

# Proseminar: Steepest Descent

Benny Löffel

8.12.2008

# Themenübersicht

- 1 Einführung
  - Problemstellung
  - Ansatz
  - Illustration
- 2 Idealfall: Analytischer Integrand ohne stationäre Punkte
  - Sätze über die Konvergenz
  - Wahl des Integrationspfades
  - Beispiel 1
- 3 Verallgemeinerungen
  - Stationäre Punkte
  - Beispiel 2
  - $g$  nicht analytisch invertierbar
  - Beispiel 3
- 4 Anwendung auf ein Beispiel aus der Praxis
- 5 Zusammenfassung

# Integrale mit stark oszillierenden Integranden

Wir betrachten Integrale der Form:

$$I = \int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx \quad (1)$$

- $\omega > 0$  Frequenzparameter
- $f$  und  $g$  analytische Funktionen

# Cauchy'scher Integralsatz

## Theorem

Sei  $\gamma$  eine geschlossene Kurve in einer offenen Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{C}$ .  
Die folgenden beiden Eigenschaften sind äquivalent:

- 1  $\int_{\alpha} f = 0$  für jede analytische Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$
- 2  $\gamma$  ist nullhomotop in  $D$

# Cauchy'scher Integralsatz

Es gilt:  $f$  und  $g$  analytisch  
 $\Rightarrow f(x)e^{i\omega g(x)}$  analytisch

Somit folgt mit dem Cauchy'schen Integralsatz

$$\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx = \int_\gamma f(x)e^{i\omega g(x)} \quad (2)$$

wobei

- $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\gamma(0) = a$  und  $\gamma(1) = b$
- $[a, b] \oplus -\gamma$  nullhomotop

## Idee

Wir wählen einen Integrationsweg  $\gamma$  in der komplexen Ebene, auf welchem der Integrand nicht oszilliert.

Aufspaltung von  $g$  in Real- und Imaginärteil

Es gilt:

$$e^{i\omega g(x)} = e^{i\omega(\operatorname{Re}g(x) + i\operatorname{Im}g(x))} = e^{i\omega\operatorname{Re}g(x)} e^{-\omega\operatorname{Im}g(x)}$$

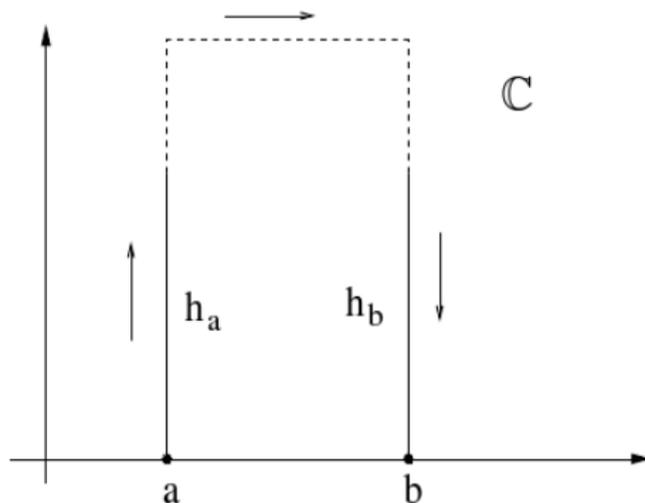
Somit oszilliert der Integrand nicht, falls auf dem gewählten Pfad der Realteil von  $g(x)$  konstant ist.

Zusätzlich erkennt man:

$$\left| e^{i\omega g(x)} \right| = \left| e^{i\omega\operatorname{Re}g(x)} \right| \left| e^{-\omega\operatorname{Im}g(x)} \right| = \left| e^{-\omega\operatorname{Im}g(x)} \right| \xrightarrow{\operatorname{Im}g(x) \rightarrow \infty} 0$$

## Illustration

Wir betrachten  $g(x) = x$  und den Integrationsweg



# Aufspaltung des Integrals

Dann ist

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx \\ &= e^{i\omega a} \int_0^P f(a + ip) e^{-\omega p} dp + e^{i\omega b} \int_P^0 f(b + ip) e^{-\omega p} dp \\ &\quad + e^{-\omega P} \int_0^{b-a} f(a + p + iP) e^{i\omega(a+p)} dp \end{aligned}$$

## Beispiel 1

Konkret betrachten wir nun das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx$$

Wir stellen fest, dass

$$\left| e^{-\omega P} \int_0^1 \frac{1}{1+(p+iP)} e^{i\omega(p)} dp \right| \xrightarrow{P \rightarrow \infty} 0$$

## Beispiel 1

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx \\ &= e^{i\omega a} \int_0^\infty \frac{1}{1+ip} e^{-\omega p} dp - e^{i\omega b} \int_0^\infty \frac{1}{2+ip} e^{-\omega p} dp \end{aligned}$$

Damit haben wir das Problem auf das Integrieren von nicht oszillierenden Integralen reduziert.

## Lemma 1

Gegeben:

$u$  analytisch auf einem einfach zusammenhängenden komplexen Gebiet  $D \subset \mathbb{C}$  mit  $[a, b] \subset D$ , so dass ein beschränktes und wegzusammenhängendes Gebiet  $S \subset D$ , mit  $|u(z)| \leq \varepsilon \forall z \in S$ , existiert.  $M > 0$ , so dass  $\forall p, q \in S$  ein Pfad  $h \subset S$  von  $p$  nach  $q$  existiert mit  $L(h) < M$ .

Dann gilt:

$\int_a^x u(z) dz \approx F(a) - F(x)$  mit einem Fehler  $e$ , wobei  $|e| \leq M\varepsilon$ .  
Dabei ist  $F(x) := \int_{\Gamma_x} u(z) dz$  für einen beliebigen Pfad  $\Gamma_x \subset D$  welcher in  $x$  startet und in  $S$  endet.

## Theorem 1

Gegeben:

Seien  $f$  und  $g$  analytisch auf einer beschränkten und offenen komplexen Umgebung  $D$  von  $[a, b]$  mit  $g'(z) \neq 0, z \in D$ .

Dann gilt:

Es existiert eine Approximation der Form  $F(a) - F(b)$  für  $\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)} dx$  mit einem Fehler der Ordnung  $\mathcal{O}(e^{-\omega d_0})$  als Funktion von  $\omega$  für eine reelle konstante  $d_0 > 0$ .

$$(F(x) := \int_{\Gamma_x} f(z)e^{i\omega g(z)} dz)$$

## Theorem 2

Gegeben:  $f$  und  $g$  sind analytisch auf einem einfach zusammenhängenden und genügend (unendlich) grossen Gebiet  $D$ , mit  $[a, b] \subset D$ , so dass das Inverse von  $g$  auf  $D$  existiert. Zudem gilt:

$$\exists m \in \mathbb{N} : |f(z)| = \mathcal{O}(|z|^m) \quad (3)$$

$$\exists \omega_0 \in \mathbb{R} : |g^{-1}(z)| = \mathcal{O}(e^{\omega_0|z|}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (4)$$

Dann gilt:

$$\int_a^x f(z) e^{i\omega g(z)} dz = F(a) - F(x) \quad \forall \omega > (m+1)\omega_0 \quad (5)$$

wobei  $F(x) := \int_{\Gamma_x} f(z) e^{i\omega g(z)} dz$  und  $\Gamma_x$  ein Pfad welcher in  $x$  beginnt. Zudem existiert eine Paramtrisierung  $h_x(p), p \in [0, \infty)$  von  $\Gamma_x$ , so dass der Inntegrand von  $F(x)$  ein  $\mathcal{O}(e^{-\omega p})$  ist.

### Theorem 3

Falls  $f$  und  $g$  die Bedingungen von Theorem 2 erfüllen und die Integrale mit einer  $n$ -Punkte Gauss-Laguerre Quadratur ausgewertet werden, so verhält sich der Quadraturfehler asymptotisch wie  $\mathcal{O}(\omega^{-2n-1})$ .

# Integrationspfad

Jeder Pfad  $h_q$  muss somit die Gleichung

Pfadgleichung

$$g(h_q(p)) = g(q) + ip \quad (6)$$

erfüllen. Dabei ist  $q$  der Startpunkt des Pfades auf der reellen Achse.

# Beispiel 1

Wir betrachten noch einmal das Integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx$$

Somit ist  $g(x) = x$  und  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Da die Pfade  $h_q(p)$  ( $q = 0, 1$ ) die Gleichung (6)

$$g(h_q(p)) = g(q) + ip$$

erfüllen müssen, gilt:

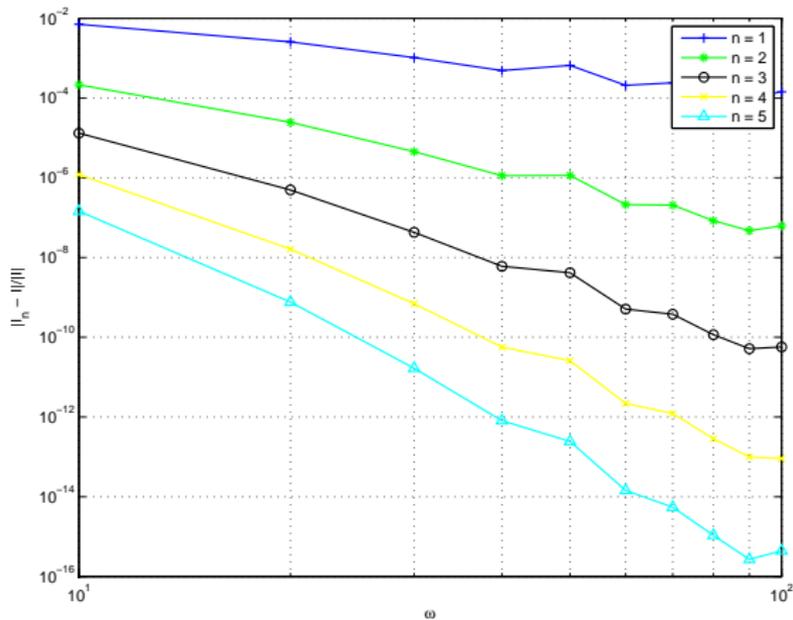
$$h_0(p) = g^{-1}(g(0) + ip) = ip \text{ und } h_1(p) = g^{-1}(g(1) + ip) = 1 + ip$$

## Beispiel 1; Zerlegung des Integrals

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega x} dx &= \int_0^\infty \frac{1}{1+h_0(p)} e^{i\omega h_0(p)} h_0'(p) dp \\ &+ \int_0^\infty \frac{1}{1+h_1(p)} e^{i\omega h_1(p)} h_1'(p) dp \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{1+ip} e^{-\omega p} dp + e^{i\omega} \int_0^\infty \frac{1}{2+ip} e^{-\omega p} dp\end{aligned}$$

## Beispiel 1; Fehleranalyse

Abbildung:  $\omega$  Konvergenz

## Beispiel 1; Fehleranalyse

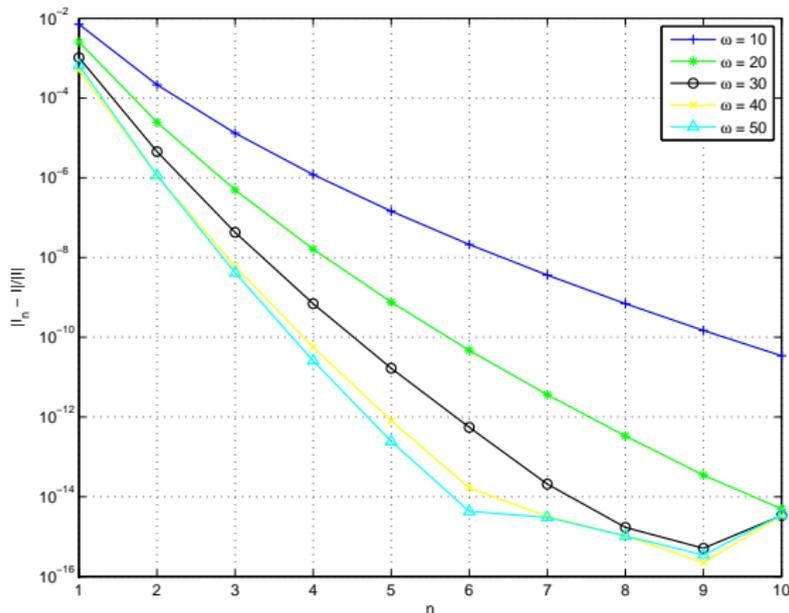


Abbildung: n Konvergenz

# Problem bei stationären Punkten

## Stationärer Punkt

$$g'(x) = 0$$

Problem bei stationären Punkten:

Theorem 2 ist nicht mehr anwendbar, da kein eindeutiges Inverses von  $g$  auf  $[a,b]$  existiert.

## Beispiel 2

Wir betrachten das Integral

$$I_{[0,1]} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega(x-\frac{1}{2})^2} dx$$

$$\Rightarrow g(x) = (x - \frac{1}{2})^2 \text{ und } g'(x) = 2x - 1.$$

$$\Rightarrow g'(\frac{1}{2}) = 0$$

Somit haben wir einen **stationäre Punkt bei  $\frac{1}{2}$** , weshalb wir  $I_{[0,1]}$  in  $I_{[0, \frac{1}{2}]}$  und  $I_{[\frac{1}{2}, 1]}$  aufsplitten.

# Beispiel 2; Integrationspfade

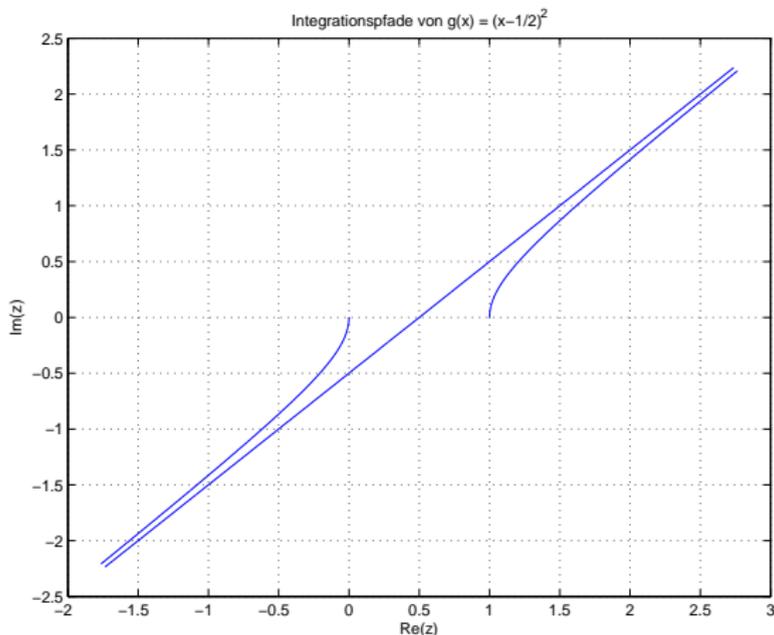


Abbildung: Integrationspfade von  $g(x) = (x - \frac{1}{2})^2$

# Beispiel 2; Fehleranalyse

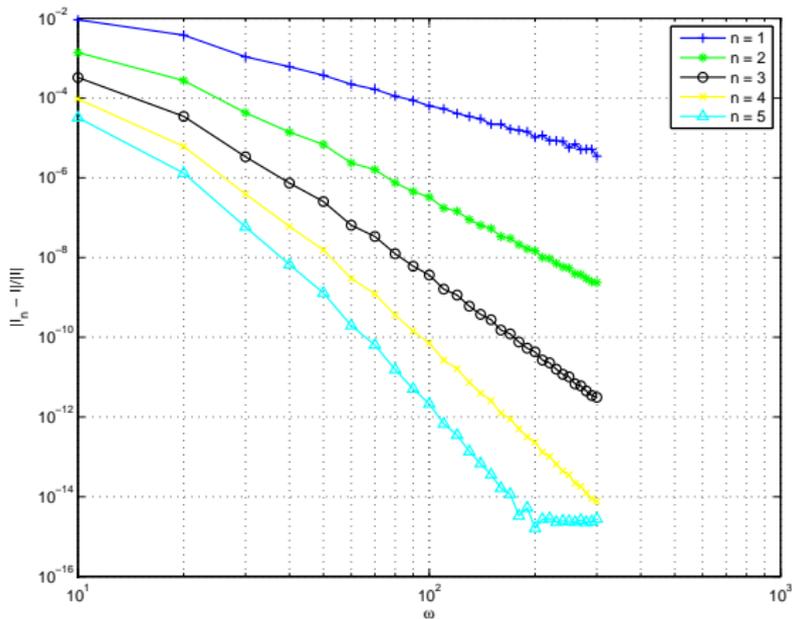


Abbildung:  $\omega$  Konvergenz

# Beispiel 2; Fehleranalyse

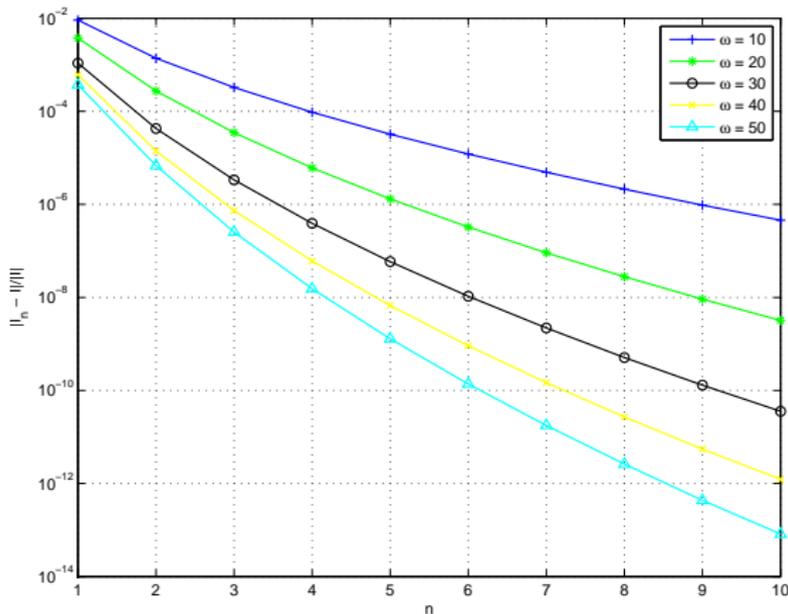


Abbildung: n Konvergenz

# Problem

Die Pfade  $h_q(p)$  müssen die Gleichung (6)

$$g(h_q(p)) = g(q) + ip \quad (7)$$

erfüllen. Falls nun **g nicht analytisch invertierbar** ist, benötigen wir eine neue Methode.

# Taylorentwicklung

Die Idee ist es, anstelle der Funktion  $g$  die Taylorentwicklung von  $g$  in den Endpunkten des Intervalls  $[a, b]$  zu betrachten und diese zu invertieren. Um die Taylorentwicklungen noch vernünftig invertieren zu können, betrachtet man die Taylorentwicklung erster oder zweiter Ordnung. Die Gleichung für den Pfad  $h_q(p)$  lautet somit

Mit Taylorentwicklung erster Ordnung

$$h_q(p) = q + \frac{ip}{g'(q)} \quad (8)$$

Mit Taylorentwicklung zweiter Ordnung

$$h_q(p) = q - \frac{g'(a) - \sqrt{g'(a)^2 + 2ipg^{(2)}(q)}}{g^{(2)}(q)} \quad (9)$$

# Newton-Raphson-Iteration

Die Approximation kann noch verbessert werden, indem man die durch die Taylorentwicklung erhaltenen Werte als Startwert für die Newton-Raphson-Iteration verwendet um die Gleichung

$$g(h_q(p)) = g(q) + ip \quad (10)$$

numerisch zu lösen.

## Beispiel 3

Wir betrachten das Integral

$$I_{[0,1]} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} e^{i\omega(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}} dx$$

# Beispiel 3; Integrationspfade

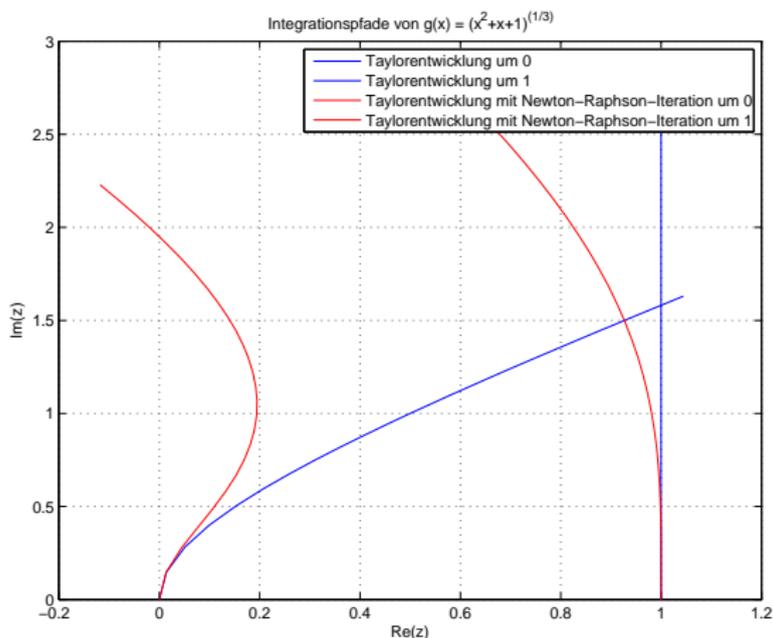
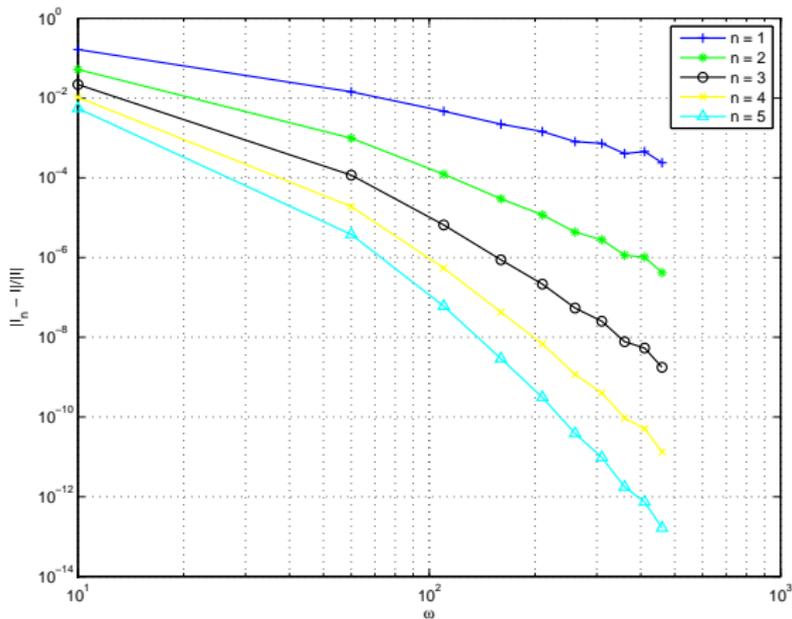


Abbildung: Integrationspfade von  $g(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$

## Beispiel 3; Fehleranalyse

Abbildung:  $\omega$  Konvergenz

# Beispiel 3; Fehleranalyse

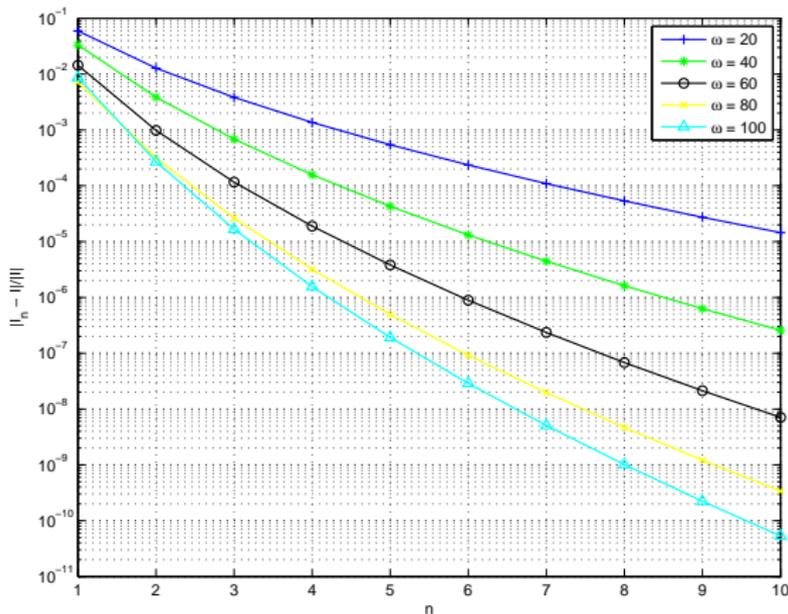


Abbildung: n Konvergenz

# Aufgabenstellung

Das folgende Integral soll numerisch berechnet werden:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\sinh(3x) - 8\sinh(2x) + 26\sinh(x)}{(2\cosh(x) - 1)^4}}_{=:u(x)} e^{i\omega(x-2\sinh(x))} dx$$

## Grenzen anpassen

Die Methode des steepest-descent ist nicht auf dem Intervall  $[-\infty, +\infty]$  anwendbar. Da der Integrand sowohl nach  $-\infty$  als auch nach  $+\infty$  exponentiell abfällt, reicht es in diesem Fall aus das Intervall  $[-50, 50]$  zu betrachten.

Auf dem Intervall  $[-50, 50]$  befindet sich zwar kein stationärer Punkt, es tritt jedoch trotzdem ein Problem in Null auf. Es gilt:

$$g'(x) = 1 - 2\cosh(x)$$

Somit erhalten wir

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = i\pi\left(\pm\frac{1}{3} + 2k\right), k \in \mathbb{Z}$$

Dies bedeutet, dass das Inverse von  $g$  in den Punkten  $S = \{i\pi(\pm\frac{1}{3} + 2k) | k \in \mathbb{Z}\}$  nicht existiert.

Betrachten wir nun die Pfade um 0, welche man gemäss Gleichung (6) erhält:

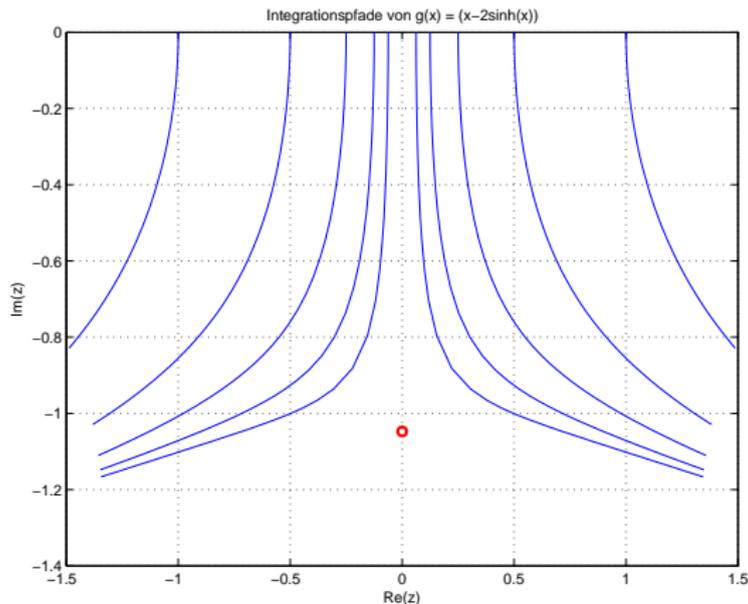


Abbildung: Integrationspfade für Punkte um 0

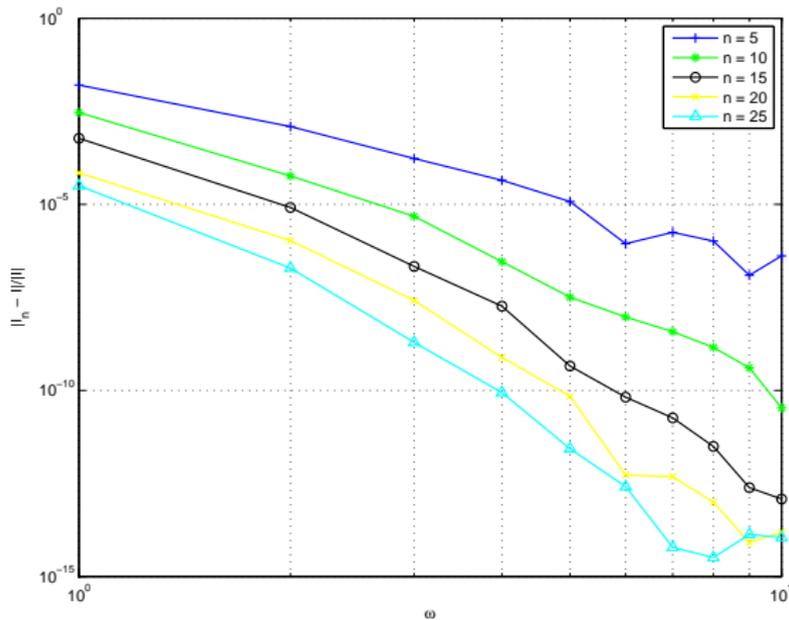
## Problem um Null

Wir erkennen, dass sich Theorem 2 nicht mehr anwenden lässt, da kein genügend grosses, einfach zusammenhängendes Gebiet  $D$  existiert, welches  $[-50, 50]$  enthält und auf welchem  $g$  invertierbar ist. Wir müssen deshalb das Integral aufsplitten:

$$\int_{-50}^{50} u(x) dx = \underbrace{\int_{-50}^{-1} u(x) dx}_{=: I_1} + \underbrace{\int_{-1}^1 u(x) dx}_{=: I_2} + \underbrace{\int_1^{50} u(x) dx}_{=: I_3}$$

$I_1$  und  $I_3$  lässt sich dabei mit der steepest-descent Methode berechnen. Auf  $I_2$  hingegen lässt sich die Methode nicht anwenden. Da  $u$  auf  $[-1, 1]$  jedoch nicht stark oszilliert lässt sich dieses Integral mit Standardmethoden berechnen.

## Fehleranalyse

Abbildung:  $\omega$  Konvergenz

# Fehleranalyse

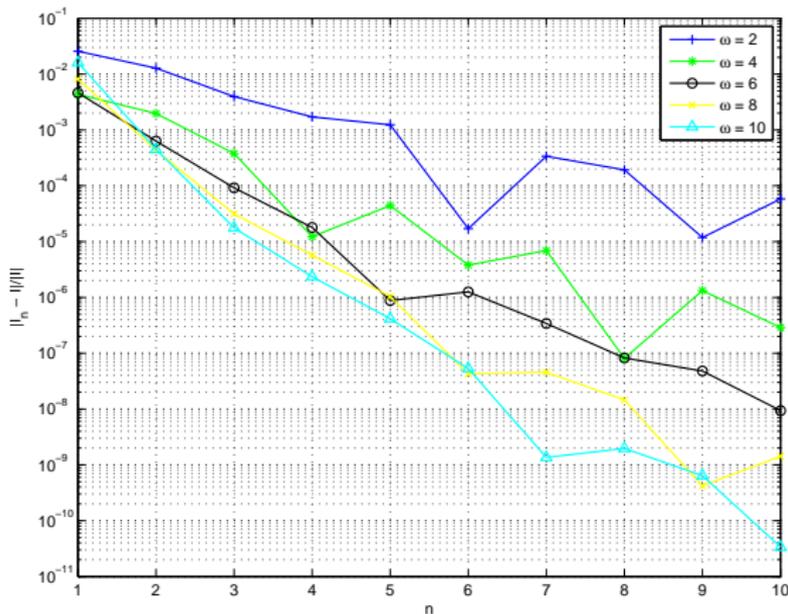


Abbildung:  $n$  Konvergenz

# Zusammenfassung

Die Methode des steepest descent ist eine sehr effiziente Methode um stark oszillierende Integrale zu berechnen. Zu beachten ist jedoch, dass der Integrand gewisse Bedingungen erfüllen müssen, insbesondere die folgenden:

- Das Inverse von  $g$  muss auf einem genügend grossen Gebiet existieren
- $g$  und  $f$  sollten analytisch sein