

# Theoretische Grundlagen von AMG, Teil 2

K. Stüben

Appendix A von U. TROTTENBERG, C. OOSTERLEE, AND A. SCHÜLLER,  
Multigrid, Academic Press, London, 2000.

[www.gmd.de/publications/report/0070/](http://www.gmd.de/publications/report/0070/)

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip
- Nachglättung

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip
- Nachglättung
- Vorglättung

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip
- Nachglättung
- Vorglättung
- Grenzen der Theorie und offene Probleme

## Die Idee hinter AMG

---

- Sei  $A_h$  eine spd  $n \times n$  M-Matrix,  $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$  eine Indexmenge und  $A_h u_h^* = f_h$ . **Ziel ist die Approximation von  $u_h^*$ .**

## Die Idee hinter AMG

---

- Sei  $A_h$  eine spd  $n \times n$  M-Matrix,  $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$  eine Indexmenge und  $A_h u_h^* = f_h$ . **Ziel ist die Approximation von  $u_h^*$ .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.

## Die Idee hinter AMG

---

- Sei  $A_h$  eine spd  $n \times n$  M-Matrix,  $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$  eine Indexmenge und  $A_h u_h^* = f_h$ . **Ziel ist die Approximation von  $u_h^*$ .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.
- $\Omega^h = F^h \cup C^h$  eine disjunkte Zerlegung in grobe und feine Indizes. **Effiziente Konstruktion dieser Zerlegung?**

## Die Idee hinter AMG

---

- Sei  $A_h$  eine spd  $n \times n$  M-Matrix,  $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$  eine Indexmenge und  $A_h u_h^* = f_h$ . **Ziel ist die Approximation von  $u_h^*$ .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.
- $\Omega^h = F^h \cup C^h$  eine disjunkte Zerlegung in grobe und feine Indizes. **Effiziente Konstruktion dieser Zerlegung?**
- $A_H = (I_H^h)^T A_h I_H^h$  ist der spd **Galerkinoperator**, wobei  $I_H^h$  der **Interpolationsoperator** ist.

# Die Idee hinter AMG

- Sei  $A_h$  eine spd  $n \times n$  M-Matrix,  $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$  eine Indexmenge und  $A_h u_h^* = f_h$ . **Ziel ist die Approximation von  $u_h^*$ .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.
- $\Omega^h = F^h \cup C^h$  eine disjunkte Zerlegung in grobe und feine Indizes. **Effiziente Konstruktion dieser Zerlegung?**
- $A_H = (I_H^h)^T A_h I_H^h$  ist der spd **Galerkinoperator**, wobei  $I_H^h$  der **Interpolationsoperator** ist.
- Damit  $\bar{u}^h = u^h + I_H^h e^H$ , wobei  $A_H e^H = (I_H^h)^T (f_h - A_h u^h)$ .

# Der Interpolationsoperator

---

- Alle Interpolationen  $e^h = I_H^h e^H$  sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei  $P_i^h \subset C^h$  die Menge der Interpolationsvariablen ist.

# Der Interpolationsoperator

---

- Alle Interpolationen  $e^h = I_H^h e^H$  sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei  $P_i^h \subset C^h$  die Menge der Interpolationsvariablen ist.

- Falls  $P_i^h \subset C^h \cap N_i$  also nur Nachbarn verwendet werden, spricht man von **direkter Interpolation**.

# Der Interpolationsoperator

---

- Alle Interpolationen  $e^h = I_H^h e^H$  sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei  $P_i^h \subset C^h$  die Menge der Interpolationsvariablen ist.

- Falls  $P_i^h \subset C^h \cap N_i$  also nur Nachbarn verwendet werden, spricht man von **direkter Interpolation**.
- Bei AMG vom **Aggregations Typ** gilt, dass  $P_i^h$  nur jeweils ein Element hat.

# Der Interpolationsoperator

---

- Alle Interpolationen  $e^h = I_H^h e^H$  sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei  $P_i^h \subset C^h$  die Menge der Interpolationsvariablen ist.

- Falls  $P_i^h \subset C^h \cap N_i$  also nur Nachbarn verwendet werden, spricht man von **direkter Interpolation**.
- Bei AMG vom **Aggregations Typ** gilt, dass  $P_i^h$  nur jeweils ein Element hat.
- **Effiziente Konstruktion von  $I_H^h$ ?**

# Das Variationsprinzip

---

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit  $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$  als **Grobitter-Korrekturoperator**.

# Das Variationsprinzip

---

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit  $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$  als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel**  $\bar{e}^h \approx 0$ .

# Das Variationsprinzip

---

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit  $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$  als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel**  $\bar{e}^h \approx 0$ .
- Präziser mit Variationsprinzip:  $\|K_{h,H} e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .

# Das Variationsprinzip

---

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit  $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$  als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel**  $\bar{e}^h \approx 0$ .

- Präziser mit Variationsprinzip:  $\|K_{h,H} e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .

- Kompletter Zweigitter-Iterationsschritt:

$$\bar{e}^h = M_{h,H} e^h \text{ mit } M_{h,H} := S_h K_{h,H} S_h$$

# Das Variationsprinzip

---

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit  $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$  als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel**  $\bar{e}^h \approx 0$ .

- Präziser mit Variationsprinzip:  $\|K_{h,H} e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .

- Kompletter Zweigitter-Iterationsschritt:

$$\bar{e}^h = M_{h,H} e^h \text{ mit } M_{h,H} := S_h K_{h,H} S_h$$

- Hier  $\bar{e} = S K e$ .

- Hier  $\bar{e} = S K e$ .
- $S$  muss alle Vektoren in  $\mathcal{R}(K)$  effizient reduzieren.

- Hier  $\bar{e} = S K e$ .
- $S$  muss alle Vektoren in  $\mathcal{R}(K)$  effizient reduzieren.
- $K e$  sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler  $e$  ist algebraisch glatt falls  $S e \approx e$ .

- Hier  $\bar{e} = S K e$ .
- $S$  muss alle Vektoren in  $\mathcal{R}(K)$  effizient reduzieren.
- $K e$  sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler  $e$  ist algebraisch glatt falls  $S e \approx e$ .
- $S$  erfüllt die Glättungseigenschaft falls

$$\|S e\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2.$$

- Hier  $\bar{e} = S K e$ .
- $S$  muss alle Vektoren in  $\mathcal{R}(K)$  effizient reduzieren.
- $Ke$  sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler  $e$  ist algebraisch glatt falls  $Se \approx e$ .
- $S$  erfüllt die Glättungseigenschaft falls

$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2.$$

Wobei  $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$  mit  $D := \text{diag}(A)$ . Also arbeitet  $S$  umso effizienter je grösser  $\|e\|_V$  im Verhältnis zu  $\|e\|_A$  ist.

- Hier  $\bar{e} = S K e$ .
- $S$  muss alle Vektoren in  $\mathcal{R}(K)$  effizient reduzieren.
- $K e$  sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler  $e$  ist algebraisch glatt falls  $S e \approx e$ .
- $S$  erfüllt die Glättungseigenschaft falls

$$\|S e\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2.$$

Wobei  $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$  mit  $D := \text{diag}(A)$ . Also arbeitet  $S$  umso effizienter je grösser  $\|e\|_V$  im Verhältnis zu  $\|e\|_A$  ist.

## Die Kontraktionseigenschaft von $SK$

---

- **Satz:**  $S$  erfülle die Glättungeigenschaft. Die  $C/F$ -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von  $e$  unabhängigen  $\tau > 0$ . Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

## Die Kontraktionseigenschaft von $SK$

---

- **Satz:**  $S$  erfülle die Glättungseigenschaft. Die  $C/F$ -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von  $e$  unabhängigen  $\tau > 0$ . Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

**Beweis:** Aus der Glättungseigenschaft und  $(\star)$  folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma \|Ke\|_V^2$$

## Die Kontraktionseigenschaft von $SK$

---

- **Satz:**  $S$  erfülle die Glättungseigenschaft. Die  $C/F$ -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von  $e$  unabhängigen  $\tau > 0$ . Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

**Beweis:** Aus der Glättungseigenschaft und  $(\star)$  folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma \|Ke\|_V^2 \leq (1 - \sigma/\tau) \|Ke\|_A^2$$

# Die Kontraktionseigenschaft von $SK$

- **Satz:**  $S$  erfülle die Glättungseigenschaft. Die  $C/F$ -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von  $e$  unabhängigen  $\tau > 0$ . Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

**Beweis:** Aus der Glättungseigenschaft und  $(\star)$  folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma \|Ke\|_V^2 \leq (1 - \sigma/\tau) \|Ke\|_A^2 \leq (1 - \sigma/\tau) \|e\|_A^2$$



## Die Kontraktionseigenschaft von $SK$

---

- **Satz:** Falls die  $C/F$ -Zerlegung und die Interpolation  $I_H^h$  so gewählt sind, dass für alle  $e$  gilt

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$

wobei  $\tau$  unabhängig von  $e$  ist, dann ist  $(\star)$  erfüllt.

## Die Kontraktionseigenschaft von $SK$

---

- **Satz:** Falls die  $C/F$ -Zerlegung und die Interpolation  $I_H^h$  so gewählt sind, dass für alle  $e$  gilt

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$

wobei  $\tau$  unabhängig von  $e$  ist, dann ist  $(\star)$  erfüllt.

- Der Parameter  $\tau$  hängt von  $A$  ab!

# Die Kontraktionseigenschaft von $SK$

---

- **Satz:** Falls die  $C/F$ -Zerlegung und die Interpolation  $I_H^h$  so gewählt sind, dass für alle  $e$  gilt

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$

wobei  $\tau$  unabhängig von  $e$  ist, dann ist  $(\star)$  erfüllt.

- Der Parameter  $\tau$  hängt von  $A$  ab!
- Von Interesse ist aber hier die gleichmäßige Konvergenz für eine ganze Klasse von Matrizen.

- Sei  $A_c$  der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

## Ein Beispiel

---

- Sei  $A_c$  der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- $A_0$  ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei  $\lambda_0$  mit zugehöriger Eigenfunktion  $e$ , für die gelten soll  $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$ .

## Ein Beispiel

---

- Sei  $A_c$  der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- $A_0$  ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei  $\lambda_0$  mit zugehöriger Eigenfunktion  $e$ , für die gelten soll  $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$ .
- Dann gilt für positives  $c < \lambda_0$ , dass  $\|e^h\|_{A_c}^2 = \lambda_0 - c$ .

- Sei  $A_c$  der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- $A_0$  ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei  $\lambda_0$  mit zugehöriger Eigenfunktion  $e$ , für die gelten soll  $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$ .
- Dann gilt für positives  $c < \lambda_0$ , dass  $\|e^h\|_{A_c}^2 = \lambda_0 - c$ .
- Also sollte unabhängig von  $c$  gelten, dass

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_c}^2 \leq \tau (\lambda_0 - c).$$

- Sei  $A_c$  der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- $A_0$  ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei  $\lambda_0$  mit zugehöriger Eigenfunktion  $e$ , für die gelten soll  $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$ .
- Dann gilt für positives  $c < \lambda_0$ , dass  $\|e^h\|_{A_c}^2 = \lambda_0 - c$ .
- Also sollte unabhängig von  $c$  gelten, dass

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_c}^2 \leq \tau (\lambda_0 - c).$$

# Interpretation algebraisch glatter Fehler

---

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt  $i$  ergibt für den Fehler  $e$ :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

# Interpretation algebraisch glatter Fehler

---

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt  $i$  ergibt für den Fehler  $e$ :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls  $Se \approx e$ , folgt  $|r_i| \ll |a_{ii}| |e_i|$ .

# Interpretation algebraisch glatter Fehler

---

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt  $i$  ergibt für den Fehler  $e$ :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls  $Se \approx e$ , folgt  $|r_i| \ll |a_{ii}| |e_i|$ .
- Auch wenn der Fehler  $e$  global noch sehr groß ist, kann man  $e_i$  lokal durch seine Nachbarwerte approximieren durch

$$e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}.$$

# Interpretation algebraisch glatter Fehler

---

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt  $i$  ergibt für den Fehler  $e$ :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls  $Se \approx e$ , folgt  $|r_i| \ll |a_{ii}| |e_i|$ .
- Auch wenn der Fehler  $e$  global noch sehr groß ist, kann man  $e_i$  lokal durch seine Nachbarwerte approximieren durch

$$e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}.$$

- Erinnerung: Ein Fehler heißt **glatt**, falls er auf einem gröberen Gitter approximiert werden **muss**, um die Konvergenz des Verfahrens zu beschleunigen.

# Interpolation algebraisch glatter Fehler

---

- Einerseits  $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$  ( $i \in F$ ).

# Interpolation algebraisch glatter Fehler

---

- Einerseits  $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$  ( $i \in F$ ).
- Andererseits  $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$

# Interpolation algebraisch glatter Fehler

---

- Einerseits  $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$  ( $i \in F$ ).
- Andererseits  $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$
- Naiver Ansatz  $P_i = N_i$  und  $w_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$ , d.h. für jedes  $i \in F$  wären alle Nachbarn in  $C$ .

# Interpolation algebraisch glatter Fehler

---

- Einerseits  $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$  ( $i \in F$ ).
- Andererseits  $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$
- Naiver Ansatz  $P_i = N_i$  und  $w_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$ , d.h. für jedes  $i \in F$  wären alle Nachbarn in  $C$ .
- Ziel: Nur eine sehr kleine Menge von Interpolationsvariablen  $P_i$ . Sehr konsequent sind hier die Aggregations AMG-Methoden.

# Interpolation algebraisch glatter Fehler

---

- Einerseits  $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$  ( $i \in F$ ).
- Andererseits  $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$
- Naiver Ansatz  $P_i = N_i$  und  $w_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$ , d.h. für jedes  $i \in F$  wären alle Nachbarn in  $C$ .
- Ziel: Nur eine sehr kleine Menge von Interpolationsvariablen  $P_i$ . Sehr konsequent sind hier die Aggregations AMG-Methoden.

# Starke und schwache Kopplungen

- Sei  $P_i \subset N_i$ , dann ist die Approximation

$$\frac{1}{\sum_{k \in P_i} a_{ik}} \sum_{k \in P_i} a_{ik} e_k \approx \frac{1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij}} \sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j$$

um so besser, je mehr **starke Kopplungen** bezüglich  $i$  in  $P_i$  enthalten sind.

- Eine Kopplung zwischen zwei Indizes  $i$  und  $j$  ist stark, falls

$$|a_{ij}|/a_{ii}$$

relativ groß ist.

- Wähle also  $w_{ik} = -\alpha_i a_{ik}/a_{ii}$ , wobei hier  $\alpha_i = \frac{\sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\sum_{l \in P_i} a_{il}}$ .

# Wahl der Interpolationsvariablen

---

- Fixiere  $\tau \geq 1$ .

# Wahl der Interpolationsvariablen

---

- Fixiere  $\tau \geq 1$ .
- Konstruiere die disjunkte Zerlegung von  $\Omega^h = F \cup C$ , so dass für jedes  $i \in F$  eine Menge  $P_i \subset C \cap N_i$  existiert mit

$$\sum_{k \in P_i} |a_{ik}| \geq \frac{1}{\tau} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|.$$

# Wahl der Interpolationsvariablen

---

- Fixiere  $\tau \geq 1$ .
- Konstruiere die disjunkte Zerlegung von  $\Omega^h = F \cup C$ , so dass für jedes  $i \in F$  eine Menge  $P_i \subset C \cap N_i$  existiert mit

$$\sum_{k \in P_i} |a_{ik}| \geq \frac{1}{\tau} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|.$$

- Diese Interpolation mit Gewichten  $\alpha_i = \frac{\sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\sum_{l \in P_i} a_{il}}$  erfüllt  $\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2$ .

## Wahl der Interpolationsvariablen

---

- Die Wahl von  $\tau$  ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der gröberen Gitter.

# Wahl der Interpolationsvariablen

---

- Die Wahl von  $\tau$  ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der gröberen Gitter.
- Aus Experimenten  $\tau = 2$ .

## Wahl der Interpolationsvariablen

---

- Die Wahl von  $\tau$  ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der gröberen Gitter.
- Aus Experimenten  $\tau = 2$ .
- Nach Möglichkeit sollte  $P_i$  den Punkt  $i \in F$  umzingeln, falls ein geometrischer Hintergrund vorliegt.

# Wahl der Interpolationsvariablen

---

- Die Wahl von  $\tau$  ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der gröberen Gitter.
- Aus Experimenten  $\tau = 2$ .
- Nach Möglichkeit sollte  $P_i$  den Punkt  $i \in F$  umzingeln, falls ein geometrischer Hintergrund vorliegt.

- Variationsprinzip:  $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .

- Variationsprinzip:  $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .
- Mit Vorglättung:  $\|K_{h,H}S e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|S e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .

- Variationsprinzip:  $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .
- Mit Vorglättung:  $\|K_{h,H}Se^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|Se^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .
- Gilt  $\|Se^h - I_H^h e^H\|_{A_h} \leq \eta \|e^h\|_{A_h}$  folgt  $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} \leq \eta$ .  $S$  muss kein Glättungsoperator im Sinne von  $\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2$  sein.

- Variationsprinzip:  $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .
- Mit Vorglättung:  $\|K_{h,H}S e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|S e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ .
- Gilt  $\|S e^h - I_H^h e^H\|_{A_h} \leq \eta \|e^h\|_{A_h}$  folgt  $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} \leq \eta$ .  $S$  muss kein Glättungsoperator im Sinne von  $\|S e\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2$  sein.
- Durch eine geschickte Wahl von  $S$  und  $I_H^h$  können wir  $\eta$  beliebig reduzieren.

- Die Matrix  $A_h$  kann geschickt in Blockform notiert werden:

$$A_h u = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_c \end{pmatrix} = f$$

- Die Matrix  $A_h$  kann geschickt in Blockform notiert werden:

$$A_h u = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_c \end{pmatrix} = f$$

- $I_H^h = \begin{pmatrix} I_{FC} & I_{CC} \end{pmatrix}^T$  und  $e_F = I_{FC} e_C$ .

- Die Matrix  $A_h$  kann geschickt in Blockform notiert werden:

$$A_h u = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_c \end{pmatrix} = f$$

- $I_H^h = \begin{pmatrix} I_{FC} & I_{CC} \end{pmatrix}^T$  und  $e_F = I_{FC} e_C$ .
- Wir können bei geeigneter Wahl der feinen und groben Indizes  $A_{FF}$  stark diagonal dominant wählen, d.h.

$$a_{ii} - \sum_{j \in F, j \neq i} |a_{ij}| \geq \delta a_{ii}$$

bei fixiertem  $\delta > 0$ . Dies ist erfüllt mit  $\delta = 1/\tau$ .

- Sei  $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$  eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt  $u_C$  fixiert halten wollen.

- Sei  $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$  eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt  $u_C$  fixiert halten wollen.
- Gauss-Seidel auf  $A_{FF}u_F + A_{FC}u_C = f_F$  angewandt ergibt für den Fehler

$$\bar{e}_F = S_{FF}e_F - (I_{FF} - S_{FF})A_{FF}^{-1}A_{FC}e_C$$

mit  $S_{FF} = I_{FF} - Q_{FF}^{-1}A_{FF}$ .

- Sei  $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$  eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt  $u_C$  fixiert halten wollen.
- Gauss-Seidel auf  $A_{FF}u_F + A_{FC}u_C = f_F$  angewandt ergibt für den Fehler

$$\bar{e}_F = S_{FF}e_F - (I_{FF} - S_{FF}) A_{FF}^{-1} A_{FC} e_C$$

mit  $S_{FF} = I_{FF} - Q_{FF}^{-1} A_{FF}$ .

- So erhalten wir den Glättungsoperator

$$S_h = \begin{pmatrix} S_{FF} & (S_{FF} - I_{FF}) A_{FF}^{-1} A_{FC} \\ 0 & I_{CC} \end{pmatrix}.$$

- Sei  $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$  eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt  $u_C$  fixiert halten wollen.
- Gauss-Seidel auf  $A_{FF}u_F + A_{FC}u_C = f_F$  angewandt ergibt für den Fehler

$$\bar{e}_F = S_{FF}e_F - (I_{FF} - S_{FF})A_{FF}^{-1}A_{FC}e_C$$

mit  $S_{FF} = I_{FF} - Q_{FF}^{-1}A_{FF}$ .

- So erhalten wir den Glättungsoperator

$$S_h = \begin{pmatrix} S_{FF} & (S_{FF} - I_{FF})A_{FF}^{-1}A_{FC} \\ 0 & I_{CC} \end{pmatrix}.$$

## Approximation einer Projektion

---

- $S_h^\nu(e_F, e_C) \rightarrow (\hat{e}, e_C)$  für  $\nu \rightarrow \infty$  und für alle  $(e_F, e_C)$ . Dabei gilt  $A_{FF}\hat{e} + A_{FC}e_C = 0$ .
- Die Wirkung von  $S_h^n \nu$  auf  $e_F$  kann also als Approximation für einen Projektionsoperator in den Raum  $R(A_{FF}^{-1} A_{FC})$  verstanden werden. Insbesondere gilt auch  $S_h e = e$  für alle  $e = (e_F, e_C)$ , falls  $e_F \in R(A_{FF}^{-1} A_{FC})$ .
- In der Praxis kaum  $n > 2$ , da die entsprechenden Galerkinoperatoren sonst aufgefüllt würden.

# Grenzen der Theorie und offene Probleme

---

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.

# Grenzen der Theorie und offene Probleme

---

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.
- Diverse Tricks nötig, um die entsprechenden Eigenschaften der Matrizen auch für die ungeordneten Galerkin Operatoren der Grobgitter zu garantieren.

# Grenzen der Theorie und offene Probleme

---

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.
- Diverse Tricks nötig, um die entsprechenden Eigenschaften der Matrizen auch für die ungeordneten Galerkin Operatoren der Grobgitter zu garantieren.
- Zu viele Ergebnisse sind heuristisch motiviert.

# Grenzen der Theorie und offene Probleme

---

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.
- Diverse Tricks nötig, um die entsprechenden Eigenschaften der Matrizen auch für die ungeordneten Galerkin Operatoren der Grobgitter zu garantieren.
- Zu viele Ergebnisse sind heuristisch motiviert.