$$I = p(b)e^{i\omega q(b)} - p(a)e^{i\omega q(a)} = p_0(b)e^{i\omega q(b)} - p_0(a)e^{i\omega q(a)}$$

Existenz einer schwach oszillierenden Lösung der DGL

$$f(x) = p'(x) + i\omega q'(x)p(x), \quad (a \leq x \leq b) \quad (3)$$

Lemma 1

Sind f und q schwach oszillierend, $q|_{[a,b]}$ invertierbar und $|\omega q'(x)| \gg 1$, dann:
besitzt die DGL (3) eine schwachoszillierende partikuläre Lösung p_0 .

Numerische Lösung der DGL

$$f(x) = p'(x) + i\omega q'(x)p(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

Um die obige DGL zu lösen wird eine “n-point collocation approximation” wie folgt definiert:

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x)$$

wobei $\{u_k\}_{k=1}^n$ schwach oszillierende, linear unabhängige Basisfunktionen sind. Die Koeffizienten $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ sind bestimmt durch:

$$p'_n(x_j) + i\omega q'(x_j)p_n(x_j) = f(x_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

wobei $\{x_j\}_{j=1}^n$ paarweise verschiedene Stützstellen (collocation points) in $[a, b]$ sind.

Rezept

- Wähle Basisfunktionen $\{u(x)\}_{k=1}^n$
- Löse folgendes lineare Gleichungssystem nach $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha_k u'_k(x_j)}_{p'_n(x_j)} + i\omega q'(x_j) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x_j)}_{p_n(x_j)} = f(x_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

- Berechne $I_n = p_n(b)e^{i\omega q(b)} - p_n(a)e^{i\omega q(a)}$

Beweis Lemma 1

Lemma 1

Sind f und q schwach oszillierend, $q|_{[a,b]}$ invertierbar und $|\omega q'(x)| \gg 1$, dann:
besitzt die DGL eine schwach oszillierende partikuläre Lösung p_0 .

DGL für p

$$f(x) = p'(x) + i\omega q'(x)p(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

mit allgemeiner Lösung:

$$p(x) = \left(\int_a^x f(t) e^{i\omega q(t)} dt + C \right) e^{-i\omega q(x)}$$

p_0 in einem konkreten Beispiel

Sei:

$$I = \int_a^b f(x) e^{i\omega q(x)} dx = \int_a^b 1 \cdot e^{i\omega \cdot x} dx$$

Gemäss Lemma 1 gibt es ein $C \in \mathbb{C}$ so dass:

$$p(x) = \left(\int_a^x f(t) e^{i\omega q(t)} dt + C \right) e^{-i\omega q(x)}$$

schwach oszillierend ist. (siehe Matlab)

Eindimensionale Integrale

Wir betrachten nun *eindimensionale* Integrale der Form:

$$I = \int_a^b f(x) e^{i\omega q(x)} dx$$

welche den Voraussetzungen von Lemma 1 genügend, d.h. f und q schwach oszillierend, $q|_{[a,b]}$ invertierbar und $|\omega q'(x)| \gg 1$.

Beispiel 1

Sei: $f(x) = \sin(x)$, $q(x) = x + x^2$, $a = 0$, $b = 1$ also:

Beispiel 1

$$I = \int_0^1 \sin(x) e^{i\omega(x+x^2)} dx$$

Der Integrand für $\omega = 10$

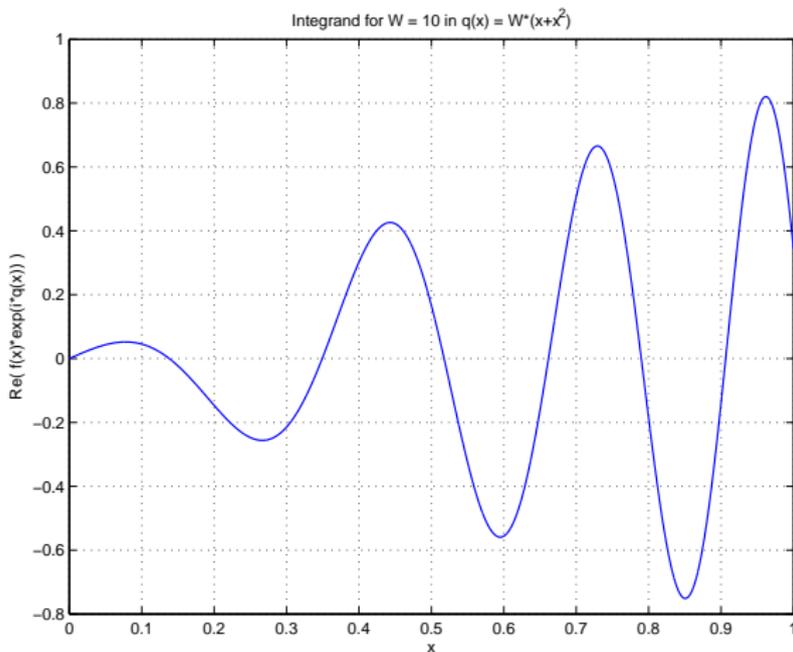


Abbildung: Integrand Bsp.1 mit $\omega = 10$

Der Integrand für $\omega = 100$

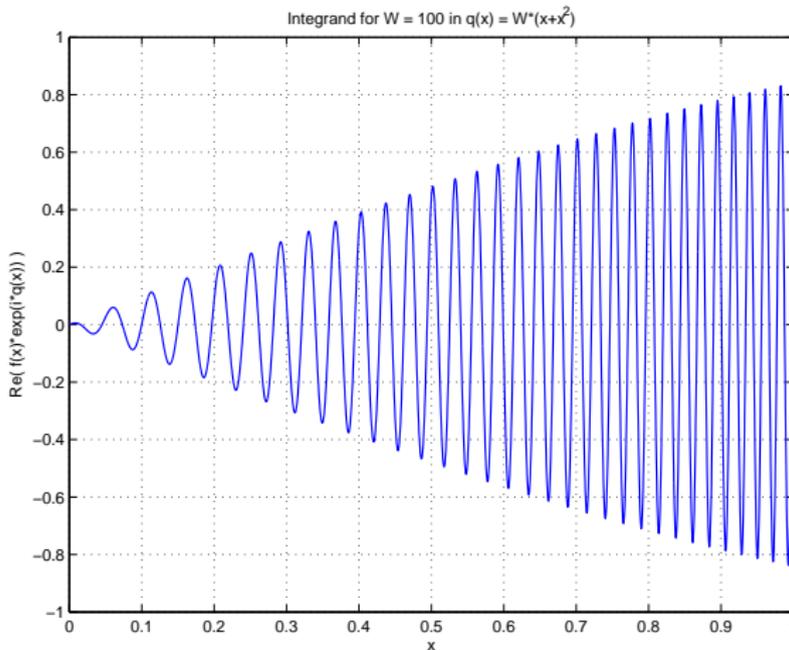


Abbildung: Integrand Bsp.1 mit $\omega = 100$

Der Integrand für $\omega = 500$

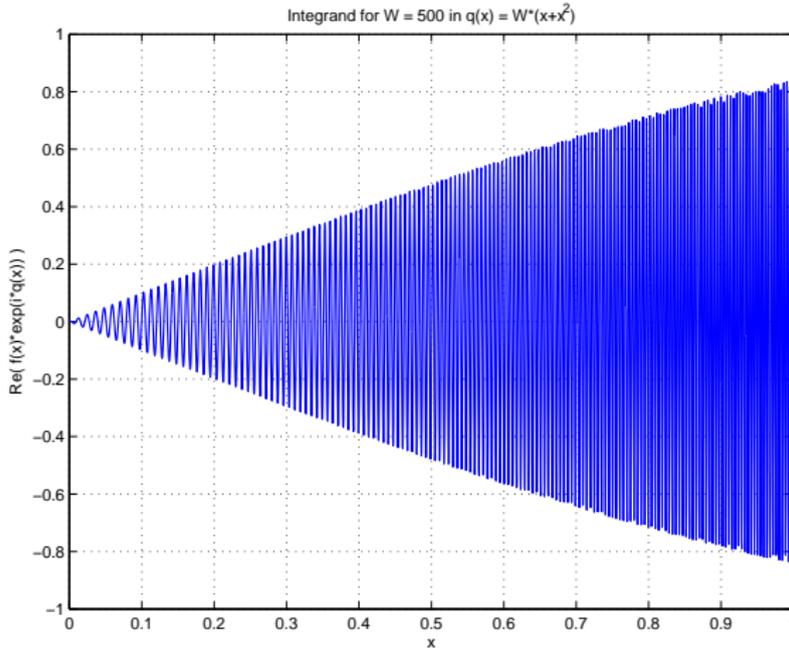


Abbildung: Integrand Bsp.1 mit $\omega = 500$

Wahl der Basisfunktionen

p_0 wird hier mit einem Polynom approximiert. Als Basisfunktionen $\{u_k\}_{k=1}^n$ werden Monome gewählt:

$$u_k(x) := x^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Die Stützstellen $\{x_j\}_{j=1}^n$ werden äquidistant zwischen $0 = x_1$ und $1 = x_n$ verteilt.

Löse lineares Gleichungssystem

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha_k u'_k(x_j)}_{p'_n(x_j)} + i\omega q'(x_j) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x_j)}_{p_n(x_j)} = f(x_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

\Leftrightarrow

$$\sum_{k=1}^n \left[\underbrace{u'_k(x_j) + i\omega q'(x_j) \cdot u_k(x_j)}_{a_{jk}} \right] \cdot \alpha_k = f(x_j), \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

\Leftrightarrow

$$A \cdot \vec{\alpha} = \vec{b} \quad \text{wobei} \quad A = (a_{jk})_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq n}}$$

Lösung der DGL

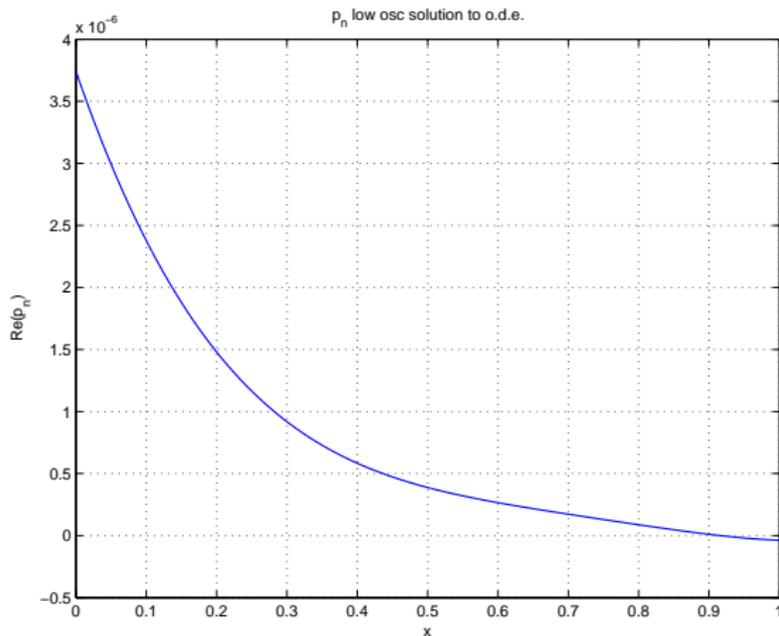


Abbildung: $\Re(p_n)$: collocation solution

Berechne I_n

$$I_n = \underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(b)}_{p_n(b)} \cdot e^{i\omega q(b)} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(a)}_{p_n(a)} \cdot e^{i\omega q(a)}$$

Für $\omega = 500$ ist:

$$I = \int_0^1 \sin(x) e^{i \cdot 500(x+x^2)} dx$$

und somit zum Beispiel mit 5 Stützstellen ausgewertet:

$$\Re(I_5) = 4.60098... \cdot 10^{-4}$$

$$\Re(I) = 4.59859... \cdot 10^{-4}$$

Fehleranalyse: n-Konvergenz

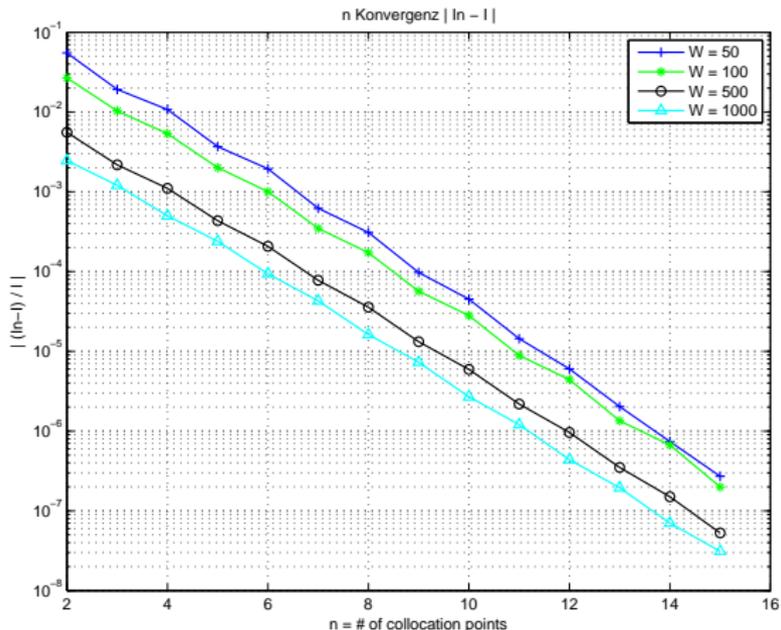


Abbildung: relativer Fehler

Fehleranalyse: ω -Konvergenz

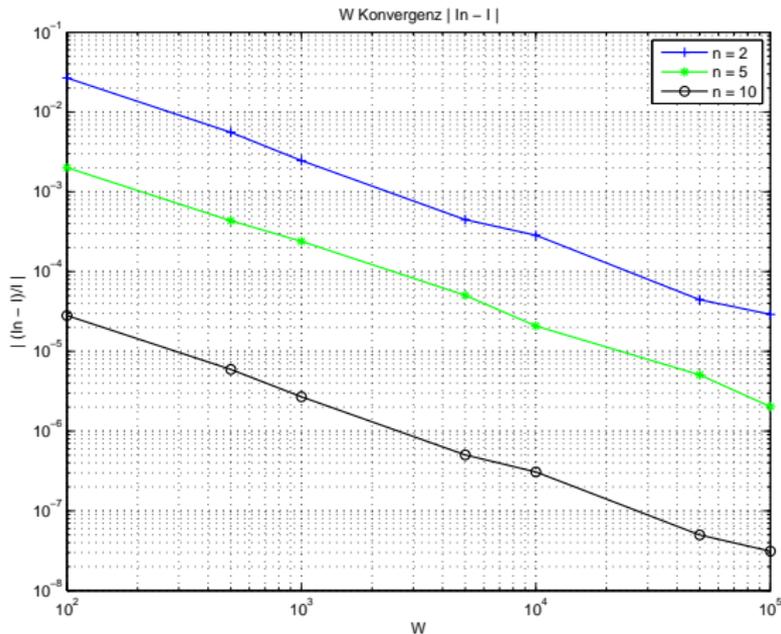


Abbildung: relativer Fehler, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)$ ($\omega \rightarrow \infty$)

Fehleranalyse: ω -Konvergenz

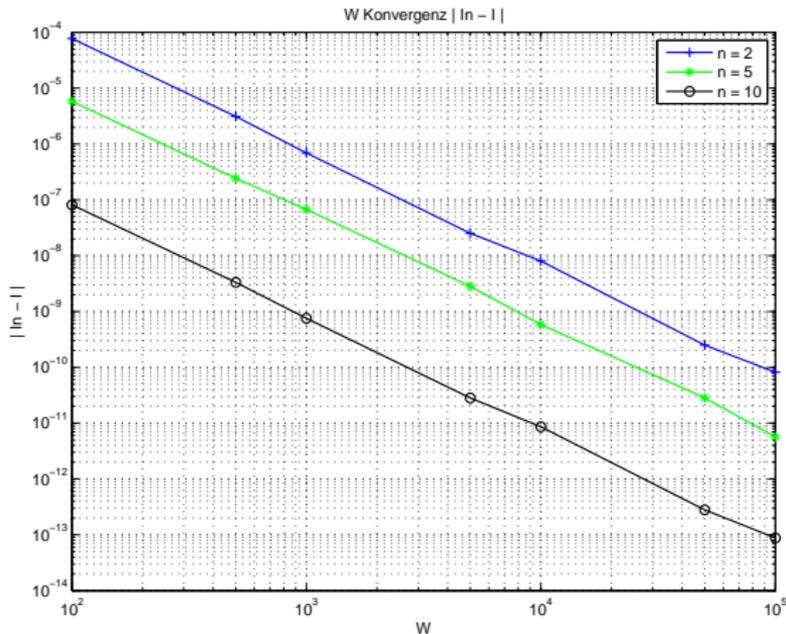


Abbildung: absoluter Fehler, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$ ($\omega \rightarrow \infty$)

Beispiel 2: Ein uneigentliches Integral

Das zu berechnende Integral sei:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{iy}}{(1+y)^2} dy \quad (4)$$

Durch die Substitution: $y = \frac{x}{1-x}$ wird (4) zu:

Beispiel 2

$$I = \int_0^1 e^{i \frac{x}{1-x}} dx$$

also: $f(x) = 1$, $q(x) = \frac{x}{1-x}$, $a = 0$, $b = 1$

Der Integrand des uneigentlichen Integrals

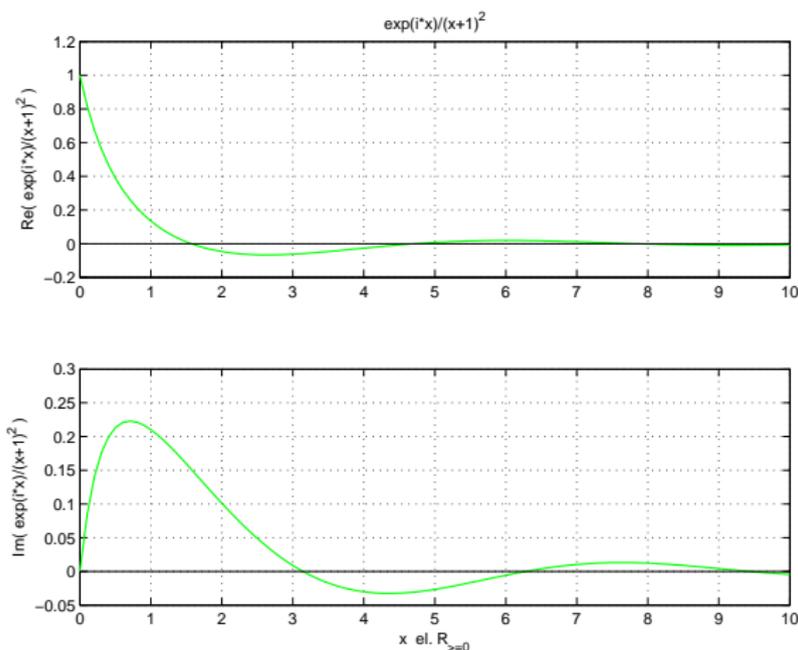


Abbildung: Ursprünglicher Integrand

Der Integrand nach der Transformation

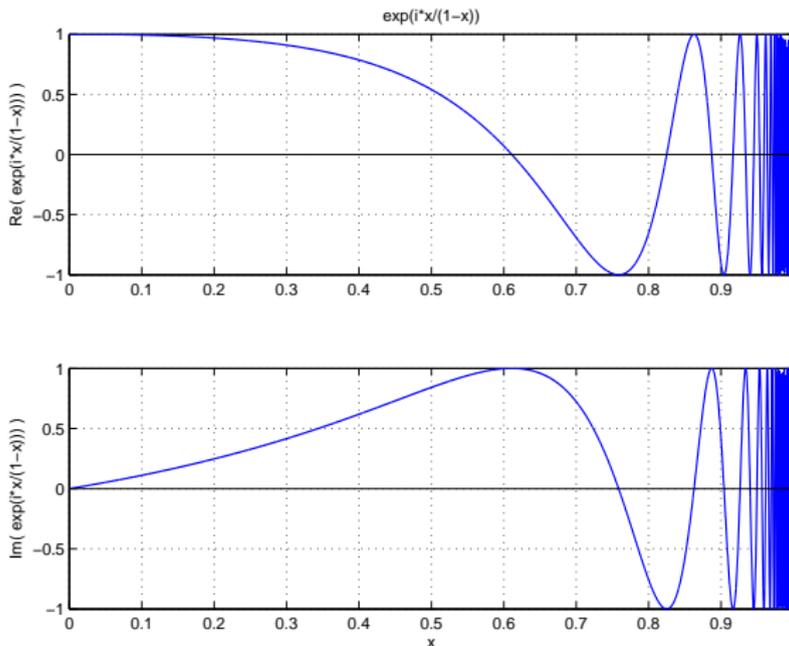


Abbildung: Integrand nach Transformation

Wahl der Basisfunktionen

Wie in Beispiel 1 werden Monome als Basisfunktionen $\{u_k\}_{k=1}^n$ gewählt:

$$u_k(x) := x^{k-1} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Die Stützstellen (collocation points) $\{x_j\}_{j=1}^n$ werden äquidistant zwischen $0 = x_1$ und $1 = x_n$ gesetzt.

Löse lineares Gleichungssystem

Das zu lösende lineare Gleichungssystem mit $p_n(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k(x)$ lautet:

$$p_n'(x_j) + iq'(x_j) \cdot p_n(x_j) = f(x_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

\iff

$$p_n'(x_j) + i \cdot \frac{1}{(1-x_j)^2} \cdot p_n(x_j) = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Um numerische Probleme bei $x_n = 1$ zu verhindern, wird Gleichung (5) wie folgt umgeschrieben:

$$(1-x_j)^2 \cdot p_n'(x_j) + i \cdot p_n(x_j) = (1-x_j)^2 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Lösung der DGL

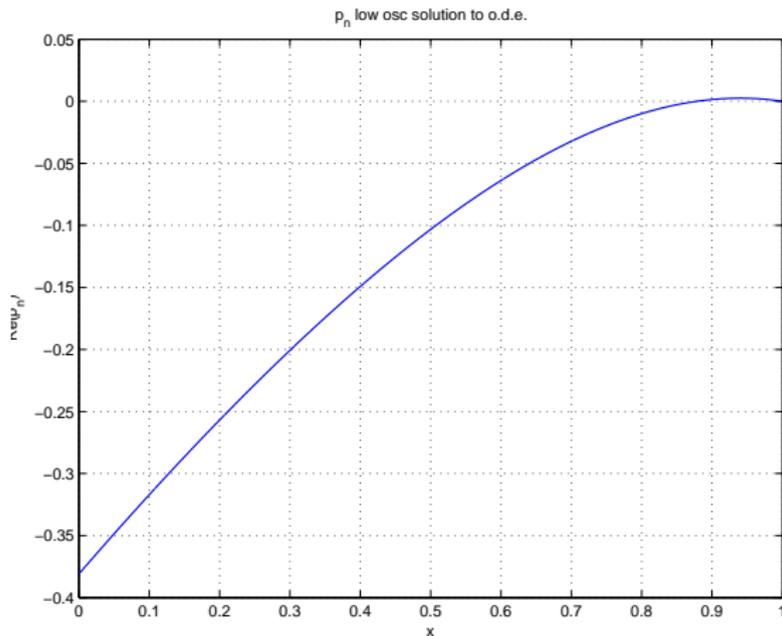


Abbildung: $\mathfrak{R}(p_n)$: collocation solution

Berechne I_n

$$I_n = p_n(b) \cdot e^{iq(b)} - p_n(a) \cdot e^{iq(a)}$$

$$\iff$$

$$I_n = \lim_{x \rightarrow 1} \left(p_n(x) \cdot e^{i \frac{x}{1-x}} \right) - p_n(0) \cdot e^{iq(0)}$$

$$\iff$$

$$I_n = 0 - p_n(0)$$

Ergebnis:

$$I_5 = 0.3809 + 0.3442i$$

$$I \approx 0.3786 + 0.3434i$$

Fehleranalyse: n-Konvergenz

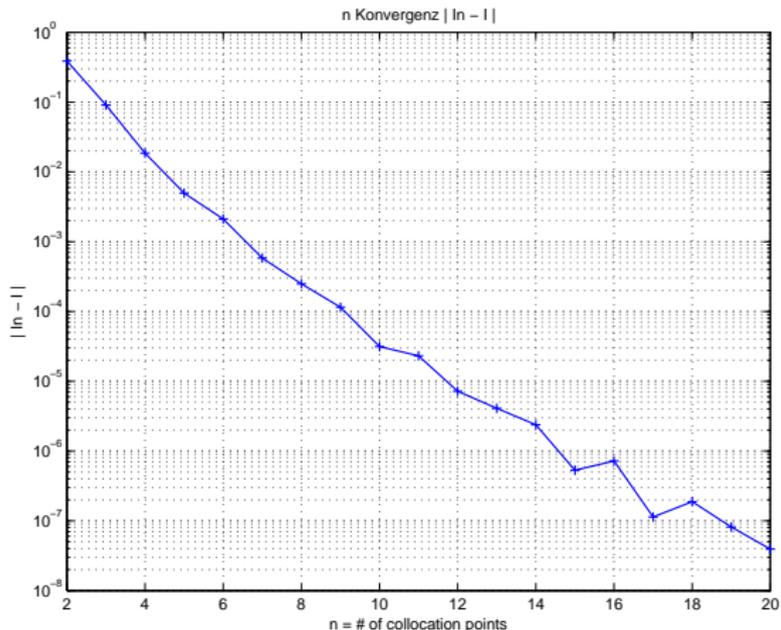


Abbildung: relativer Fehler

Eindimensionale Integrale in verallgemeinerter Form

Wir betrachten nun Integrale der verallgemeinerten Form:

$$I = \int_a^b \langle f, w \rangle (x) dx \quad (6)$$

wobei: $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ ein m -Vektor schwach oszillierender Funktionen und $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ ein m -Vektor stark oszillierender, linear unabhängiger Funktionen.

Ferner sollen $\{w_k\}_{k=1}^m$ ein System von Differentialgleichungen erfüllen:

$$w' = A \cdot w \quad (7)$$

wobei $A = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ eine $m \times m$ Matrix schwach oszillierender Funktionen h_{ij} ist.

DGL-System für p

Gesucht ist ein Vektor p mit m Funktionen $p = (p_1, \dots, p_m)^T$ so dass gilt:

$$\langle f, w \rangle = \langle p, w \rangle' \quad (8)$$

denn gilt Gleichung (8), so ist das Integral leicht auszuwerten:

$$I = \int_a^b \langle f, w \rangle(x) dx = \int_a^b \langle p, w \rangle'(x) dx = \langle p, w \rangle(x) \Big|_a^b$$

Unter welchen Bedingungen an p gilt Gleichung (8) ?

Durch Umformen und unter Ausnutzung von $w' = Aw$ erhält man:

DGL-System für p

$$p' + A^T \cdot p = f$$

DGL-System für p

Gesucht ist ein Vektor p mit m Funktionen $p = (p_1, \dots, p_m)^T$ so dass gilt:

$$\langle f, w \rangle = \langle p, w \rangle' \quad (8)$$

denn gilt Gleichung (8), so ist das Integral leicht auszuwerten:

$$I = \int_a^b \langle f, w \rangle(x) dx = \int_a^b \langle p, w \rangle'(x) dx = \langle p, w \rangle(x) \Big|_a^b$$

Unter welchen Bedingungen an p gilt Gleichung (8) ?

Durch Umformen und unter Ausnutzung von $w' = Aw$ erhält man:

DGL-System für p

$$p' + A^T \cdot p = f$$

Numerische Lösung des DGL-Systems

Für die Lösung p des DGL-Systems wird eine “n-point collocation approximation“ definiert als:

$$p^{(n)}(x) := \left(p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)} \right)^T$$

wobei:

$$p_i^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(i)} u_k^{(i)}(x), \quad i = 1 \dots m$$

Für festes $i \in \{1 \dots m\}$ sind:

$\left\{ u_k^{(i)} \right\}_{k=1}^n$ linear unabhängige, schwach oszillierende
Basisfunktionen auf $[a, b]$.

Numerische Lösung des DGL-Systems

Die Koeffizienten $\left(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}, \dots, \alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_n^{(m)}\right)$ sind durch die folgende Bedingung bestimmt:

$$p^{(n)} + A^T \cdot p^{(n)} = f$$

$$\iff$$

$$\begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_m^{(n)} \end{pmatrix} + A^T \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ \vdots \\ p_m^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

Erinnerung:

$$p_i^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(i)} u_k^{(i)}(x), \quad i = 1 \dots m$$

Berechnung von I_n

Das zu berechnende Integral lautet:

$$I = \int_a^b \langle f, w \rangle (x) dx$$

Die Approximation I_n zu I errechnet sich wie folgt:

$$I_n = \langle p_n, w \rangle (b) - \langle p_n, w \rangle (a)$$

Besselfunktionen 1. Grades

Die Besselfunktion J_ν erfüllt die folgenden rekursiven Relationen:

$$J'_{\nu-1}(x) = \frac{\nu-1}{x} J_{\nu-1}(x) - J_\nu(x) \quad (9)$$

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \quad (10)$$

Besselfunktionen J_0 , J_1 und J_2

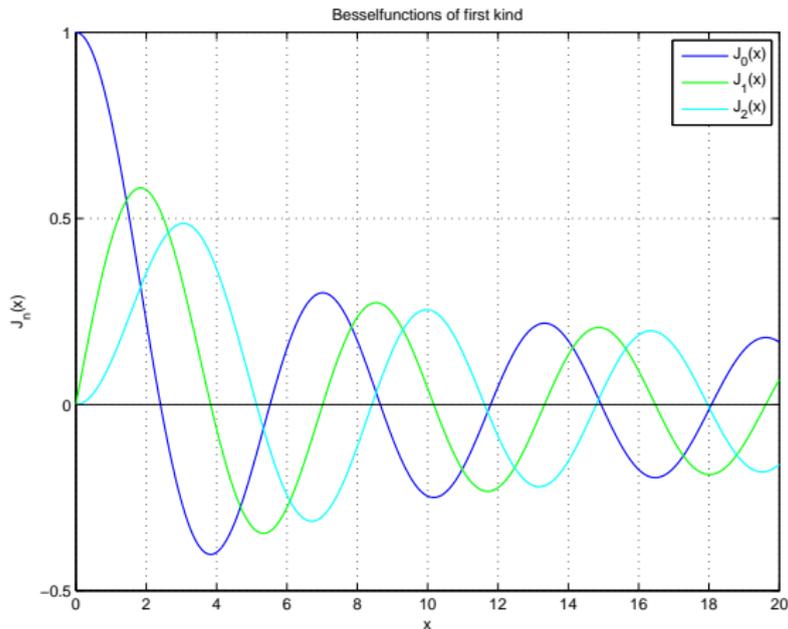


Abbildung: Besselfunktionen

Beispiel 3: Integral mit Besselfunktion

Beispiel 3:

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x^2 + 1} \cdot J_0(\omega x) dx$$

Das Integral lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$I = \int_1^2 \langle f, w \rangle (x) dx$$

mit:

$$f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w(x) = \begin{pmatrix} J_0(\omega x) \\ J_1(\omega x) \end{pmatrix}$$

Die Zusatzbedingung an w

$w = \begin{pmatrix} J_0(\omega x) \\ J_1(\omega x) \end{pmatrix}$ erfüllt die geforderte Bedingung:

$$w' = A \cdot w$$

mit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

denn:

$$w'(x) = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} J_0(\omega x) \\ J_1(\omega x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \cdot J_1(\omega x) \\ \omega \cdot J_0(\omega x) - \frac{1}{x} \cdot J_1(\omega x) \end{pmatrix}$$

Der Integrand für $\omega = 10$

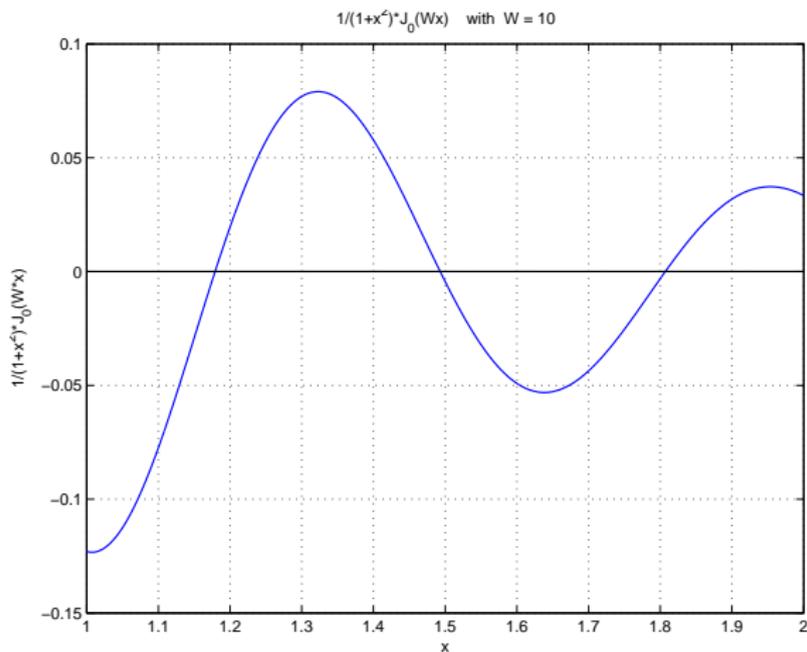


Abbildung: Integrand für $\omega = 10$

Der Integrand für $\omega = 100$

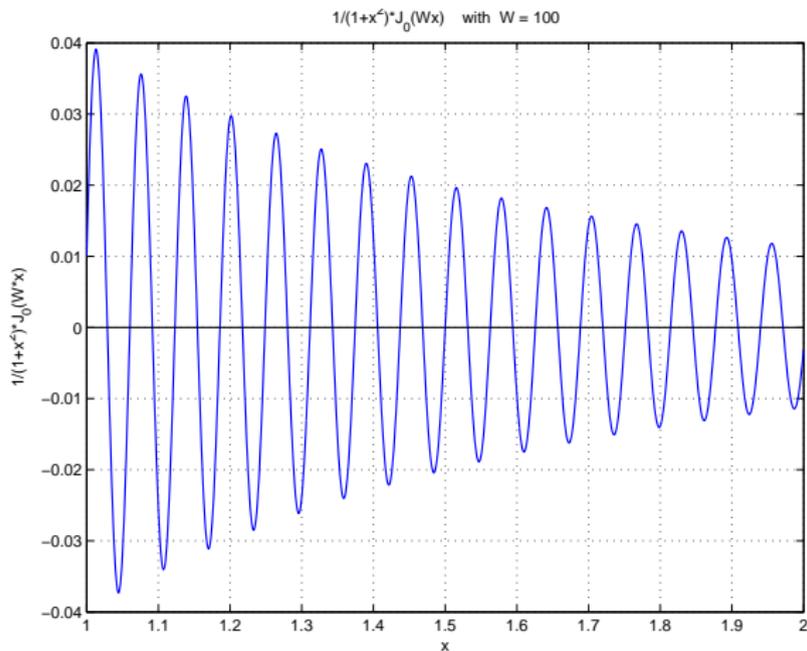


Abbildung: Integrand für $\omega = 100$

Wahl der Basisfunktionen

Als Basisfunktionen werden Polynome folgender Form verwendet:

$$u_k^{(i)}(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{k-1} \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, 2$$

Die Stützstellen x_1, \dots, x_n werden äquidistant in $[a, b]$ verteilt mit $x_1 = a$ und $x_n = b$

Löse lineares Gleichungssystem

Das nach $(\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)})$ zu lösende lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \end{pmatrix} + A^T \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

\iff

$$\begin{pmatrix} p_1^{(n)}(x_j) \\ p_2^{(n)}(x_j) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & -\frac{1}{x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{(n)}(x_j) \\ p_2^{(n)}(x_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_j^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1 \dots n$$

wobei:

$$p_i^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(i)} u_k^{(i)}(x), \quad i = 1, 2$$

Lösung der ersten DGL

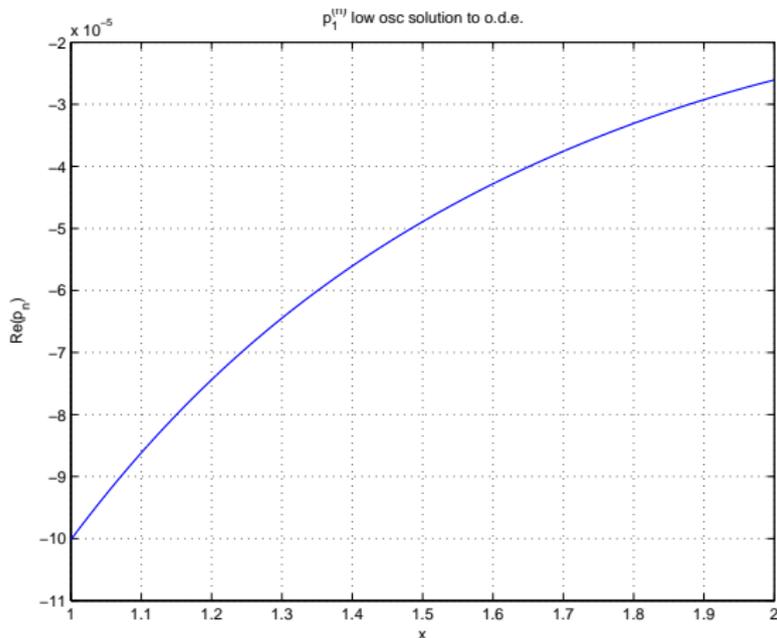


Abbildung: $\Re(p_1^{(n)})$: collocation solution

Lösung der zweiten DGL

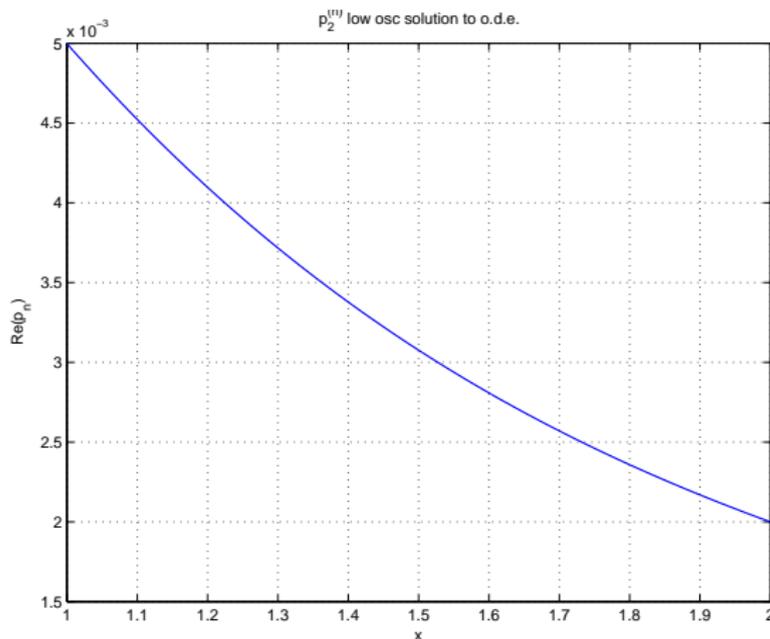


Abbildung: $\Re(p_2^{(n)})$: collocation solution

Berechnung von I_n

Das zu berechnende Integral war:

$$I = \int_1^2 \langle f, w \rangle(x) dx \quad \text{mit : } f(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w(x) = \begin{pmatrix} J_0(\omega x) \\ J_1(\omega x) \end{pmatrix}$$

Die Approximation I_n zu I errechnet sich wie folgt:

$$I_n = \langle p_n, w \rangle(2) - \langle p_n, w \rangle(1)$$

Fehleranalyse: n-Konvergenz

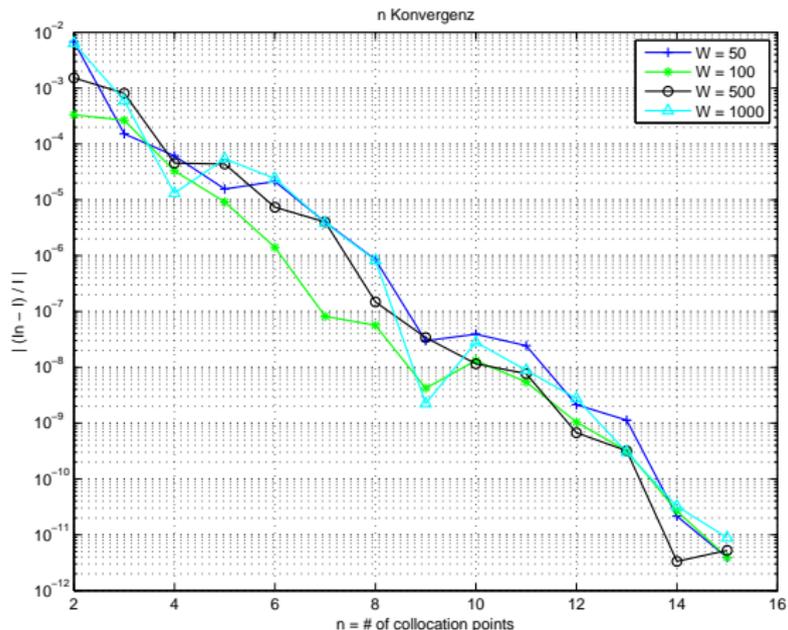


Abbildung: relativer Fehler

Fehleranalyse: ω -Konvergenz

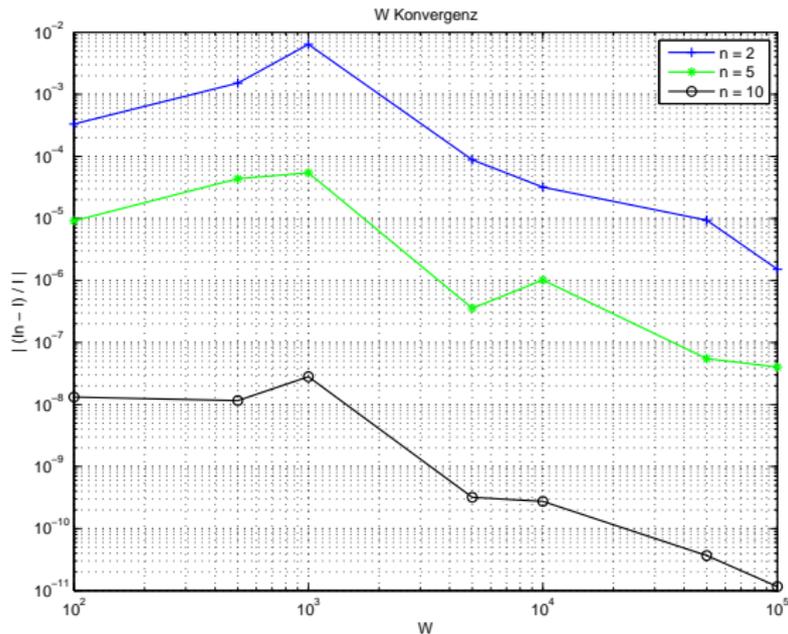


Abbildung: relativer Fehler, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)$ ($\omega \rightarrow \infty$)

Fehleranalyse: ω -Konvergenz

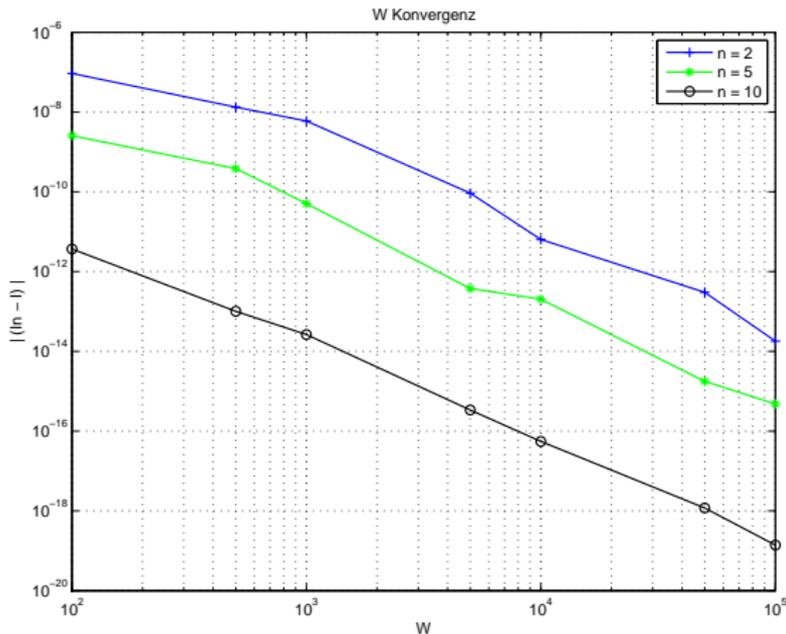


Abbildung: absoluter Fehler, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$ ($\omega \rightarrow \infty$)

Erweiterung auf mehrdimensionalen Fall

Betrachten wir die Erweiterung auf den zweidimensionalen Fall, also Integrale der Form:

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \cdot e^{iq(x,y)} dx dy$$

Die Methode lässt sich danach analog auf k -dimensionale Integrale erweitern. ($k \geq 3$)

DGL für p im zweidimensionalen Fall

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \cdot e^{iq(x,y)} dx dy$$

Wäre f von der Form:

DGL für p

$$f = p_{xy} + iq_x p_y + iq_y p_x + (iq_{xy} - q_x q_y) p$$

dann ist:

$p(x, y)e^{iq(x,y)}$ eine Stammfunktion von $f(x, y)e^{iq(x,y)}$ und die Berechnung von I ergibt sich zu:

$$I = \left(p(d, b)e^{iq(d,b)} - p(d, a)e^{iq(d,a)} \right) - \left(p(c, b)e^{iq(c,b)} - p(c, a)e^{iq(c,a)} \right)$$

Numerische Lösung der DGL

Auf dem Gebiet $[a, b] \times [c, d]$ wird ein $n \times m$ Gitter mit Stützstellen definiert:

$$\{(x_i, y_j)\}_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}}$$

Die Lösung p der DGL wird durch p_{nm} approximiert:

$$p_{nm}(x, y) = \sum_{k=1}^{n \cdot m} \alpha_k u_k(x, y)$$

wobei $\{u_k\}_{k=1}^{n \cdot m}$ schwach oszillierende Basisfunktionen sind.

Löse lineares Gleichungssystem

Definiere:

$$L^{(2)}p := p_{xy} + iq_x p_y + iq_y p_x + (iq_{xy} - q_x q_y)p$$

dann lautet die zu erfüllende DGL: $L^{(2)}p = f$.

Die Koeffizienten $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n \cdot m}$ sind bestimmt durch:

$$L^{(2)} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n \cdot m} \alpha_k u_k \right]}_{p_{nm}}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$$

Berechnung von I_n

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \cdot e^{iq(x,y)} dx dy$$

Berechne I_{nm} als Approximation für I :

$$I_{nm} = \left(p_{nm}(d, b) e^{iq(d,b)} - p_{nm}(d, a) e^{iq(d,a)} \right) \\ - \left(p_{nm}(c, b) e^{iq(c,b)} - p_{nm}(c, a) e^{iq(c,a)} \right)$$

mit:

$$p_{nm}(x, y) = \sum_{k=1}^{n \cdot m} \alpha_k u_k(x, y)$$

Beispiel 4: Ein zweidimensionales Integral

Sei: $f(x, y) = \cos(x + y)$, $q(x, y) = \omega [(x + y + (x^2 + y^2))]$,
 $a = c = 0$, $b = d = 1$ also:

Beispiel 4

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cos(x + y) e^{i\omega [x+y+(x^2+y^2)]} dx dy$$

Der Integrand für $\omega = 5$

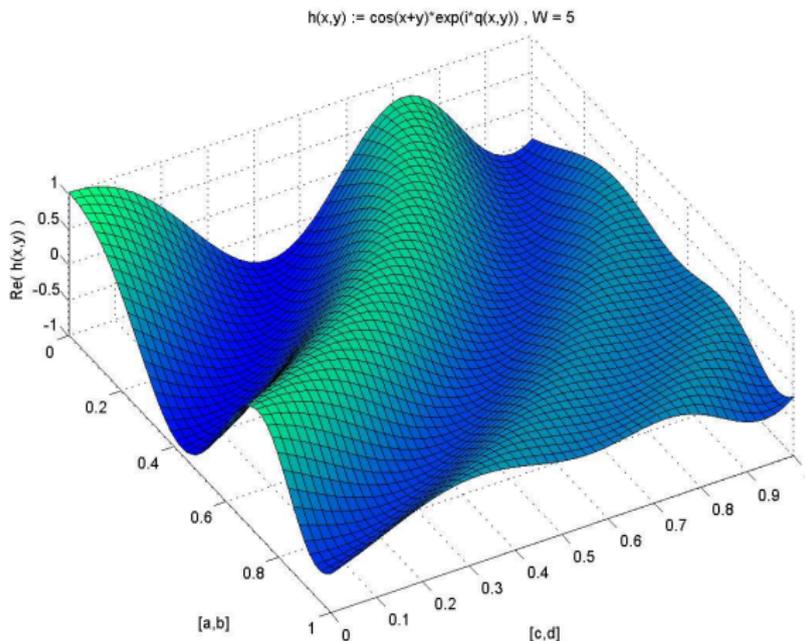


Abbildung: Der Integrand mit $\omega = 5$

Der Integrand für $\omega = 20$

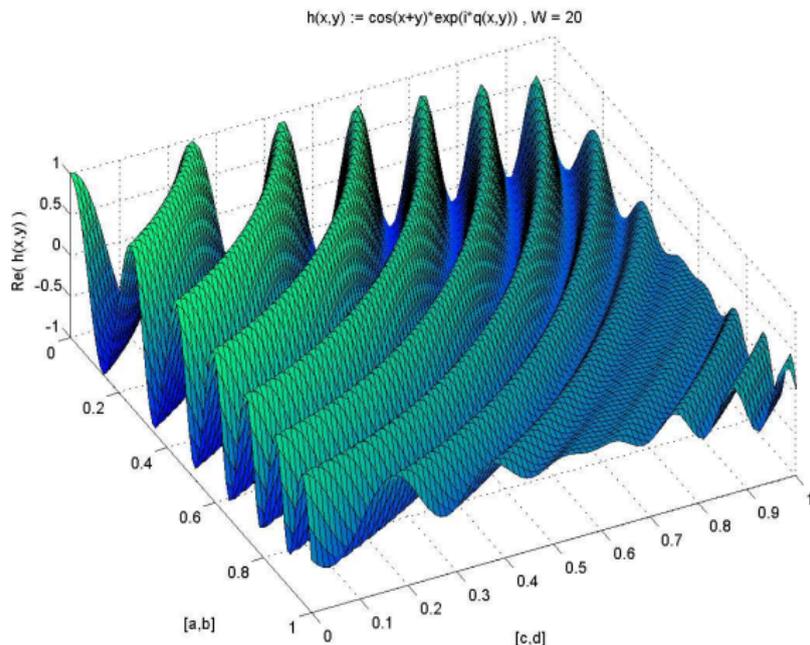


Abbildung: Der Integrand mit $\omega = 20$

Wahl der Basisfunktionen

Auf dem Gebiet $[0, 1] \times [0, 1]$ wird ein quadratisches Gitter mit n^2 Stützstellen gelegt:

$$\left\{ (x_i, y_j) = \left(\frac{i-1}{n-1}, \frac{j-1}{n-1} \right) \mid 1 \leq i, j \leq n \right\}$$

Die Lösung p der DGL wird durch p_{n^2} approximiert:

$$p_{n^2}(x, y) = \sum_{k=1}^{n^2} \alpha_k u_k(x, y)$$

wobei als Basisfunktionen wieder Monome verwendet werden:

$$\{u_k\}_{k=1}^{n^2} = \{(x, y) \mapsto x^i \cdot y^j \mid 0 \leq i, j \leq n-1\}$$

Löse lineares Gleichungssystem

$$L^{(2)}p := p_{xy} + iq_x p_y + iq_y p_x + (iq_{xy} - q_x q_y)p$$

Löse folgendes lineares Gleichungssystem nach $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n^2}$:

$$L^{(2)} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n \cdot m} \alpha_k u_k \right]}_{p_{nm}}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad i = 1 \dots n, j = 1 \dots n \quad (11)$$

Gleichungssystem (11) ist von Ordnung n^2 .

Lösung der DGL

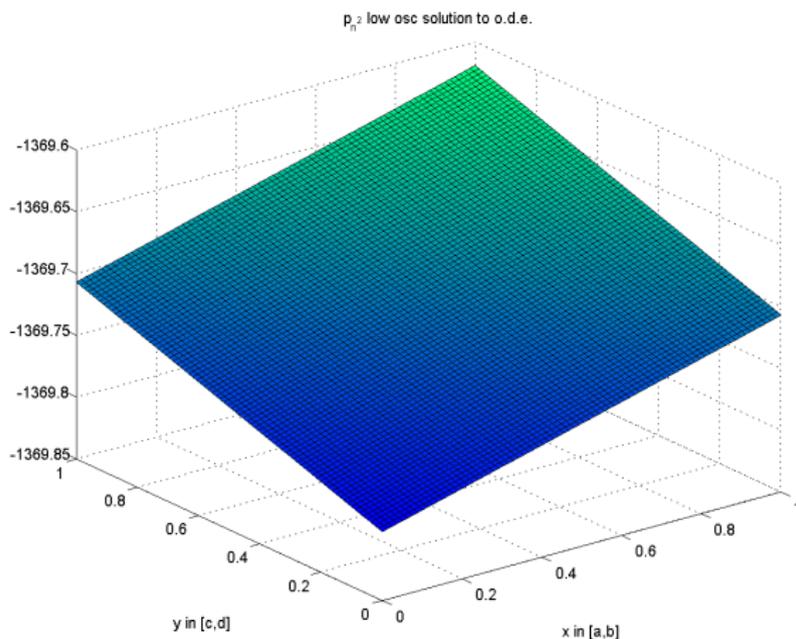


Abbildung: $\mathcal{R}(p_{n^2})$: collocation solution

Berechnung von I_n

Berechne I_{n^2} als Approximation für I :

$$I_{n^2} = \left(p_{n^2}(d, b)e^{iq(d,b)} - p_{n^2}(d, a)e^{iq(d,a)} \right) \\ - \left(p_{n^2}(c, b)e^{iq(c,b)} - p_{n^2}(c, a)e^{iq(c,a)} \right)$$

mit:

$$p_{n^2}(x, y) = \sum_{k=1}^{n^2} \alpha_k u_k(x, y)$$

mit 3 Stützstellen pro Gitterseite ergibt:

$$I_{3^2} = I_9 = -8.572 \cdot 10^{-5} - 3.305 \cdot 10^{-5}i \quad (\omega = 100)$$

Fehleranalyse: n-Konvergenz

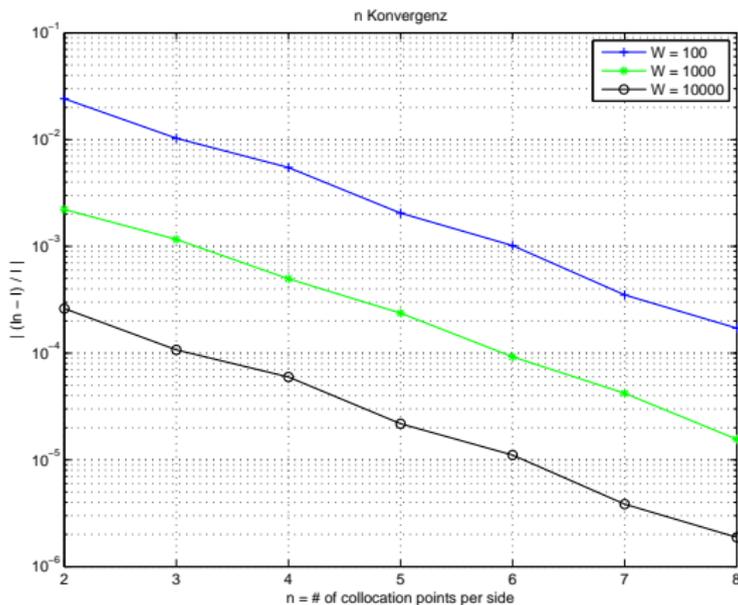


Abbildung: relativer Fehler

Fehleranalyse: ω -Konvergenz

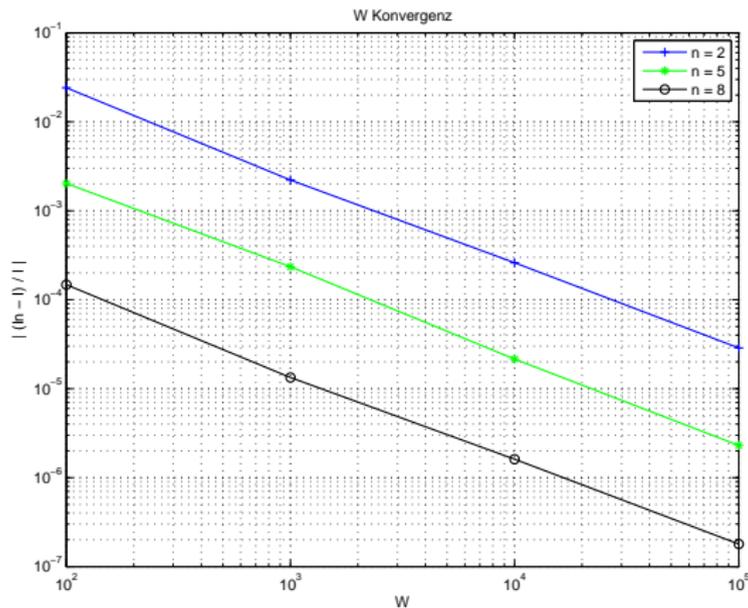


Abbildung: relativer Fehler, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right)$ ($\omega \rightarrow \infty$)

Fehleranalyse: ω -Konvergenz

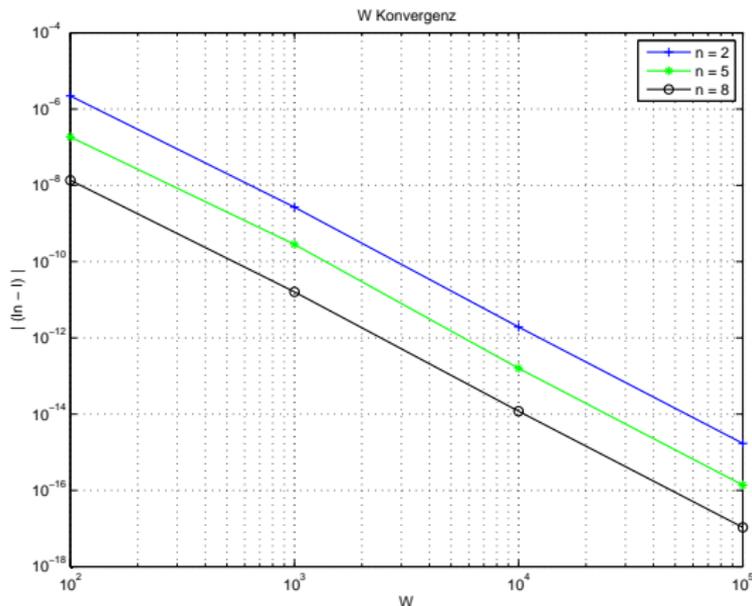


Abbildung: absoluter Fehler, $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^3}\right)$ ($\omega \rightarrow \infty$)

Abschliessende Gedanken

Die Levin-Type Methode ist eine effiziente Methode zur numerischen Auswertung von Integralen der Form:

- $\int_a^b f(x) e^{i\omega q(x)} dx$

- $\int_a^b \langle f, w \rangle dx$

Sie lässt sich sehr leicht erweitern auf mehrdimensionale Integrale der Form:

- $\int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) e^{i\omega q(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n$