Theoretische Grundlagen von AMG, Teil 1

K. Stüben

Appendix A von U. TROTTENBERG, C. OOSTERLEE, AND A. SCHÜLLER,
Multigrid, Academic Press, London, 2000.

Johanna Ziegel, Zürich im Dezember 2003

Stärken von AMG

- Es ist **robust**: Ein Ansatz funktioniert für grosse Klassen von Matrizen.

Stärken von AMG

- Es ist **robust**: Ein Ansatz funktioniert für grosse Klassen von Matrizen.
- Es ist in komplexen geometrischen Situationen anwendbar, da es nur mit Informationen arbeitet, die in der Matrix enthalten sind.

- Es ist **robust**: Ein Ansatz funktioniert für grosse Klassen von Matrizen.
- Es ist in komplexen geometrischen Situationen anwendbar, da es nur mit Informationen arbeitet, die in der Matrix enthalten sind.
- Es ist anwendbar in Situationen ohne jeglichen geometrischen Hintergrund.

Inhalt

- Geometrisches versus algebraisches Mehrgitterverfahren

Inhalt

- Geometrisches versus algebraisches Mehrgitterverfahren
- Erläuterung des formalen Rahmens des Verfahrens

Inhalt

- Geometrisches versus algebraisches Mehrgitterverfahren
- Erläuterung des formalen Rahmens des Verfahrens
- Variationsprinzip für positiv definite Probleme

Inhalt

- Geometrisches versus algebraisches Mehrgitterverfahren
- Erläuterung des formalen Rahmens des Verfahrens
- Variationsprinzip für positiv definite Probleme
- Algebraische Glättung

Geometrisches versus algebraisches Mehrgitterverfahren

Ziel: Effizientes Zusammenspiel von Glättung und Grobgitterkorrektur

Geometrisches versus algebraisches Mehrgitterverfahren

Ziel: Effizientes Zusammenspiel von Glättung und Grobgitterkorrektur

Geometrisches Mehrgitter:

- Fixierte Grobgitterkorrektur
- Anpassung des Glättungsprozesses
- **Gitter-Gleichungen**

$$L^h u^h = f^h$$

- Gitter-Hierarchie gegeben

Geometrisches versus algebraisches Mehrgitterverfahren

Ziel: Effizientes Zusammenspiel von Glättung und Grobgitterkorrektur

Geometrisches Mehrgitter:

- Fixierte Grobgitterkorrektur
- Anpassung des Glättungsprozesses
- **Gitter-Gleichungen**

$$L^h u^h = f^h$$

- Gitter-Hierarchie gegeben

Algebraisches Mehrgitter:

- Fixierter Glättungsprozess
- Anpassung der Grobgitterkorrektur
- **Algebraisches System**

$$\sum_j a_{ij}^h u_j^h = f_i^h$$

- Keine Gitter-Hierarchie gegeben

- **Ausgangsgleichung:**

$$A_h u^h = f^h \text{ oder } \sum_{j \in \Omega^h} a_{ij}^h u_j^h = f_i^h \ (i \in \Omega^h)$$

wobei Ω^h Indexmenge, A^h eine symmetrische, positiv definite M-Matrix

- **Ausgangsgleichung:**

$$A_h u^h = f^h \text{ oder } \sum_{j \in \Omega^h} a_{ij}^h u_j^h = f_i^h \; (i \in \Omega^h)$$

wobei Ω^h Indexmenge, A^h eine symmetrische, positiv definite M-Matrix

- Um die geometrische Herkunft vieler Probleme im algebraischen Rahmen darstellen zu können, führt man **fiktive Gitter** ein:

  Man identifiziert jeden Punkt $i \in \Omega^h$ mit der Variable u_i^h. Zwei Punkte sind verbunden, falls $a_{ij} \neq 0$.

Konstruktion des Grobgittersystems

- Zerlegung von $\Omega^h = F^h \cup C^h$ mit $F^h \cap C^h = \emptyset$, wobei $\Omega^H := C^h$ die Grobgittervariablen bezeichnet.

Konstruktion des Grobgittersystems

- Zerlegung von $\Omega^h = F^h \cup C^h$ mit $F^h \cap C^h = \emptyset$, wobei $\Omega^H := C^h$ die Grobgittervariablen bezeichnet.

- **Restriktions-Operator:** $I_h^H : u^h \longrightarrow u^H$

  Interpolations-Operator: $I_H^h : u^H \longrightarrow u^h$

  Für den Fall, dass A symmetrisch und positiv definit ist, sei $I_h^H = (I_H^h)^T$. Dann ist auch der **Galerkinoperator**

$$A_H := I_h^H A_h I_H^h$$

  symmetrisch und positiv definit.

Konstruktion des Grobgittersystems

- Zerlegung von $\Omega^h = F^h \cup C^h$ mit $F^h \cap C^h = \emptyset$, wobei $\Omega^H := C^h$ die Grobgittervariablen bezeichnet.

- **Restriktions-Operator:** $I_h^H : u^h \to u^H$

  Interpolations-Operator: $I_H^h : u^H \to u^h$

  Für den Fall, dass A symmetrisch und positiv definit ist, sei $I_h^H = (I_H^h)^T$. Dann ist auch der **Galerkinoperator**

  $$A_H := I_h^H A_h I_H^h$$

  symmetrisch und positiv definit.

- Damit ergibt sich das Grobgittersystem

  $$A_H e^H = r^H \text{ oder } \sum_{j \in \Omega^H} a_{ij}^H e_j^H = r_i^H \ (i \in \Omega^H)$$

Form der Interpolationen

- Alle Interpolationen $e^h = I_H^h e^H$ sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls} \quad i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls} \quad i \in F^h \end{cases}$$

wobei $P_i^h \subset C^h$ die Menge der Interpolationsvariablen ist.

- **Glättungsprozess** mit **linearem Glättungsoperator** S_h:

$$u^h \longrightarrow \bar{u}^h = S_h u^h + (I_h - S_h) A_h^{-1} f^h$$

Für den Fehler $e^h = u_*^h - u^h$ gilt: $e^h \longrightarrow \bar{e}^h = S_h e^h$

- **Glättungsprozess** mit **linearem Glättungsoperator** S_h:

$$u^h \to \bar{u}^h = S_h u^h + (I_h - S_h) A_h^{-1} f^h$$

Für den Fehler $e^h = u_*^h - u^h$ gilt: $e^h \to \bar{e}^h = S_h e^h$

- Das algebraische Mehrgitterverfahren verwendet das Gauss-Seidel-Verfahren, d. h.

$$S_h = I_h - Q_h^{-1} A_h,$$

wobei Q_h das untere Dreieck inklusive der Diagonalen von A_h bezeichnet.

- **Glättungsprozess** mit **linearem Glättungsoperator** S_h:

$$u^h \to \bar{u}^h = S_h u^h + (I_h - S_h) A_h^{-1} f^h$$

Für den Fehler $e^h = u_*^h - u^h$ gilt: $e^h \to \bar{e}^h = S_h e^h$

- Das algebraische Mehrgitterverfahren verwendet das Gauss-Seidel-Verfahren, d. h.

$$S_h = I_h - Q_h^{-1} A_h,$$

wobei Q_h das untere Dreieck inklusive der Diagonalen von A_h bezeichnet.

- Es gilt also $\bar{u}^h = (I_h - Q_h^{-1} A_h) u^h - Q_h^{-1} f^h$.

Zweigitter-Iteration

- Grobgitter-Korrekturschritt:

$$\bar{u}^h = u^h + I_H^h e^H, \text{ wobei } A_H e^H = I_h^H (f^h - A_h u^h) = r^H$$

Zweigitter-Iteration

- Grobgitter-Korrekturschritt:

$$\bar{u}^h = u^h + I_H^h e^H, \text{ wobei } A_H e^H = I_h^H (f^h - A_h u^h) = r^H$$

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$ als Grobgitter-Korrekturoperator.

- Grobgitter-Korrekturschritt:

$$\bar{u}^h = u^h + I_H^h e^H, \text{ wobei } A_H e^H = I_h^H (f^h - A_h u^h) = r^H$$

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$ als Grobgitter-Korrekturoperator.

- Kompletter Zweigitter-Iterationsschritt:

$$\bar{e}^h = M_{h,H} e^h \text{ mit } M_{h,H}(\nu_1, \nu_2) := \underbrace{S_h^{\nu_2}}_{\text{Nachglättung}} K_{h,H} \underbrace{S_h^{\nu_1}}_{\text{Vorglättung}}$$

Variationsprinzip - Eigenschaften von $K_{h,H}$

- $K_{h,H}$ ist symmetrisch bezüglich der Energie-Norm $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.

Variationsprinzip - Eigenschaften von $K_{h,H}$

- $K_{h,H}$ ist symmetrisch bezüglich der Energie-Norm $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Es gilt $K_{h,H}^2 = K_{h,H}$.

Variationsprinzip - Eigenschaften von $K_{h,H}$

- $K_{h,H}$ ist symmetrisch bezüglich der Energie-Norm $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Es gilt $K_{h,H}^2 = K_{h,H}$.
- Also ist $K_{h,H}$ ein orthogonaler Projektor bezüglich $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.

Variationsprinzip - Eigenschaften von $K_{h,H}$

- $K_{h,H}$ ist symmetrisch bezüglich der Energie-Norm $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Es gilt $K_{h,H}^2 = K_{h,H}$.
- Also ist $K_{h,H}$ ein orthogonaler Projektor bezüglich $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Daher gilt:
  - ⋆ $\|K_{h,H}\|_{A_h} = 1$
  - ⋆ Für alle e^h : $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ (Variationsprinzip)

Variationsprinzip - Eigenschaften von $K_{h,H}$

- $K_{h,H}$ ist symmetrisch bezüglich der Energie-Norm $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Es gilt $K_{h,H}^2 = K_{h,H}$.
- Also ist $K_{h,H}$ ein orthogonaler Projektor bezüglich $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Daher gilt:
  - ⋆ $\|K_{h,H}\|_{A_h} = 1$
  - ⋆ Für alle e^h : $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ (Variationsprinzip)
- Galerkin-basierte Grobgitter-Korrekturen minimieren die Energie-Norm des Fehlers bezüglich aller Elemente aus $\mathcal{R}(I_H^h)$.

Variationsprinzip - Eigenschaften von $K_{h,H}$

- $K_{h,H}$ ist symmetrisch bezüglich der Energie-Norm $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Es gilt $K_{h,H}^2 = K_{h,H}$.
- Also ist $K_{h,H}$ ein orthogonaler Projektor bezüglich $(\cdot,\cdot)_{A_h}$.
- Daher gilt:
  - ⋆ $\|K_{h,H}\|_{A_h} = 1$
  - ⋆ Für alle e^h : $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$ (Variationsprinzip)
- Galerkin-basierte Grobgitter-Korrekturen minimieren die Energie-Norm des Fehlers bezüglich aller Elemente aus $\mathcal{R}(I_H^h)$.
- Als triviale Konsequenz ergibt sich, dass eine Zweigitter-Methode niemals divergieren kann, falls $\|S\|_{A_h} < 1$.

Erweiterung des Zweigitter-Prozesses zu einem Mehrgitter-Prozess

- $A_h u^h = f^h \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad A_H e^H = r^H \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad \cdots$

Erweiterung des Zweigitter-Prozesses zu einem Mehrgitter-Prozess

- $A_h u^h = f^h \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad A_H e^H = r^H \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad \cdots$
- $\bar{e}^h = \tilde{K}_{h,H} e^h = e^h - I_H^h \tilde{e}^H \quad \xleftarrow{\text{Interpolation}}$ Näherung: $\tilde{e}^H \quad \xleftarrow{\text{Interpolation}} \quad \cdots$

Erweiterung des Zweigitter-Prozesses zu einem Mehrgitter-Prozess

- $A_h u^h = f^h \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad A_H e^H = r^H \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad \cdots$
- $\bar{e}^h = \tilde{K}_{h,H} e^h = e^h - I_H^h \tilde{e}^H \quad \xleftarrow{\text{Interpolation}} \quad$ Näherung: $\tilde{e}^H \quad \xleftarrow{\text{Interpolation}} \quad \cdots$
- Falls die exakte Grobgitter-Korrektur e^H ersetzt wird durch eine beliebige Approximation $\tilde{e}^H$, die $\|e^H - \tilde{e}^H\|_{A_H} \leq \|e^H\|_{A_H}$ erfüllt, dann gilt für den genäherten Grobgitter-Korrekturoperator $\|\tilde{K}_{h,H}\|_{A_h} \leq 1$.

Erweiterung des Zweigitter-Prozesses zu einem Mehrgitter-Prozess

- $A_h u^h = f^h \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad A_H e^H = r^H \quad \xrightarrow{\text{Restriktion}} \quad \cdots$

- $\bar{e}^h = \tilde{K}_{h,H} e^h = e^h - I_H^h \tilde{e}^H \quad \xleftarrow{\text{Interpolation}}$ Näherung: $\tilde{e}^H \quad \xleftarrow{\text{Interpolation}} \quad \cdots$

- Falls die exakte Grobgitter-Korrektur e^H ersetzt wird durch eine beliebige Approximation $\tilde{e}^H$, die $\|e^H - \tilde{e}^H\|_{A_H} \leq \|e^H\|_{A_H}$ erfüllt, dann gilt für den genäherten Grobgitter-Korrekturoperator $\|\tilde{K}_{h,H}\|_{A_h} \leq 1$.

- Dieses Resultat sagt leider nichts über die Effizienz eines V-Zyklus aus, aber es garantiert zumindest die Konvergenz des Verfahrens.

Geometrisches Mehrgitter:

- Ein Fehler ist glatt, falls er bezüglich eines vordefinierten gröberen Gitters approximiert werden **kann**.

Geometrisches Mehrgitter:

- Ein Fehler ist glatt, falls er bezüglich eines vordefinierten gröberen Gitters approximiert werden **kann**.

- Im geometrischen Mehrgitter ist der Begriff der Glattheit eines Fehlers also nur **bezüglich eines gröberen Gitters** definiert.

Geometrisches Mehrgitter:

- Ein Fehler ist glatt, falls er bezüglich eines vordefinierten gröberen Gitters approximiert werden **kann**.

- Im geometrischen Mehrgitter ist der Begriff der Glattheit eines Fehlers also nur **bezüglich eines gröberen Gitters** definiert.

- Also betrifft auch die "Glättungseigenschaft" eines gegebenen Glättungsprozesses immer zwei aufeinanderfolgende Gitterlevel.

Glatte Fehler

Geometrisches Mehrgitter:

- Ein Fehler ist glatt, falls er bezüglich eines vordefinierten gröberen Gitters approximiert werden **kann**.
- Im geometrischen Mehrgitter ist der Begriff der Glattheit eines Fehlers also nur **bezüglich eines gröberen Gitters** definiert.
- Also betrifft auch die “Glättungseigenschaft“ eines gegebenen Glättungsprozesses immer zwei aufeinanderfolgende Gitterlevel.

Algebraisches Mehrgitter:

- Es gibt keine vordefinierte Gitter-Hierarchie.

Glatte Fehler

Geometrisches Mehrgitter:

- Ein Fehler ist glatt, falls er bezüglich eines vordefinierten gröberen Gitters approximiert werden **kann**.
- Im geometrischen Mehrgitter ist der Begriff der Glattheit eines Fehlers also nur **bezüglich eines gröberen Gitters** definiert.
- Also betrifft auch die "Glättungseigenschaft" eines gegebenen Glättungsprozesses immer zwei aufeinanderfolgende Gitterlevel.

Algebraisches Mehrgitter:

- Es gibt keine vordefinierte Gitter-Hierarchie.
- Ein Fehler e, der $S_h e \approx e$ erfüllt, wird als **algebraisch glatt** definiert.

Geometrisches Mehrgitter:

- Ein Fehler ist glatt, falls er bezüglich eines vordefinierten gröberen Gitters approximiert werden **kann**.
- Im geometrischen Mehrgitter ist der Begriff der Glattheit eines Fehlers also nur **bezüglich eines gröberen Gitters** definiert.
- Also betrifft auch die “Glättungseigenschaft“ eines gegebenen Glättungsprozesses immer zwei aufeinanderfolgende Gitterlevel.

Algebraisches Mehrgitter:

- Es gibt keine vordefinierte Gitter-Hierarchie.
- Ein Fehler e, der $S_h e \approx e$ erfüllt, wird als **algebraisch glatt** definiert.
- Ein Fehler heisst also **glatt**, falls er auf einem gröberen Gitter approximiert werden **muss**, um die Konvergenz des Verfahrens zu beschleunigen.

Charakterisierung algebraisch glatter Fehler

- Glatte Fehler lassen sich durch die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$, wobei $D := diag(A)$, wie folgt charakterisieren.

Charakterisierung algebraisch glatter Fehler

- Glatte Fehler lassen sich durch die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$, wobei $D := diag(A)$, wie folgt charakterisieren.
  - ⋆ Es gilt für alle e: $\|e\|_V^2 \leq \rho(D^{-1}A)\|e\|_A^2$.

Charakterisierung algebraisch glatter Fehler

- Glatte Fehler lassen sich durch die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$, wobei $D := diag(A)$, wie folgt charakterisieren.
  - ⋆ Es gilt für alle e: $\|e\|_V^2 \leq \rho(D^{-1}A)\|e\|_A^2$.
  - ⋆ Für Eigenvektoren ϕ von $D^{-1}A$ ergibt sich: $\|\phi\|_V^2 = \lambda\|\phi\|_A^2$.

Charakterisierung algebraisch glatter Fehler

- Glatte Fehler lassen sich durch die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$, wobei $D := diag(A)$, wie folgt charakterisieren.
  - ⋆ Es gilt für alle e: $\|e\|_V^2 \leq \rho(D^{-1}A)\|e\|_A^2$.
  - ⋆ Für Eigenvektoren ϕ von $D^{-1}A$ ergibt sich: $\|\phi\|_V^2 = \lambda\|\phi\|_A^2$.
- Die kleinsten Eigenwerte λ von $D^{-1}A$ verursachen typischerweise die langsame Konvergenz des Relaxationsverfahrens. Die zugehörigen Eigenvektoren ϕ korrespondieren zu algebraisch glatten Fehlern.

Charakterisierung algebraisch glatter Fehler

- Glatte Fehler lassen sich durch die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$, wobei $D := diag(A)$, wie folgt charakterisieren.
  - ⋆ Es gilt für alle e: $\|e\|_V^2 \leq \rho(D^{-1}A)\|e\|_A^2$.
  - ⋆ Für Eigenvektoren ϕ von $D^{-1}A$ ergibt sich: $\|\phi\|_V^2 = \lambda\|\phi\|_A^2$.
- Die kleinsten Eigenwerte λ von $D^{-1}A$ verursachen typischerweise die langsame Konvergenz des Relaxationsverfahrens. Die zugehörigen Eigenvektoren ϕ korrespondieren zu algebraisch glatten Fehlern.
- Mit den Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_V$ lassen sich also algebraisch glatte Fehler identifizieren.

Charakterisierung algebraisch glatter Fehler

- Glatte Fehler lassen sich durch die Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$, wobei $D := diag(A)$, wie folgt charakterisieren.
  - ⋆ Es gilt für alle e: $\|e\|_V^2 \leq \rho(D^{-1}A)\|e\|_A^2$.
  - ⋆ Für Eigenvektoren ϕ von $D^{-1}A$ ergibt sich: $\|\phi\|_V^2 = \lambda\|\phi\|_A^2$.
- Die kleinsten Eigenwerte λ von $D^{-1}A$ verursachen typischerweise die langsame Konvergenz des Relaxationsverfahrens. Die zugehörigen Eigenvektoren ϕ korrespondieren zu algebraisch glatten Fehlern.
- Mit den Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_V$ lassen sich also algebraisch glatte Fehler identifizieren.
- Angewandt auf $e = \phi$, wobei $D^{-1}A\phi = \lambda\phi$, $\lambda \approx 0$, gilt $\|\phi\|_V \ll \|\phi\|_A$.

Glättungeigenschaft der Relaxation

- Ein Glättungsoperator S erfüllt die **Glättungseigenschaft** bezüglich einer symmetrisch und positiv definiten Matrix A, falls es ein $\sigma > 0$ gibt, so dass für alle e gilt:

$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2$$

Glättungeigenschaft der Relaxation

- Ein Glättungsoperator S erfüllt die **Glättungseigenschaft** bezüglich einer symmetrisch und positiv definiten Matrix A, falls es ein $\sigma > 0$ gibt, so dass für alle e gilt:

$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2$$

- S erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich einer Klasse $\mathcal{A}$ von Matrizen, falls die Glättungseigenschaft für alle $A \in \mathcal{A}$ mit dem gleichen σ erfüllt ist.

Glättungeigenschaft der Relaxation

- Ein Glättungsoperator S erfüllt die **Glättungseigenschaft** bezüglich einer symmetrisch und positiv definiten Matrix A, falls es ein $\sigma > 0$ gibt, so dass für alle e gilt:
$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma\|e\|_V^2$$
- S erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich einer Klasse $\mathcal{A}$ von Matrizen, falls die Glättungseigenschaft für alle $A \in \mathcal{A}$ mit dem gleichen σ erfüllt ist.
- Wenn S die Glättungseigenschaft erfüllt, dann reduziert S den Fehler e effizient, so lange $\|e\|_A$ in der Grössenordnung von $\|e\|_V$ ist.

Glättungeigenschaft der Relaxation

- Ein Glättungsoperator S erfüllt die **Glättungseigenschaft** bezüglich einer symmetrisch und positiv definiten Matrix A, falls es ein $\sigma > 0$ gibt, so dass für alle e gilt:
$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2$$

- S erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich einer Klasse $\mathcal{A}$ von Matrizen, falls die Glättungseigenschaft für alle $A \in \mathcal{A}$ mit dem gleichen σ erfüllt ist.

- Wenn S die Glättungseigenschaft erfüllt, dann reduziert S den Fehler e effizient, so lange $\|e\|_A$ in der Grössenordnung von $\|e\|_V$ ist.

- S ist sehr ineffizient, falls $\|e\|_V \ll \|e\|_A$, d. h. falls der Fehler algebraisch glatt ist.

Gauss-Seidel-Glättung

- Gemäss folgendem Satz erfüllt das Gauss-Seidel-Verfahren die Glättungseigenschaft.

Gauss-Seidel-Glättung

- Gemäss folgendem Satz erfüllt das Gauss-Seidel-Verfahren die Glättungseigenschaft.

- **Satz:** Sei A symmetrisch und positiv definit. Sei $w = (w_i) > 0$ ein beliebiger Vektor. Setze

$$\gamma_- = \max_i \{\frac{1}{w_i a_{ii}} \sum_{j<i} w_j \mid a_{ij} \mid\}, \quad \gamma_+ = \max_i \{\frac{1}{w_i a_{ii}} \sum_{j>i} w_j \mid a_{ij} \mid\}.$$

Dann erfüllt das Gauss-Seidel-Verfahren die Glättungseigenschaft mit

$$\sigma = \frac{1}{(1+\gamma_-)(1+\gamma_+)}.$$

M-Matrizen

- Das Gauss-Seidel-Verfahren erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich der Klasse der M-Matrizen mit $\sigma = 1/4$.

M-Matrizen

- Das Gauss-Seidel-Verfahren erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich der Klasse der M-Matrizen mit $\sigma = 1/4$.

- Zu jeder M-Matrix A existiert ein Vektor $z > 0$ mit $Az > 0$.

M-Matrizen

- Das Gauss-Seidel-Verfahren erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich der Klasse der M-Matrizen mit $\sigma = 1/4$.
- Zu jeder M-Matrix A existiert ein Vektor $z > 0$ mit $Az > 0$.
- Setze $w = z$ im vorherigen Satz. Dann gilt

$$\gamma_- = \max_i \{\frac{1}{z_i a_{ii}} \sum_{j<i} z_j \mid a_{ij} \mid\}$$

M-Matrizen

- Das Gauss-Seidel-Verfahren erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich der Klasse der M-Matrizen mit $\sigma = 1/4$.

- Zu jeder M-Matrix A existiert ein Vektor $z > 0$ mit $Az > 0$.

- Setze $w = z$ im vorherigen Satz. Dann gilt

$$\gamma_- = \max_i \{ \frac{1}{z_i a_{ii}} \sum_{j<i} z_j \mid a_{ij} \mid \} = \max_i \{ 1 - \frac{1}{z_i a_{ii}} \sum_{j \leq i} z_j a_{ij} \} < 1$$

- Das Gauss-Seidel-Verfahren erfüllt die Glättungseigenschaft bezüglich der Klasse der M-Matrizen mit $\sigma = 1/4$.
- Zu jeder M-Matrix A existiert ein Vektor $z > 0$ mit $Az > 0$.
- Setze $w = z$ im vorherigen Satz. Dann gilt

$$\gamma_- = \max_i \{\frac{1}{z_i a_{ii}} \sum_{j<i} z_j \mid a_{ij} \mid\} = \max_i \{1 - \frac{1}{z_i a_{ii}} \sum_{j \leq i} z_j a_{ij}\} < 1$$

Analog erhält man $\gamma_+ < 1$.

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Algebraisch glatte Fehler sind charakterisiert durch $Se \approx e$.

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Algebraisch glatte Fehler sind charakterisiert durch $Se \approx e$.
- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt

$$u_i \;\longrightarrow\; \bar{u}_i = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii} + f_i - \sum_j a_{ij} u_j)$$

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Algebraisch glatte Fehler sind charakterisiert durch $Se \approx e$.
- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt

$$u_i \;\longrightarrow\; \bar{u}_i = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii} + f_i - \sum_j a_{ij} u_j) = u_i + \frac{r_i}{a_{ii}}$$

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Algebraisch glatte Fehler sind charakterisiert durch $Se \approx e$.
- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt

$$u_i \;\longrightarrow\; \bar{u}_i = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii} + f_i - \sum_j a_{ij} u_j) = u_i + \frac{r_i}{a_{ii}}$$

oder bezüglich des Fehlers e

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Algebraisch glatte Fehler sind charakterisiert durch $Se \approx e$.

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt

$$u_i \;\longrightarrow\; \bar{u}_i = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii} + f_i - \sum_j a_{ij}u_j) = u_i + \frac{r_i}{a_{ii}}$$

  oder bezüglich des Fehlers e

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls $Se \approx e$, folgt $\mid r_i \mid \ll a_{ii} \mid e_i \mid$.

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Algebraisch glatte Fehler sind charakterisiert durch $Se \approx e$.
- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt

$$u_i \quad \longrightarrow \quad \bar{u}_i = \frac{1}{a_{ii}}(a_{ii} + f_i - \sum_j a_{ij}u_j) = u_i + \frac{r_i}{a_{ii}}$$

  oder bezüglich des Fehlers e

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls $Se \approx e$, folgt $\mid r_i \mid \ll a_{ii} \mid e_i \mid$.
- Auch wenn der Fehler e global noch sehr gross ist, kann man e_i lokal durch seine Nachbarwerte approximieren durch Lösen der Gleichung

$$(r_i =) \quad a_{ii}e_i + \sum_{j \in N_i} a_{ij}e_j = 0.$$

Nachglättung und Zweigitter-Konvergenz

- Betrachteter Operator: SK

Nachglättung und Zweigitter-Konvergenz

- Betrachteter Operator: SK
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.

Nachglättung und Zweigitter-Konvergenz

- Betrachteter Operator: SK
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.
- S erfüllt die Glättungseigenschaft

$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma\|e\|_V^2.$$

Nachglättung und Zweigitter-Konvergenz

- Betrachteter Operator: SK
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.
- S erfüllt die Glättungseigenschaft

$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma\|e\|_V^2.$$

Also arbeitet S umso effizienter je grösser $\|e\|_V$ im Verhältnis zu $\|e\|_A$ ist.

Nachglättung und Zweigitter-Konvergenz

- Betrachteter Operator: SK
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.
- S erfüllt die Glättungseigenschaft

$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma\|e\|_V^2.$$

  Also arbeitet S umso effizienter je grösser $\|e\|_V$ im Verhältnis zu $\|e\|_A$ ist.

- Minimal-Forderung: $\|e\|_V$ sollte von unten durch $\|e\|_A$ beschränkt sein.

Konvergenzabschätzung der Zweigitteriteration

Satz: S erfülle die Glättungeigenschaft. Die C/F-Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Konvergenzabschätzung der Zweigitteriteration

Satz: S erfülle die Glättungeigenschaft. Die C/F-Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Beweis: Aus der Glättungseigenschaft und $(\star)$ folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma \|Ke\|_V^2$$

Konvergenzabschätzung der Zweigitteriteration

Satz: S erfülle die Glättungeigenschaft. Die C/F-Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \le \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \ge \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \le \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Beweis: Aus der Glättungseigenschaft und $(\star)$ folgt

$$\|SKe\|_A^2 \le \|Ke\|_A^2 - \sigma\|Ke\|_V^2 \le (1 - \sigma/\tau)\|Ke\|_A^2$$

Konvergenzabschätzung der Zweigitteriteration

Satz: S erfülle die Glättungeigenschaft. Die C/F-Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Beweis: Aus der Glättungseigenschaft und $(\star)$ folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma\|Ke\|_V^2 \leq (1-\sigma/\tau)\|Ke\|_A^2 \leq (1-\sigma/\tau)\|e\|_A^2$$

$\square$

Alternatives Kriterium zu $(\star)$

- **Satz:** Falls die C/F-Zerlegung und die Interpolation I_H^h so gewählt sind, dass fuer alle e gilt
$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$
wobei τ unabhängig von e ist, dann ist $(\star)$ erfüllt.

Alternatives Kriterium zu $(\star)$

- **Satz:** Falls die C/F-Zerlegung und die Interpolation I_H^h so gewählt sind, dass fuer alle e gilt
$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$
wobei τ unabhängig von e ist, dann ist $(\star)$ erfüllt.

- **Interpretation:**

  $\star$ Das Gauss-Seidel-Verfahren erfüllt die Glättungseigenschaft fuer alle relevanten Klassen $\mathcal{A}$ von Matrizen.

Alternatives Kriterium zu $(\star)$

- **Satz:** Falls die C/F-Zerlegung und die Interpolation I_H^h so gewählt sind, dass fuer alle e gilt
$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$
wobei τ unabhängig von e ist, dann ist $(\star)$ erfüllt.

- **Interpretation:**
  - ⋆ Das Gauss-Seidel-Verfahren erfüllt die Glättungseigenschaft fuer alle relevanten Klassen $\mathcal{A}$ von Matrizen.
  - ⋆ Nach dem obigen Satz konvergiert das Zweigitter-Verfahren für alle Matrizen $A \in \mathcal{A}$, falls es einen (A-abhängigen) Interpolationsoperator gibt, so dass $\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2$ gilt mit einem von A unabhängigen τ.