Proseminar: Asymptotische und Filon Type Methode

Timon Stucki

01.12.2008

Themenübersicht

1. Einleitung und Grundideeen
2. Asymptotische Methode und verallgemeinerte Filon Methode
   - Die Asymptotische Methode
   - Verallgemeinerte Filon Methode
   - Beispiel
3. Erweiterung der Asymptotischen und Filon Methode
   - Stationäre Punkte
   - Erweiterung der Asymptotische Methode
   - Die Erweiterung der verallgemeinerten Filon Methode
   - Beispiel
4. Adaptive Filon Methode
   - Adaptive Filon Methode
   - Beispiel

Integrale mit stark oszillierenden Integranden

Betrachtung von drei Quadraturmethoden für stark osziliernede Integralen der Form:

$$I[f] = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)}\, dx$$

- Asymtotische Methode
- Verallgemeinerte Filon Methode
- Adaptive Filon Methode

Einschränkung an g

Als erstes werden Integrale mit Funktionen g ohne stationäre Punkte betrachtet, d.h.

$$g'(x) \neq 0, \qquad x \in [a, b].$$

Asymptotische Entwicklung des Integrals

Lemma 1

Seien f und g glatte Funktion, $g'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$ und sei

$$\sigma_0[f](x) = f(x),$$
$$\sigma_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx}\frac{\sigma_k[f](x)}{g'(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

dann gilt für $\omega \to \infty$,

$$I[f] \sim -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)}\sigma_{m-1}[f](b) - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)}\sigma_{m-1}[f](a) \right)$$

Asymptotische Methode

Aus Lemma 1 folgt:

Definition: Asymptotische Methode

$$Q_s^A[f] = -\sum_{m=1}^{s} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \sigma_{m-1}[f](b) - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \sigma_{m-1}[f](a) \right)$$

Vorausgesetzt wurde $g'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$.

Fehleranalyse der asymptotischen Methode

Theorem 1

Für jede glatte Funktion f und g gilt

$$Q_s^A[f] - I[f] \sim O(\omega^{-s-1}), \qquad \omega \to \infty.$$

Weniger starke Forderung and f und g

Falls f und g keine glatten Funktionen sind kann das Lemma 1 auch für $f, g \in C^s([a,b])$ bewiesen werden.

Dann gilt:

$$\sigma_0[f](x) = f(x),$$
$$\sigma_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx}\frac{\sigma_k[f](x)}{g'(x)}, k = 0, 1, \ldots, s$$

Die Filon Methode (1928)

Die Idee der Filon Methode:
Interpolation von f an den Punkten $c_1, \ldots, c_\nu$ mit dem Polynom $\tilde{f}$.

Gemäss Lagrange-Interpolation gilt $\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\nu} l_k(x) f(c_k)$.

Daraus ergiebt sich die Filon Methode:

$$Q_1^F[f] = \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{i\omega g(x)}\, dx = \sum_{k=1}^{\nu} b_k(\omega) f(c_k)$$

Dabei ist $b_k(\omega) = \int_0^1 l_k(x) e^{i\omega g(x)}\, dx$ mit den Lagrange-polynomen l_k.

Das Hermite-Interpolationspolynom

Idee: Hermite-Interpolation anstelle der Lagrage-Interpolation.

Seien

$$a = c_1 < c_2 < \cdots < c_{\nu-1} < c_\nu = b, \qquad \nu \geq 2$$

Stützstellen in $[a, b]$ mit den Vielfachheiten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu \in \mathbb{N}$.

Das Hermite Interpolationspolynom $\tilde{f}$ zu f ist eindeutig und vom Grad $n - 1$, wobei $n = \sum_{k=1}^{\nu} \theta_l$.

$\tilde{f}$ erfüllt die Interpolationsbedingungen

$$\tilde{f}^{(j)}(c_k) = f^{(j)}(c_k), \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, \nu \\ j = 0, 1, \ldots, \theta_k - 1 \end{matrix}$$

Das Hermite-Interpolationspolynom

Hermite-Interpolationspolynom

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{\theta_k - 1} \alpha_{k,j}(x) f^{(j)}(c_k)$$

$\alpha_{k,j}$ ist ein Polynom vom Grad $n-1$, welches die Bedingung

$$\alpha_{k,j}^{(i)}(c_m) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = m \text{ und } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt.

Konstruktion der verallgemeinerten Filon Methode

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{f}(x)e^{i\omega g(x)}\,dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\theta_k-1}\alpha_{k,j}(x)f^{(j)}(c_k)\right)e^{i\omega g(x)}\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\theta_k-1}\left(\int_a^b \alpha_{k,j}(x)e^{i\omega g(x)}\,dx\right)f^{(j)}(c_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\theta_k-1} b_{k,j}(\omega)f^{(j)}(c_k)\end{aligned}$$

Verallgemeinerte Filon Methode

Setze $s = min\{\theta_1, \theta_\nu\}$ und sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in [a, b]$.

Definition: Verallgemeinerte Filon Methode

$$Q_s^F[f] = \int_a^b \tilde{f}(x) e^{i\omega g(x)}\, dx = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{\theta_k - 1} b_{k,j}(\omega) f^{(j)}(c_k)$$

Dabei ist $b_{k,j}(\omega) = \int_a^b \alpha_{k,j}(x) e^{i\omega g(x)}\, dx$.
Bemerkung: Die Momente

$$\mu_k(\omega) = \int_a^b x^k e^{i\omega g(x)}\, dx$$

müssen für die verallgemeinerte Filon Methode berechnet werden.

Fehleranalyse der verallgemeinerten Filon Methode

Theorem 2

Sei $s = min\{\theta_1, \theta_\nu\}$. Für jede glatte Funktion f und g gilt

$$Q_s^F[f] - I[f] \sim O(\omega^{-s-1}), \qquad \omega \to \infty.$$

Zum Vergleich die Filon Methode: (Iserles, 2003a)

$$Q_1^F[f] - I[f] \sim O(\omega^{-2}) \qquad \text{falls } c_1 = 0,\ c_\nu = 1, \qquad \omega \to \infty$$

Beispiel 1

Sei $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = x$ und $a = 0$, $b = 1$.

$$I[f] = \int_0^1 \cos(x) e^{i\omega x}\, dx$$

Für die verallgemeinerte Filon Methode wählen wir:
$\nu = 2, c_1 = 0, c_2 = 1, \theta_1 = \theta_2 = 2$

Wähle $s = min\{\theta_1, \theta_2\} = 2$, dann wird ein $O(\omega^{-3})$ erwartet.

$\Longrightarrow$ Wir bestimmen $Q_2^A[f]$ und $Q_2^F[f]$.

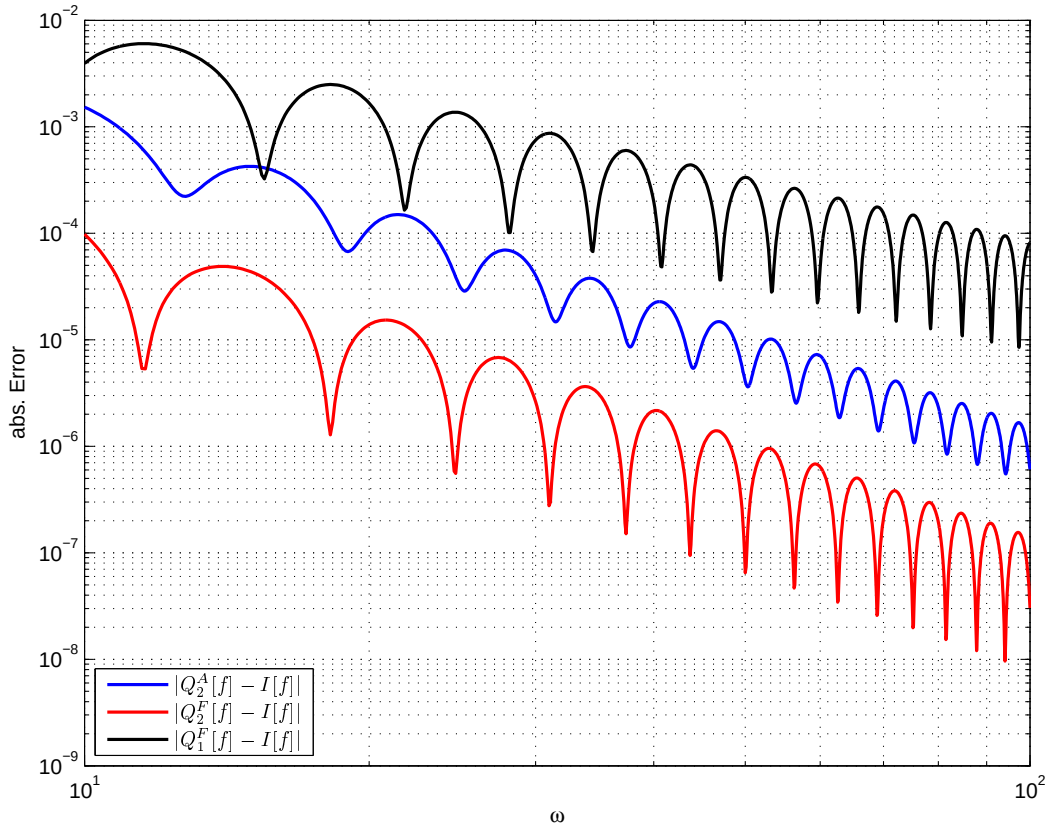
Beispiel 1: Quadraturformeln

$$Q_2^A[f] = \frac{e^{i\omega}f(1) - f(0)}{i\omega} + \frac{e^{i\omega}f'(1) - f'(0)}{\omega^2}$$

$$\begin{aligned} Q_2^F[f] = &\left(-\frac{1}{i\omega} - 6\frac{1+e^{i\omega}}{i\omega^3} + 12\frac{1-e^{i\omega}}{\omega^4}\right) f(0) \\ &+ \left(\frac{e^{i\omega}}{i\omega} + 6\frac{1+e^{i\omega}}{i\omega^3} - 12\frac{1-e^{i\omega}}{\omega^4}\right) f(1) \\ &+ \left(-\frac{1}{\omega^2} - 2\frac{2+e^{i\omega}}{i\omega^3} + 6\frac{1-e^{i\omega}}{\omega^4}\right) f'(0) \\ &+ \left(\frac{e^{i\omega}}{\omega^2} - 2\frac{1+2e^{i\omega}}{i\omega^3} + 6\frac{1-e^{i\omega}}{\omega^4}\right) f'(1) \end{aligned}$$

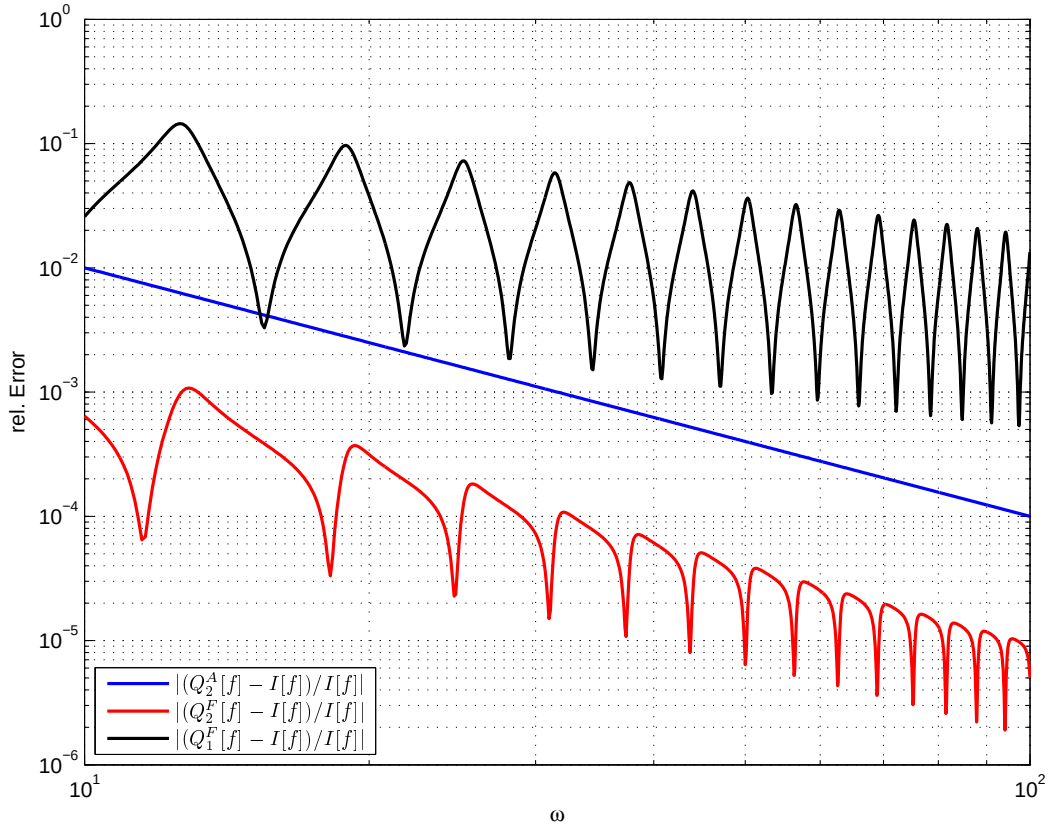
$$Q_1^F[f] = \left(-\frac{1}{i\omega} + \frac{1-e^{i\omega}}{\omega^2}\right) f(0) + \left(\frac{e^{i\omega}}{i\omega} - \frac{1-e^{i\omega}}{\omega^2}\right) f(1)$$

Beispiel 1: Absoluter Fehler $|Q[f] - I[f]|$



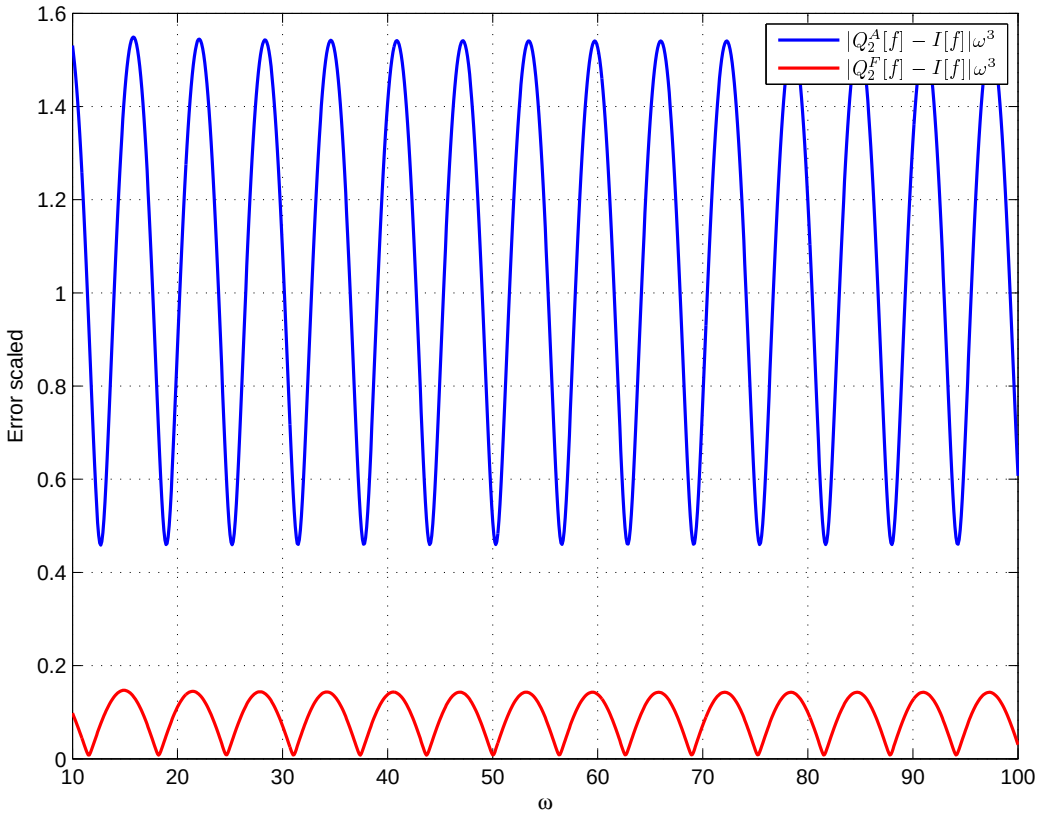
$$|Q_1^F[f] - I[f]| \sim O(\omega^{-2})$$
$$|Q_2^A[f] - I[f]| \sim O(\omega^{-3})$$
$$|Q_2^F[f] - I[f]| \sim O(\omega^{-3})$$

Beispiel 1: Relativer Fehler $|(Q[f] - I[f])/I[f]|$



$$\left|\frac{Q_1^F[f]-I[f]}{I[f]}\right| \sim O(\omega^{-1})$$
$$\left|\frac{Q_2^A[f]-I[f]}{I[f]}\right| \sim O(\omega^{-2})$$
$$\left|\frac{Q_2^F[f]-I[f]}{I[f]}\right| \sim O(\omega^{-2})$$

Beispiel 1: Skalierter Fehler $|Q[f] - I[f]|\omega^3$



$$|Q_2^A[f] - I[f]| \sim O(\omega^{-3})$$
$$|Q_2^F[f] - I[f]| \sim O(\omega^{-3})$$

Funktion g mit stationären Punkten

Die besprochenen Methoden können auf Funktionen g mit stationären Punkten erweitert werden.

Zum Beispiel

$$g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad \text{mit stationärem Punkt } x = \frac{1}{2}.$$

Funktion g mit stationären Punkten

Seien f und g glatte Funktionen und sei $\xi \in (a, b)$ so dass

$$g'(\xi) = 0, \; g''(\xi) \neq 0$$

und

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{\xi\}.$$

- Bei mehreren stationären Punkten wird das Integrationsintervall aufgeteilt.
- Die Methoden sind erweiterbar für stationäre Punkte höherer Ordnung.

Asymptotische Entwicklung mit stationärem Punkt ξ von g

Sei $g'(\xi) = 0,\ g''(\xi) \neq 0.$
Es gilt:

$$I[f] = \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)}\,dx = \int_a^b \left(f(x) - f(\xi) + f(\xi)\right) e^{i\omega g(x)}\,dx$$

$$= f(\xi)\int_a^b e^{i\omega g(x)}\,dx + \int_a^b (f(x) - f(\xi))e^{i\omega g(x)}\,dx$$

$$= f(\xi)\int_a^b e^{i\omega g(x)}\,dx + \frac{1}{i\omega}\int_a^b \frac{f(x) - f(\xi)}{g'(x)}\frac{d}{dx}e^{i\omega g(x)}\,dx$$

$$= f(\xi)I[1] + I[f - f(\xi)]$$

Asymptotische Entwicklung mit stationärem Punkt ξ von g

Mit dem *Satz von de l'Hospital* und $g'(\xi) = 0,\ g''(\xi) \neq 0$ folgt

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{g'(x)} = \lim_{x \to \xi} \frac{f'(x)}{g''(x)},$$

d.h. die Singularität von $I[f - f(x)]$ ist hebbar und

$$I[f] = f(\xi) I[1] + I[f - f(\xi)] < \infty.$$

Asymptotische Methode mit stationärem Punkt ξ von g

Lemma 2

Seien f und g glatte Funktion, $g'(\xi) = 0,\ g''(\xi) \neq 0$ und sei

$$\rho_0[f](x) = f(x),$$
$$\rho_{k+1}[f](x) = \frac{d}{dx}\frac{\rho_k[f](x) - \rho_k[f](\xi)}{g'(x)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Asymptotische Methode mit stationärem Punkt ξ von g

Fortsetzung Lemma 2

dann gilt für $\omega \to \infty$,

$$I[f] \sim -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \left(\rho_{m-1}[f](b) - \rho_{m-1}[f](\xi)\right) - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \left(\rho_{m-1}[f](a) - \rho_{m-1}[f](\xi)\right) \right) + \mu_0(\omega, \xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m[f](\xi).$$

Asymptotische Methode mit stationärem Punkt ξ von g

Definition: Asymptotische Methode

$$Q_s^A[f] = -\sum_{m=1}^{s} \frac{1}{(-i\omega)^m} \left(\frac{e^{i\omega g(b)}}{g'(b)} \left(\rho_{m-1}[f](b) - \rho_{m-1}[f](\xi)\right) - \frac{e^{i\omega g(a)}}{g'(a)} \left(\rho_{m-1}[f](a) - \rho_{m-1}[f](\xi)\right) \right) + \mu_0(\omega, \xi) \sum_{m=0}^{s-1} \frac{1}{(-i\omega)^m} \rho_m[f](\xi)$$

Vorausgesetzt wurde ein stationärer Punkt ξ:
$g'(\xi) = 0,\ g''(\xi) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b) \setminus \{\xi\}$

Fehleranalyse

Theorem 3

Für jede glatte Funktion f und ξ ein stionärer Punkt $g'(\xi) = 0,\ g''(\xi) \neq 0$, dann gilt

$$Q_s^A[f] - I[f] \sim O(\omega^{-s-\frac{1}{2}}), \qquad \omega \to \infty.$$

Fehleranalyse

Beweis

Es gilt:

$$\mu_j(\omega, \xi) = O(\omega^{-(j+1)/2}), \quad j \geq 0, \quad \omega \to \infty$$

Damit folgt:

$$I[f] = Q_s^A[f] + \underbrace{\frac{1}{(-i\omega)^s}}_{O(\omega^{-s})} I[\rho_s[f]]$$

$$I[\rho_s[f]] = \underbrace{\mu_0(\omega, \xi)\rho_s[f](\xi)}_{O(\omega^{-1/2})} + \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{\rho_s[f](x) - \rho_s[f](\xi)}{g'(x)} \frac{d}{dx} e^{i\omega g(x)} \, dx$$

Verallgemeinerte Filon Methode mit stationärem Punkt

- Die stationären Punkte spielen eine ähnliche Rolle wie die Endpunkte des Integrals. (Iserles 2003b)
- Die stationären Punkte werden als Stützstellen verwendet.

Seien

$$a = c_1 < c_2 < \cdots < c_{\nu-1} < c_\nu = b, \qquad \nu \geq 3$$

Stützstellen in $[a, b]$ mit den Vielfachheiten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu \in \mathbb{N}$.

Zusätzlich wir nun gefordert, dass für den stationären Punkt ξ gilt

$$\exists q \in \{2, 3, \ldots, \nu - 1\} \ : \ c_q = \xi.$$

Verallgemeinerte Filon Methode mit stationären Punkten

Das Hermite Interpolationspolynom $\tilde{f}$ zu f ist eindeutig und vom Grad $n-1$, wobei $n = \sum_{k=1}^{\nu} \theta_l$.

$\tilde{f}$ erfüllt die Interpolationsbedingungen

$$\tilde{f}^{(j)}(c_k) = f^{(j)}(c_k), \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots, \nu \\ j = 0, 1, \ldots, \theta_k - 1 \end{matrix}$$

Definition: Verallgemeinerte Filon Methode

$$Q_s^F[f] = \int_a^b \tilde{f}(x) e^{i\omega g(x)}\, dx = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{\theta_k - 1} b_{k,j}(\omega) f^{(j)}(c_k)$$

Fehleranalyse

Theorem 4

Sei $s = min\{\theta_1, \theta_\nu\}$ und $\theta_q \geq 2s - 1$, dann gilt

$$Q_s^F[f] - I[f] \sim O(\omega^{-s-\frac{1}{2}}), \qquad \omega \to \infty.$$

Beispiel 2

Sei $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$, d.h. es gibt einen stationären Punkt $\xi = \frac{1}{2}$.

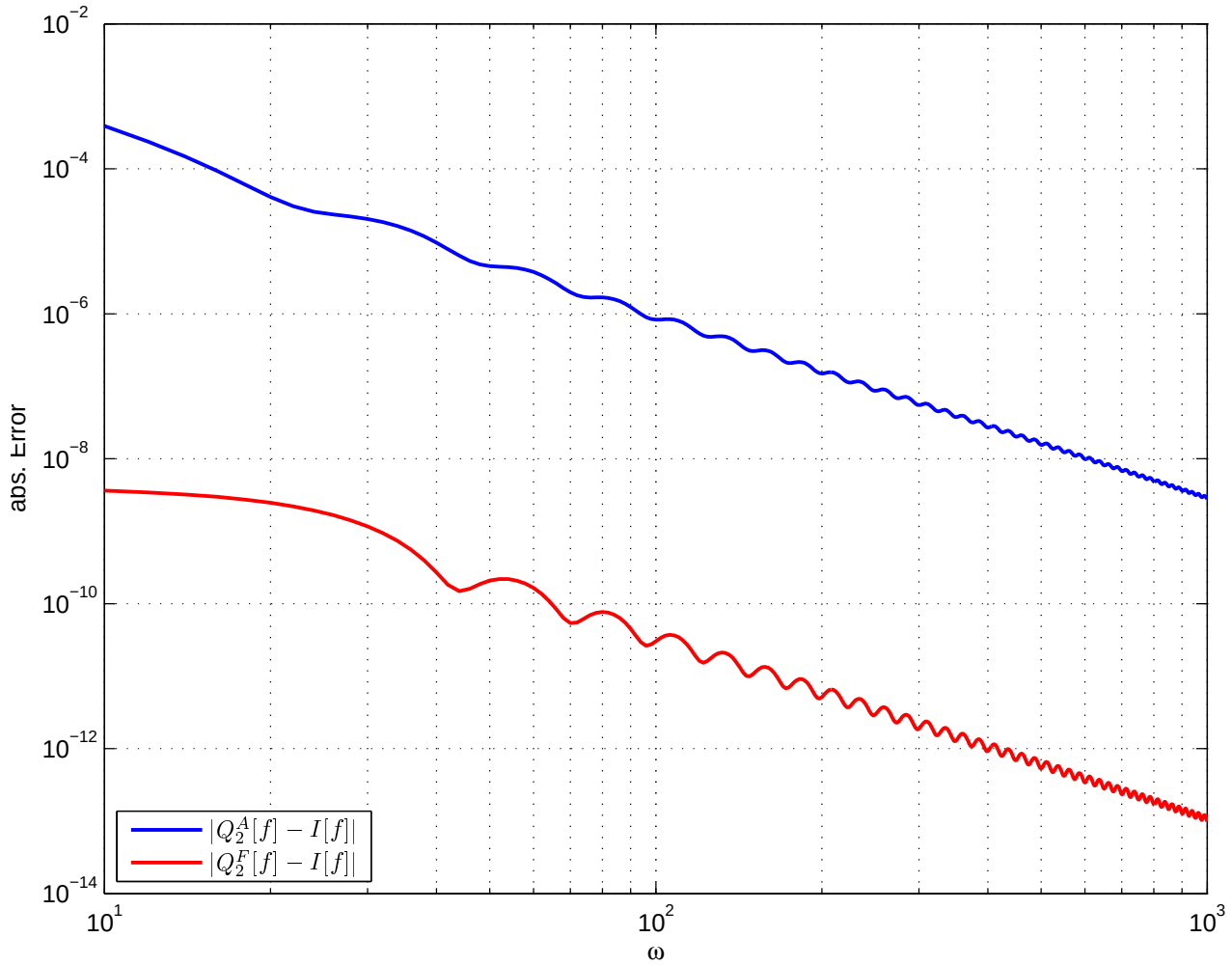
Sei $f(x) = e^x$, und $a = 0$, $b = 1$.

$$I[f] = \int_0^1 e^x e^{i\omega(x-\frac{1}{2})^2} \, dx$$

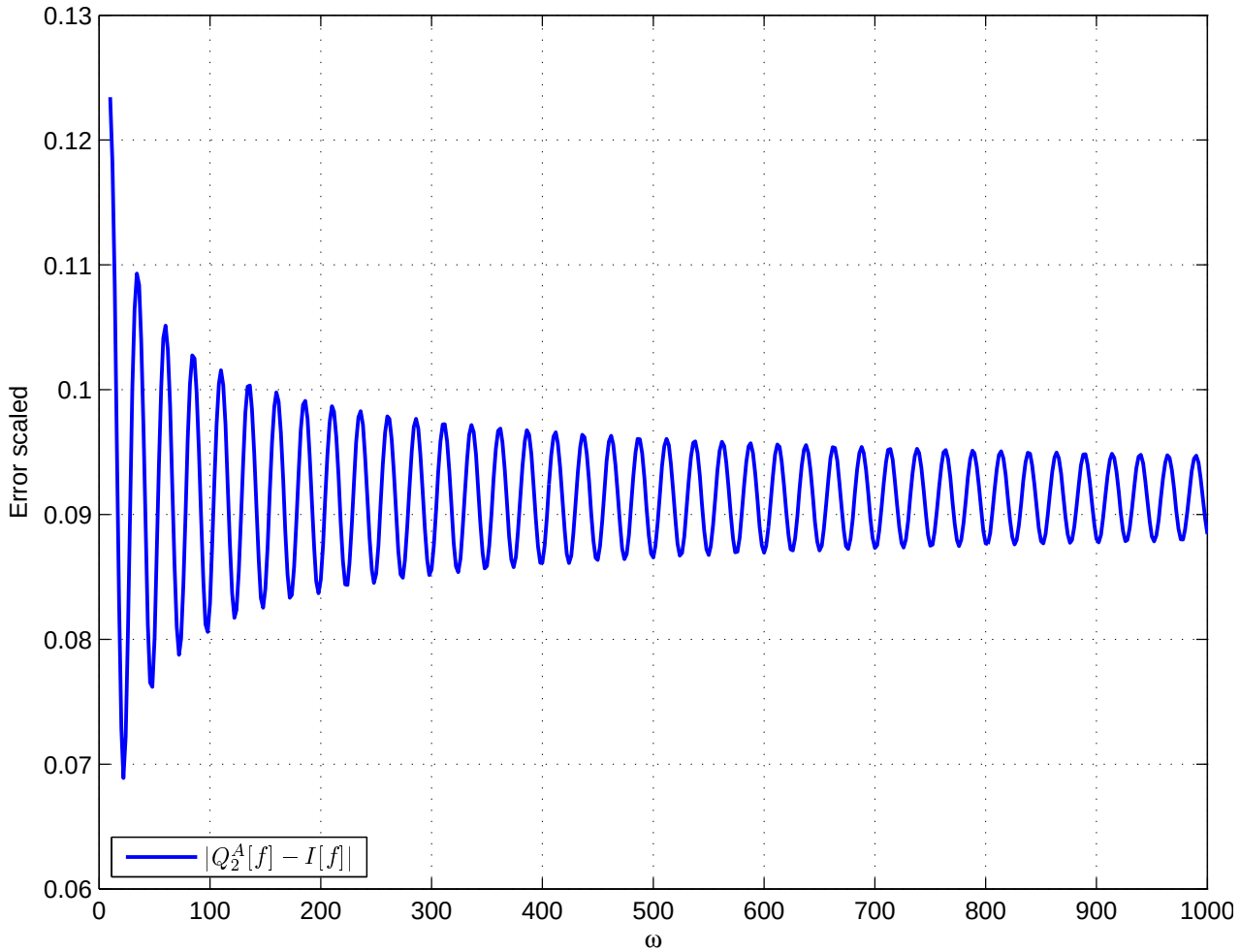
Für die verallgemeinerte Filon Methode wählen wir:
$\nu = 3, c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1, \theta_1 = \theta_3 = 2, \theta_2 = 3$

Wähle $s = 2$, dann wird ein $O(\omega^{-2-1/2})$ erwartet.

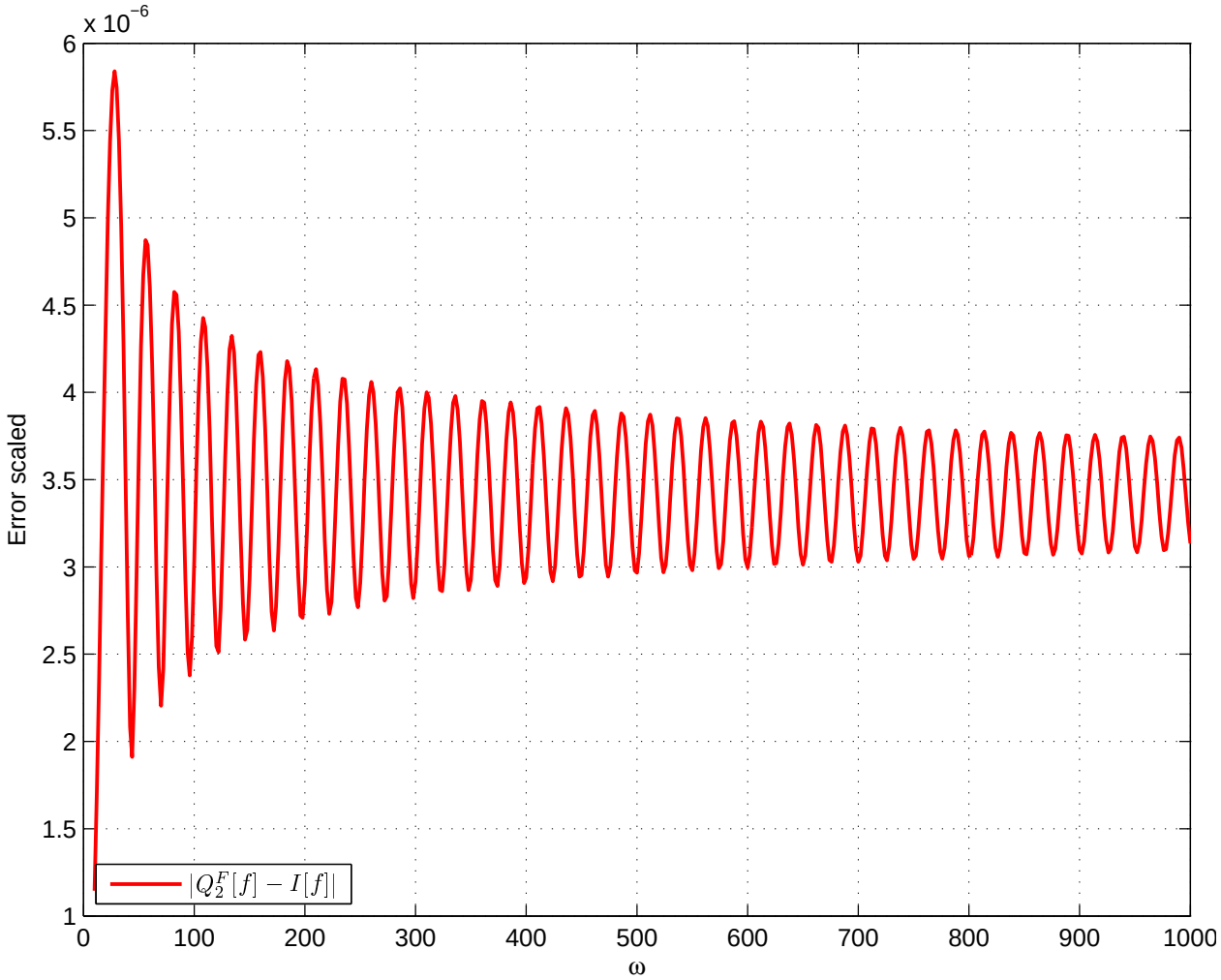
Beispiel 2: Absoluter Fehler $|Q_2[f] - I[f]|$



Beispiel 2: skalierter Fehler von $|Q_2^A[f] - I[f]|\omega^{-2-1/2}$



Beispiel 2: skalierter Fehler von $|Q_2^F[f] - I[f]|\omega^{-2-1/2}$



Problem

- In den betrachteten Methoden müssen Ableitungen and den Endpunkten und Stützstellen berechnet werden.
- Die betrachteten Methoden sind ungeeignet, falls Ableitungen nicht vorhanden oder nur schwer zu berechnen sind.
- Das Ziel ist eine Methode ohne die Verwendugn von Ableitungen zu entwickeln.

Beobachtung

In den betrachteten Methoden spielen die Endpunkte und Stationären Punkte eine wichtige Rolle.
Stützstellen nahe an diesen Punkten verbesssern die verallgemeinerete Filon Methode.

Entwicklung der adaptiven Filon Methode

Ausgehend von den Stützstellen

$$a = c_1 < c_2 < \cdots < c_{\nu-1} < c_\nu = b, \qquad \nu \geq 3$$

mit den Vielfachheiten $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu \in \mathbb{N}$ werden zusätzliche neue Stützstellen konstruiert.

Idee

Lasse diese neuen Stützstellen von ω abhängen.

Entwicklung der adaptiven Filon Methode

Die Stützstellenwahl:

$$
\begin{aligned}
c_1 = a: &\qquad a + \frac{\gamma}{\omega}k, \quad k = 0, 1, \ldots, \theta_1 - 1 \\
c_j \in (a, b): &\qquad c_j + \frac{\gamma}{\omega}k, \quad k = -\lfloor \frac{\theta_j - 1}{2} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{\theta_j}{2} \rfloor \\
c_\nu = b: &\qquad b - \frac{\gamma}{\omega}k, \quad k = 0, 1, \ldots, \theta_\nu - 1
\end{aligned}
$$

$\gamma > 0$ muss genügend klein sein, so dass alle Stützstellen in $[a, b]$ liegen.
Für grosses ω genügt $\gamma = 1$.

Die adaptive Filon Methode

Mit diesen Stützstellen ergibt sich das Polynom $\tilde{f}_\omega$ vom Grad $n = \sum_{j=1}^{\nu} \theta_j - 1$.

Definition: Adaptive Filon Methode

$$Q_s^{aF}[f] = \int_a^b \tilde{f}_\omega e^{i\omega g(x)}\, dx, \qquad s = min\{\theta_1, \theta_\nu\}$$

Fehleranalyse

Es gilt: $\tilde{f}_\omega^{(k)}(c_j) - f^{(k)}(c_j) = O(\omega^{-\theta_j+k})$ mit $k = 0, 1, \ldots, \theta_j$

$$\frac{1}{(-i\omega)^k}\left(\tilde{f}_\omega^{(k)}(c_j) - f^{(k)}(c_j)\right) = O(\omega^{-\theta_j})$$

Insbesondere:

$$\frac{1}{(-i\omega)^k}\left(\tilde{f}_\omega^{(k)}(a) - f^{(k)}(a)\right) = O(\omega^{-\theta_1})$$

$$\frac{1}{(-i\omega)^k}\left(\tilde{f}_\omega^{(k)}(b) - f^{(k)}(b)\right) = O(\omega^{-\theta_\nu})$$

$$\Longrightarrow O(\omega^{-min\{\theta_1,\theta_\nu\}}) \quad \Longrightarrow \quad O(\omega^{-s-1})$$

Beispiel 3

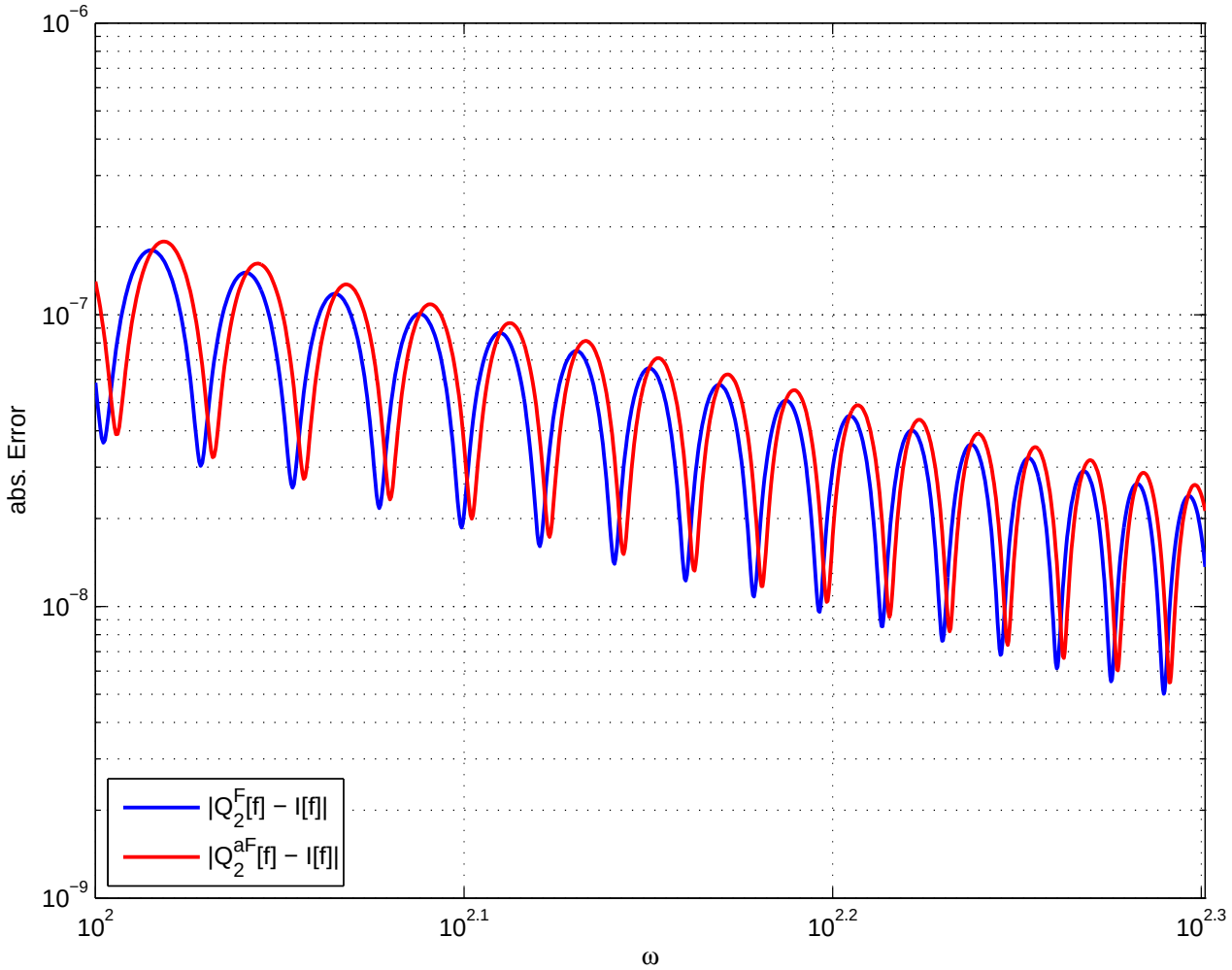
Sei $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$, $g(x) = x$ und $a = 0$, $b = 1$.

$$I[f] = \int_0^1 \frac{2-x}{2+x} e^{i\omega x}\, dx$$

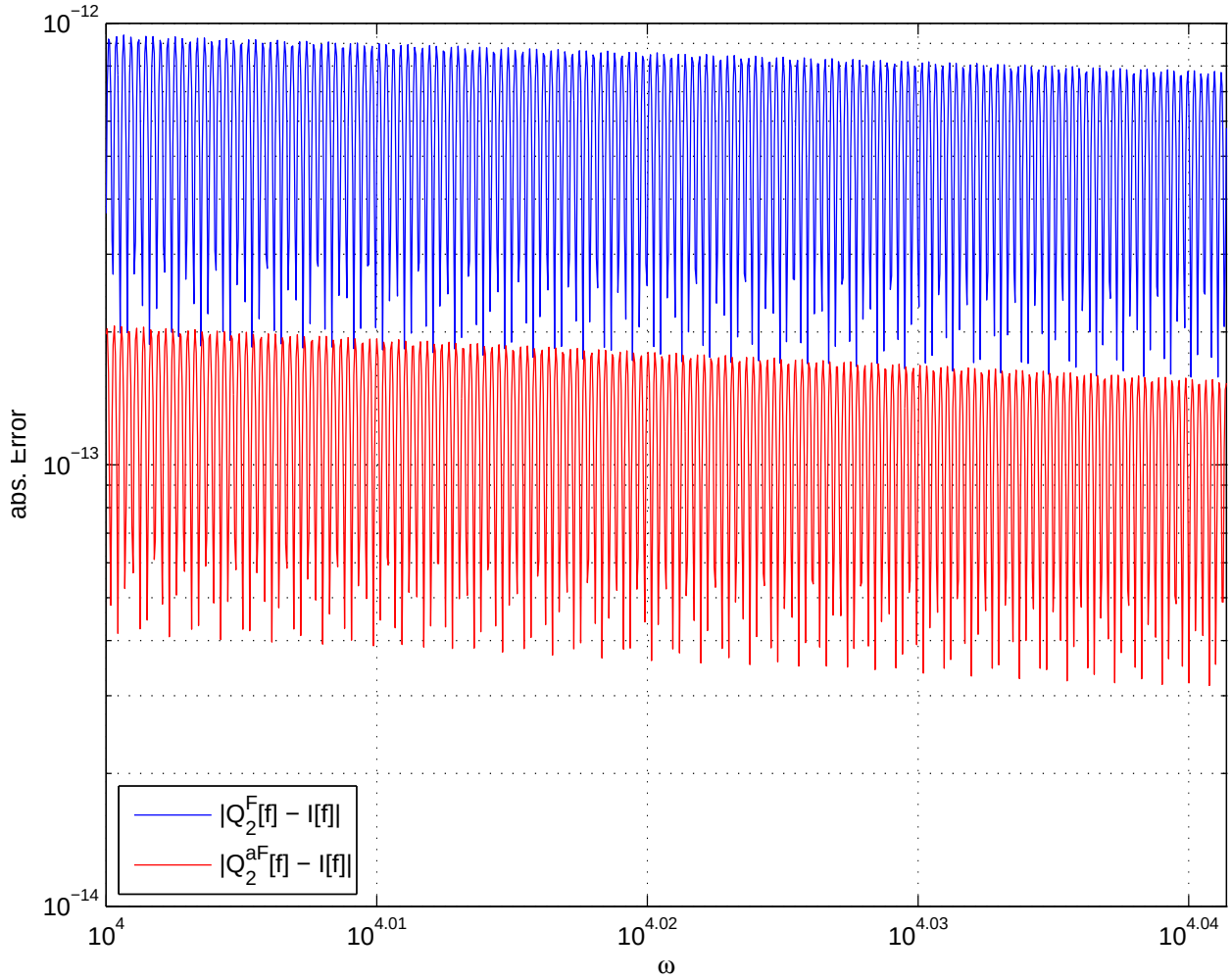
Wähle für die verallgemeinerte Filon Methode:
$\nu = 4, c = [0, \frac{1}{1000}, \frac{999}{1000}, 1]$ und $\theta = [1, 1, 1, 1]$

Wähle für die adaptive Filon Methode:
$\nu = 2, c = [0, 1], \theta = [2, 2]$ und $\gamma = 1$

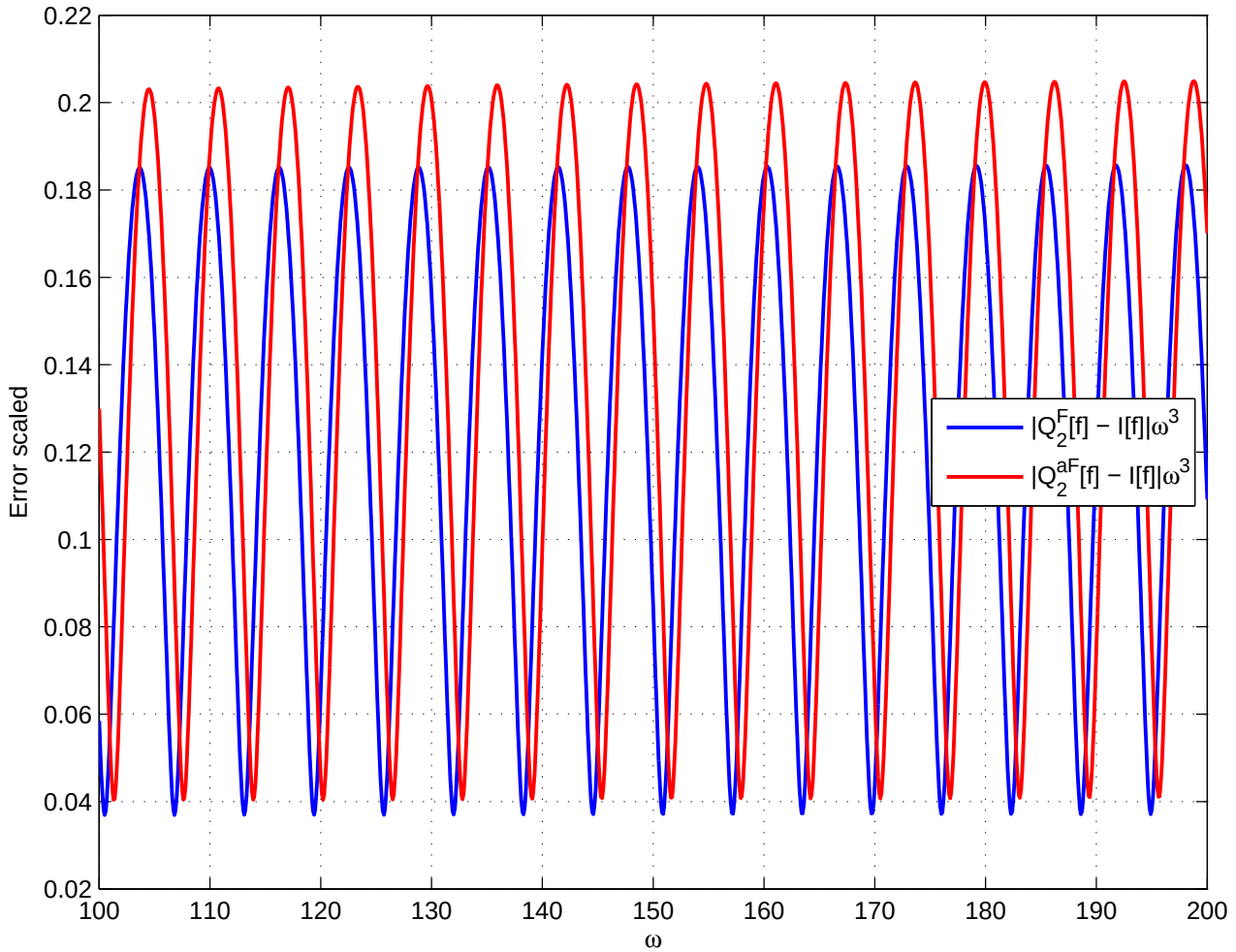
Beispiel 3: Absoluter Fehler



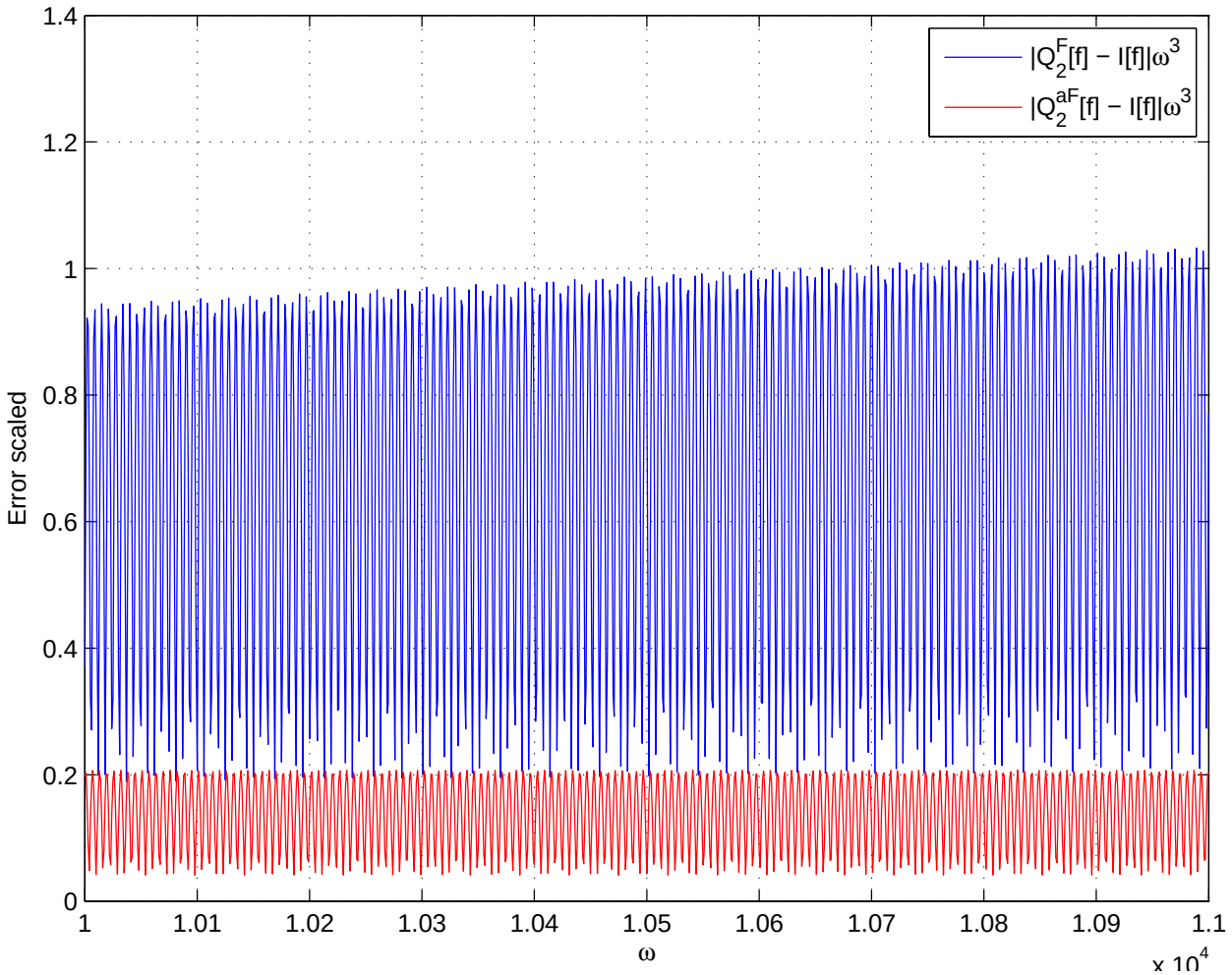
Beispiel 3: Absoluter Fehler



Beispiel 3: skalierter Fehler



Beispiel 3: skalierter Fehler



Zusammenfassung

- Adaptive Filon Methode ist gleich „gut“ wie die verallgemeinerte Filon Methode
- Es müssen keine Ableitungen berechnet werden.