

Vorlesung 401-1652-10L : Numerische Mathematik I

Frühlingssemester 2014 : Prof. Ralf Hiptmair (SAM, D-MATH)

[Vorlesungsniederschrift, Rohformat, URL: <http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2014/math/nm>]

IV. Numerische Quadratur

Aufgabe : Approximation $f \rightarrow \int_a^b f(x) dx$, $a \leq a < b \leq \infty$, gegeben, gestützt auf Punktauswertungen von $f \in C^0([a,b])$

↳ Verfügbar in prozeduraler Form function $y = f(x)$

Lineare Abbildung $C^0([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}$

Transformation des Quadraturfehlers :

$$E_{[a,b]}^{(n)}(f) = (b-a) E_{[0,1]}^{(n)}(\tilde{f}) \quad (4.0.E)$$

Fragestellung : Abschätzung des Quadraturfehlers (asymptotisch) in Abhängigkeit von n : kvgz. qualitativ & quantitativ

(3)

$n+1$ -Punkt Quadraturformel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx Q_{[a,b]}^{(n)}(f) := \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j),$$

$\alpha_j \in \mathbb{R}$: Gewichte, $a \leq x_j \leq b$: Knoten/Quadraturpunkte

Quadraturfehler: $E_{[a,b]}^{(n)}(f) := \int_a^b f(x) dx - Q_{[a,b]}^{(n)}(f)$ Lineares Funktional auf $C^0([a,b])$ ↳ (4.0.D)

Bem : Transformation von Quadraturformeln

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 \tilde{f}(\xi) d\xi$$

, Pullback $\tilde{f}(\xi) = f(a + \xi(b-a))$

$$Q_{[a,b]}^{(n)}(f) = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j)$$

$$\tilde{Q}^{(n)}(\tilde{f}) = \sum_{j=0}^n \tilde{\alpha}_j \tilde{f}(\xi_j), \quad x_j := a + \xi_j(b-a)$$

$$\alpha_j = (b-a) \tilde{\alpha}_j$$

▷ Es genügt, Quadraturformeln für ein Referenzintervall, z.B. $[0,1]$, anzugeben.

Def. 4.0.A (Kondition einer Quadraturformel)

Die Kondition einer Quadraturformel $Q_{[a,b]}^{(n)} : C^0([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\kappa(Q_{[a,b]}^{(n)}) := \sup_{f \in C^0([a,b])} \frac{|Q_{[a,b]}^{(n)}(f)|}{\|f\|_\infty}. \quad \begin{matrix} \text{Norm der linearen} \\ \text{Abbildung } Q^{(n)} : C^0([a,b]) \rightarrow \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$|Q^{(n)}(f)| \leq \sum_{j=0}^n |\alpha_j| |f(x_j)| \leq \|f\|_\infty \sum_{j=0}^n |\alpha_j|$$

Satz 4.0.C Die Kondition einer Quadraturformel

$$Q_{[a,b]}^{(n)}(f) := \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad x_j \in [a,b],$$

ist gegeben durch

$$\kappa(Q_{[a,b]}^{(n)}) = \sum_{j=0}^n |\alpha_j|.$$

" \geq " : Wähle $f : \|f\|_\infty = 1$, $f(x_j) = \operatorname{sgn}(\alpha_j)$

Bem : Bedeutung von $\operatorname{je}(Q)$; vgl. Rolle von $\tilde{\alpha}_j$ bei Interpolationsfehlerabschätzung

(4)

Satz 4.0.B (Quadraturfehlerabschätzung)

Die Quadraturformel $Q_{[a,b]}^{(n)}$ sei exakt für Funktionen aus $V \subset C^0([a,b])$. Dann gilt

$$|E^{(n)}(f)| := \left| \int_a^b f(x) dx - Q_{[a,b]}^{(n)}(f) \right| \leq (|b-a| + \kappa(Q_{[a,b]}^{(n)})) \inf_{v \in V} \|f - v\|_{\infty, [a,b]}.$$

\uparrow Bestapproximationsfehler

* $E^{(n)}(v) = 0$
 $\forall v \in V$

Beweis : $|E^{(n)}(f)| \stackrel{*}{=} |E^{(n)}(f-v)| = \left| \int_a^b f-v dx - Q^{(n)}(f-v) \right|$
 $\leq (b-a) \|f-v\|_{\infty} + \kappa(Q^{(n)}) \|f-v\|_{\infty} \quad \forall v \in V$ \square

4.1. Interpolatorische Quadraturformeln

Nodaler Projektionsoperator (3.4.6) : $P_W : C^0([a,b]) \rightarrow W \subset C^0([a,b])$

zur Knotenmenge $\mathcal{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$

$$\int_a^b f(x) dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mit } l_j \in W, l_j(x_k) = \delta_{jk}}}{\approx} \int_a^b P_W(f)(x) dx = \sum_{j=0}^n \underbrace{\int_a^b l_j(x) dx}_{=: \omega_j} \cdot f(x_j)$$

(5)

Lemma (Peano-Kernsatz)

Für ein stetiges lineares Funktional $E : C^0[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_n \subset \text{Kern}(E)$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$E(f) = \int_a^b k_n(t) f^{(n+1)}(t) dt \quad \forall f \in C^{n+1}([a,b]),$$

mit stetigen **Kernfunktionen**

$$k_n(t) = \frac{1}{(n+1)!} E[(\max\{0, \cdot - t\})^n], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis : Taylorformel (\rightarrow Analysis): für $f \in C^{n+1}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$, $x, a \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (x-a)^k + \int_a^b \frac{1}{(n+1)!} (\max\{0, x-t\})^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

$$\Rightarrow E f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) E(\underbrace{(x-a)^k}_{\in \mathbb{P}_n}) + \int_a^b \frac{1}{(n+1)!} \underbrace{E(\max\{0, \cdot - t\}^n)}_{\notin \mathbb{P}_n} f^{(n+1)}(t) dt$$

\square

Für $E \in E^{(n)}$: Quadraturfehlerfunktional zu Quadraturfamilie der Ordnung m

Speziell : $P_W \stackrel{!}{=} \text{Polynominterpolation}$, $W = \mathbb{P}_n$ (Polynome)
 \Rightarrow Polynome in interpolatorische Quadraturformeln, exakt für $f \in \mathbb{P}_n$

Def. 4.10 (Ordnung einer Quadraturformel)

Eine Quadraturformel $Q_{[a,b]}^{(n)} : C^0([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Ordnung $n+1$, falls

$$Q_{[a,b]}^{(n)}(p) = \int_a^b p(x) dx \quad \forall p \in \mathbb{P}_n,$$

d.h. die Quadraturformel ist exakt für alle Polynome vom Grad $\leq n$.

→ ▷ Quadraturfehlerabschätzungen auf $[0,1]$: $f \in C^{m+1}([a,b])$

$$Q^{(n)} \text{ Ordnung } m+1 \in \mathbb{N}_0 \stackrel{(4.0.B)}{\Rightarrow} |E^{(n)}(f)| \leq (1+\kappa(Q^{(n)})) \inf_{p \in \mathbb{P}_m} \|f-p\|_{\infty}$$

$$\text{Speziell : (3.30)} \Rightarrow |E^{(n)}(f)| \leq (1+\kappa(Q^{(n)})) \frac{1}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} \|w_{m+1}\|_{\infty}$$

(p Interpolationspolynom zu \mathcal{N})

$$p \stackrel{!}{=} \text{Tchebyscheff-Interpolant} \Rightarrow |E^{(n)}(f)| \leq (1+\kappa(Q^{(n)})) \frac{2^{-m}}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty} \quad (6)$$

$$E^{(n)}(f) = f^{(n+1)}(\bar{x}) \int_a^b k_m(t) dt \quad \text{für ein } a \leq \bar{x} \leq b$$

↑ Mittelwertsatz

$$|E^{(n)}(f)| \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b |k_m(t)| dt$$

Bem : Transformation von Quadraturfehlerabschätzungen

$$(4.0.E) \quad |E_{[a,b]}^{(n)}(f)| = |b-a| |E_{[0,1]}^{(n)}(\hat{f})|, \quad f \in C^m([a,b])$$

Annahme
(Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$)

$$\leq |b-a| C \|f^{(m)}\|_{\infty, [0,1]} \quad (C > 0 \text{ unabhängig von } f, a, b)$$

[Kettenregel : $\hat{f}^{(m)} = (b-a)^m f^{(m)}$]

$$\leq C |b-a|^{m+1} \|f^{(m)}\|_{\infty, [a,b]} \quad (4.0.F)$$

Bem : Transformation einer Quadraturformel ändert ihre Ordnung nicht !

[Grund: \mathbb{P}_n ist invariant unter affinen Pullback !]

Bsp : Äquidistante polynomiale interpolatorische Quadraturformeln
 $\hookrightarrow x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $j = 0, \dots, n$

$n=1$: Trapezregel

$$x_0 = a, x_1 = b, \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}(b-a)$$

\Rightarrow Ordnung 2

$$n=2 : x_0 = a, x_1 = \frac{1}{2}(b-a), x_2 = b$$

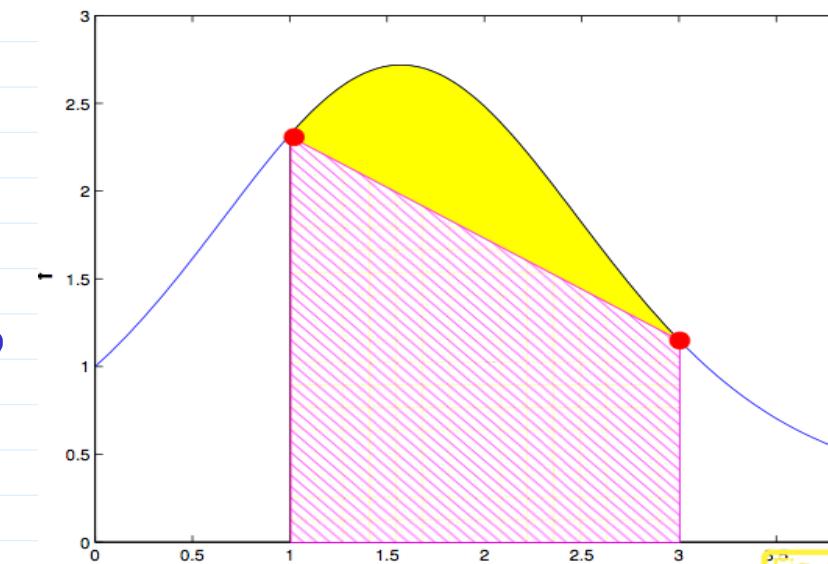
$$\alpha_0 = \frac{1}{6}, \alpha_1 = \frac{4}{6}, \alpha_2 = \frac{1}{6}$$

Simpsonregel

\Rightarrow Ordnung 3

Verifizierte: $Q(x^3) = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = \int_a^b x^3 dx$

\hookrightarrow genügt $a=0, b=1$ zu betrachten



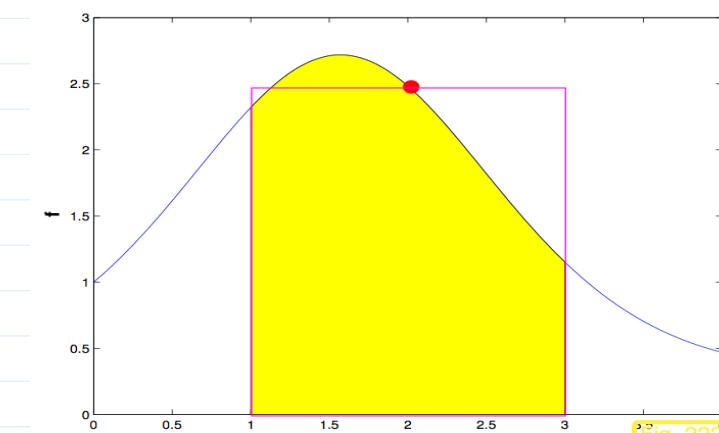
Allgemein: Newton-Cotes-Formel

n		ξ_j	$\alpha_j/(b-a)$	$I_{[a,b]}[f] - Q_{[a,b]}^{(n)}[f]$
1	Trapezregel	0, 1	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$
2	Simpson-Regel	0, $\frac{1}{2}$, 1	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$-\frac{1}{90}(\frac{b-a}{2})^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$ -Regel	0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$-\frac{3}{80}(\frac{b-a}{3})^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$-\frac{8}{945}(\frac{b-a}{4})^7 f^{(6)}(\xi)$

↑
für Referenzintervall $[0, 1]$

Bsp : Mittelpunktsregel

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(\frac{b+a}{2}\right) : \text{Ordnung 2}$$



⑨

4.4. Gaußquadratur

Polynome inkap. Q.F mit $m+1$ Punkten \Rightarrow Ordnung $\geq m+1$

Lemma 4.4.A (Maximale Quadraturordnung)

Die Ordnung einer n -Punkt Quadraturformel, $n \in \mathbb{N}$, ist maximal $2n$.

Beweis : $Q^{(n)} f := \sum_{j=1}^n \alpha_j f(x_j)$, $p(x) = \prod_{j=1}^n (x-x_j)^2 \in P_{2n}$

$$\int_a^b p(x) dx > 0 \text{ aber } Q^{(n)} p = 0 \quad \square$$

Heuristik : Q.F. $Q^{(n)}(f) := \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j) \rightarrow 2n+2$ "Freiheitsgrade"
 \uparrow n Gewichte \uparrow n Knoten

$$\Leftrightarrow \dim P_{2n+1} = 2n+2 \Rightarrow \text{Ordnung } 2n+2 \text{ erreichbar !?}$$

Lemma 4.1.A (Notwendige und hinreichende Bedingungen für Ordnung $n+1$)

Die Quadraturformel auf $[a, b]$

$$Q^{(n)}(f) := \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad a \leq x_j \leq b, \quad f \in C^0([a, b]),$$

is genau dann von der Ordnung $n+1$, wenn gilt

$$\alpha_j = \int_a^b l_j(x) dx \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}, \quad (10.4.C)$$

wobei die $l_j \in P_n$, $j = 0, \dots, n$, die Lagrange-Polynome zur Knotenmenge $\{x_0, \dots, x_n\}$ sind.

Beweis : $p \in P_n : p(x) = \sum_{j=0}^n p(x_j) l_j(x)$

$$\sum_j p(x_j) \int_a^b l_j(x) dx = \int_a^b p(x) dx = Q^{(n)}(p) = \sum_j p(x_j) \alpha_j$$

↑
↑

⑩

Bsp: $n = 1$ auf $[-1, 1]$

Notwendige & hinreichende Bedingungen für Ordnung 4 der Quadraturformel Q auf $[a, b]$:

$$Q(p) = \int_a^b p(t) dt \quad \forall p \in \mathbb{P}_3 \Leftrightarrow Q(t^q) = \frac{1}{q+1} (b^{q+1} - a^{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, 3.$$

► 4 Gleichungen für 4 Unbekannte (2 Gewichte α_0, α_1 und 2 Knoten x_0, x_1); für $a = -1, b = 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 1 dt &= 2 = 1\alpha_0 + 1\alpha_1, & \int_{-1}^1 t dt &= 0 = x_0\alpha_0 + x_1\alpha_1 \\ \int_{-1}^1 t^2 dt &= \frac{2}{3} = x_0^2\alpha_0 + x_1^2\alpha_1, & \int_{-1}^1 t^3 dt &= 0 = x_0^3\alpha_0 + x_1^3\alpha_1. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{nicht lineares} \\ \text{G.S.} \end{array} \right\}$$

Lösung mit MAPLE:

```
> eqns := seq(int(x^k, x=-1..1) = w[1]*xi[1]^k+w[2]*xi[2]^k, k=0..3);
> sols := solve(eqns, indets(eqns, name));
> convert(sols, radical);
```

Konstruktion der $\overline{\mathcal{P}}_n$ mit **Gram-Schmidt-Orthogonalisierung** von
 $\{b_j(t) := t^j\}_{j \in \mathbb{N}}$

$$\overline{\mathcal{P}}_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{\ell=0}^n \frac{(b_{n+1}, \overline{\mathcal{P}}_\ell)_{L^2}}{(\overline{\mathcal{P}}_\ell, \overline{\mathcal{P}}_\ell)_{L^2}} \overline{\mathcal{P}}_\ell \quad (4.4.C)$$

$$\Rightarrow (\overline{\mathcal{P}}_{n+1}, \overline{\mathcal{P}}_\ell)_{L^2} = 0 \quad \forall 0 \leq \ell \leq n$$

$\{\overline{\mathcal{P}}_\ell\}_{\ell=0}^n$ ist Basis von \mathcal{P}_n

Lemma 4.4.D (Existenz einer n -Punkt-Quadraturformel mit Ordnung $2n$)

Sei $\{\mathcal{P}_j\}_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine Familie von Polynomen mit

- $P_j \in \mathbb{P}_j \setminus \{0\}$,
- $\int_{-1}^1 q(t) P_j(t) dt = 0$ für alle $q \in \mathbb{P}_{j-1}$ (L^2 -Orthogonalität)
- Die Menge $\{\xi_k^{(j)}\}_{k=0}^n$, $n < j$, reeller Nullstellen von P_j ist Teilmenge von $[-1, 1]$.

Dann ist

$$Q^{(n)}(f) := \sum_{k=0}^n \alpha_k \xi_k^{(n)}$$

mit Gewichten gemäss (10.4.C) eine Quadraturformel der Ordnung $2j$ auf $[-1, 1]$.

► Gewichte & Knoten: $\{\alpha_1 = 1, \alpha_0 = 1, x_0 = 1/3\sqrt{3}, x_1 = -1/3\sqrt{3}\}$

► Quadraturformel: $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Annahme: $\exists n+1$ -Pkt. Q.F. $Q^{(n)}(f) := \sum_{j=0}^n \alpha_j \xi_j^{(n)} f(\xi_j^{(n)})$ auf $[-1, 1]$
 mit Ordnung $2n+2$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Def.: $\overline{\mathcal{P}}_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n+1} (x - \xi_j^{(n)}) \in \mathcal{P}_{n+1}$

$\forall q \in \mathcal{P}_n: \int_{-1}^1 q \overline{\mathcal{P}}_{n+1} dx = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j q(\xi_j^{(n)}) \underbrace{\overline{\mathcal{P}}_{n+1}(\xi_j^{(n)})}_{=0} = 0$
 Laut Orthogonalität: $q \perp \overline{\mathcal{P}}_{n+1}$ bzgl. L^2 -Innenprodukt auf $[-1, 1]$

+ $\overline{\mathcal{P}}_{n+1}$ hat führenden Koeffizienten 1 $\Rightarrow \overline{\mathcal{P}}_{n+1}$ eindeutig bestimmt durch Orthogonalität

Beweis: Theorem aus der Algebra (Polynomring ist Hauptidealring)

Lemma 4.4.E (Polynomdivision) [n < 2m]

Zu beliebigen zwei Polynomen $p \in \mathbb{P}_n$ und $q \in \mathbb{P}_m$, wobei q einen von 0 verschiedenen führenden Koeffizienten hat, gibt es zwei Polynome $h \in \mathbb{P}_{m-1}$ und $r \in \mathbb{P}_{m-1}$ so, dass

$$p = hq + r.$$

$$\begin{aligned} \text{Wähle } p \in \mathbb{P}_{2j-1}: \quad & p = h \overline{\mathcal{P}}_j + r \quad \text{mit } h, r \in \mathbb{P}_{j-1} \\ \int_{-1}^1 p dx &= \underbrace{\int_{-1}^1 h \overline{\mathcal{P}}_j dx}_{=0} + \underbrace{\int_{-1}^1 r dx}_{=0} = \sum_{k=0}^n \alpha_k r(\xi_k^{(j)}) \\ &= 0 \text{ wegen Orthogonalität nach der Wahl der } \alpha_k \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (r(\xi_k^{(j)}) + (h \overline{\mathcal{P}}_j)(\xi_k^{(j)})) = \sum_{k=0}^n \alpha_k p(\xi_k^{(n)}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

L^2 -orthogonale Polynome wie in Lemma 4.4.D haben einen speziellen Namen:

Def. 4.12 (Legendre-Polynome)

Das n . Legendre-Polynom $P_n \in \mathbb{P}_n$ ist eindeutig definiert durch

$$\int_{-1}^1 h(x) P_n(x) dx = 0 \quad \forall h \in \mathbb{P}_{n-1} \text{ und } P_n(1) = 1.$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

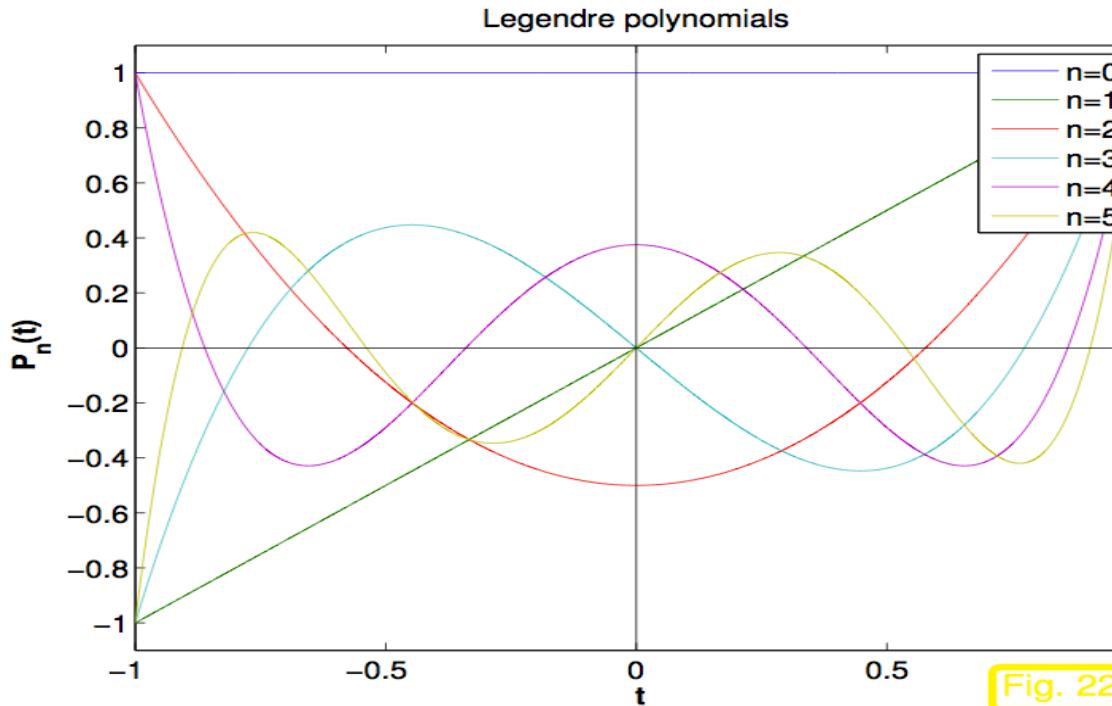


Fig. 226

Idee: I.V. \Rightarrow Dreiternrekursion für P_n : $P_n = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1} - \frac{n-1}{n} P_{n-2}$

$$x P_{n-1} = \frac{n}{2n-1} P_n + \frac{n-1}{2n-1} P_{n-2} \quad \xrightarrow{\frac{2}{2n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{I.v. (x)} : (P_{n+1}, P_{n-1})_{L^2} &= \frac{2n+1}{n+1} \left\{ \frac{n}{2n-1} (P_n, P_n)_{L^2} + \underbrace{\frac{n-1}{2n-1} (P_n, P_{n-2})_{L^2}}_{=0} \right\} \\ &- \frac{n}{n+1} (P_{n-1}, P_{n-1})_{L^2} = 0 \quad \xrightarrow{\frac{2}{2n-1}} \end{aligned}$$

Satz 4.16 (Dreitermrekursion für Legendre-Polynome)

Die Legendre-Polynome P_0, P_1, \dots erfüllen die Dreitermrekursion

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

$$\text{Lemma : } \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis (Induktion):

- (i) $P_n \in \mathbb{P}_n$ mit führendem Koeffizienten $\neq 0 \Rightarrow \{P_\ell\}_{\ell=0}^n$ Basis von \mathbb{P}_n
- (ii) $n \left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right. \Rightarrow P_n \left\{ \begin{array}{l} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right. \Rightarrow (P_{n+1}, P_n)_{L^2} = 0$
- (iii) $P_n(1) = 1 \quad \checkmark$
- (iv) Z.z.: $(P_{n+1}, P_\ell)_{L^2} = 0 \quad \ell = 0, \dots, n-2, n-1, n$
- (*) $(P_{n+1}, P_\ell) = \frac{2n+1}{n+1} (P_n, x P_\ell)_{L^2} - \frac{n}{n+1} (P_{n-1}, P_\ell)_{L^2} = \begin{cases} 0 \text{ für } \ell \leq n-2 \\ 0 \text{ für } \ell = n-1 \\ \text{(siehe unten)} \end{cases}$

Korollar 4.4.F (Eindeutigkeit der Gauss-Quadraturformel)

Auf $[-1, 1]$ gibt es genau eine n -Punkt Quadraturformel der Ordnung $2n$.

Definition/Satz 4.13 (Gauss-Quadraturformel)

Seien $x_0, \dots, x_n \in (-1, 1)$ die Nullstellen des Legendre-Polynoms P_{n+1} und ℓ_0, \dots, ℓ_n die zugehörigen Lagrange-Polynome.

Mit der Wahl $\alpha_j = \int_{-1}^1 \ell_j(x) dx$ hat die **Gauss'sche Quadraturformel**

$$Q_{[-1,1]}^{(n)}[f] = \alpha_0 f(x_0) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

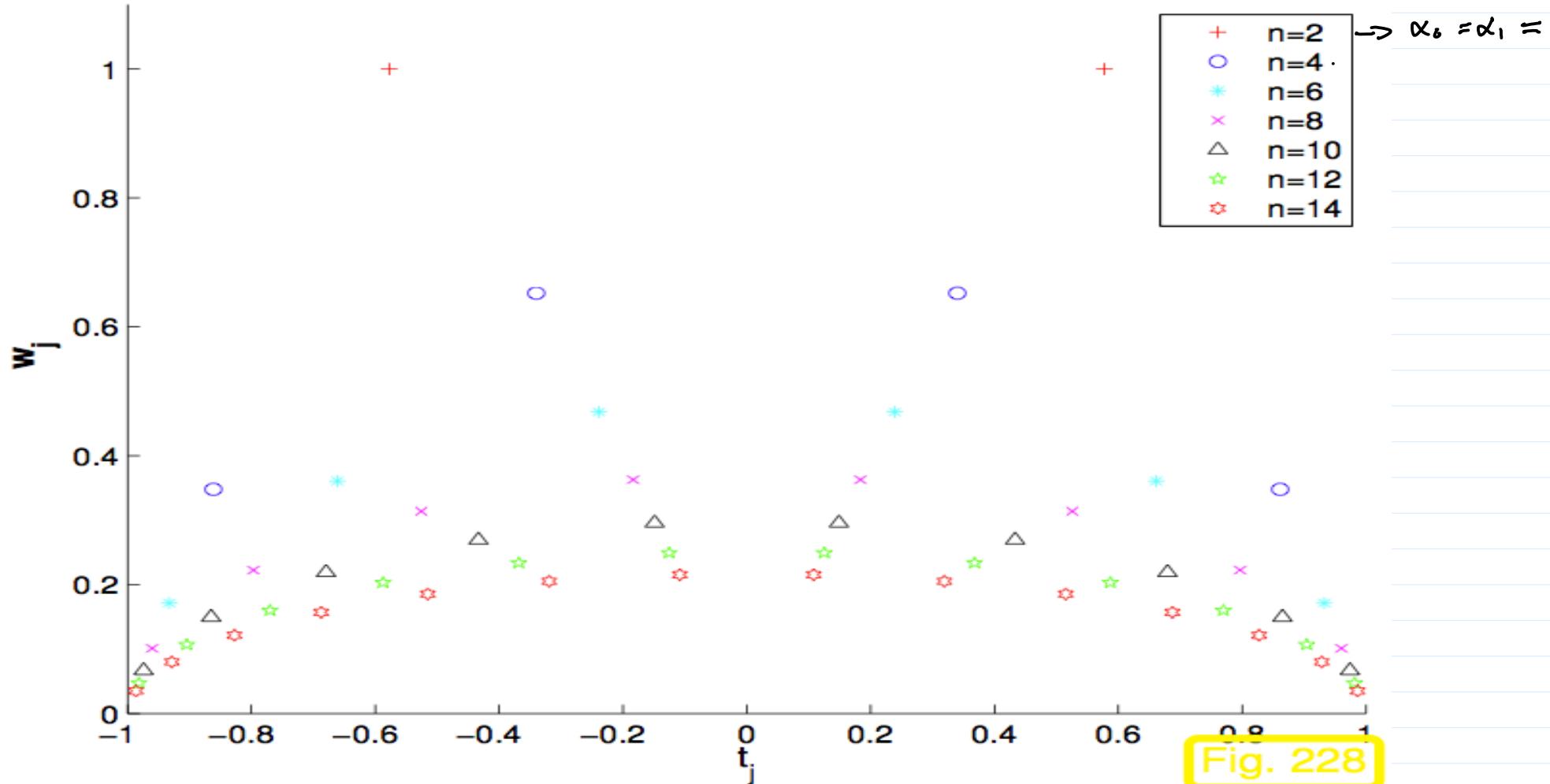
mit $n+1$ Knoten die Ordnung $2n+2$, d.h., sie ist exakt für alle $f \in \mathbb{P}_{2n+1}$.

Satz 4.4.G

Die Gewichte der Gauss-Quadraturformeln $Q^{(n)}$ aus Satz 4.13 sind positiv.

$$\begin{aligned} \text{Beweis : } q_j(x) &= \prod_{k \neq j} (x - x_k)^2 \in \mathbb{P}_{2n} &> 0 \\ 0 < \int_{-1}^1 q_j(x) dx &= \sum_{k=0}^n \alpha_k q_j(x_k) = \alpha_j q_j(x_j) &\uparrow \text{"Gauss-Knoten"} \end{aligned}$$

Gauss-Legendre weights for $[-1, 1]$



Korollar: $\mathcal{K}(Q^{(n)}) = 2$ auf $[-1, 1]$

Lemma 4.4.J (Fehlerdarstellung für Hermite-Interpolation)

Für gegebene Knotenmenge $\mathcal{N} := \{x_0, \dots, x_n\}$ erfülle $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$ die Hermite-Interpolationsbedingungen

$$p(x_j) = f(x_j) \quad \text{und} \quad p'(x_j) = f'(x_j), \quad j = 0, \dots, n,$$

für ein $f \in C^{2n+2}([a, b])$.

Dann ist p eindeutig bestimmt und zu jedem $x \in [a, b]$ existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2.$$

[Beweis analog zu Satz 3.6. \rightarrow Nachschauen]

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}^{(n)}(f)| &\leq \frac{1}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 f^{(2n+2)}(\bar{\zeta}(x)) \overline{P}_{n+1}^2(x) dx \\ &= \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\bar{\zeta}') \int_{-1}^1 \overline{P}_{n+1}^2(x) dx \end{aligned}$$

mit $-1 < \bar{\zeta}' < 1$

Satz 4.19 (Konvergenz der Gaussquadratur)

Für jede Funktion $f \in C^0([-1, 1])$ konvergiert $Q^{(n)}[f] \rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx$ für $n \rightarrow \infty$.

[aus Satz 4.0.B & Satz von Weierstrass]

Satz 4.18 (Fehlerabschätzung für Gaussquadratur)

Für $f \in C^{2n+2}([-1, 1])$ existiert ein $\xi \in (-1, 1)$, so dass

$$Q^{(n)}(f) - \int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n (x - x_j)^2 dx = \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right)^2 f^{(2n+2)}(\xi),$$

wobei $x_0, \dots, x_n \in (-1, 1)$ die Quadraturpunkte von $Q^{(n)}$ sind.

Beweis: Zu f finde $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$ so dass $\begin{cases} p(x_j) = f(x_j) \\ p'(x_j) = f'(x_j) \end{cases}, j=0, \dots, n$
 \rightarrow Hausaufgabe

$$\mathcal{E}^{(n)}(f) = \mathcal{E}^{(n)}(f - p) = \int_{-1}^1 (f - p) dx - \underbrace{\sum_{j=0}^n \alpha_j (f - p)(x_j)}_{\text{Interpolationsfehler}} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Dreitermreg.} \Rightarrow \text{F\"uhrender Koeffizient von } P_n &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(2j+1)}{(j+1)} = \frac{(2n)!}{2^n n! \cdot n!} = \mathcal{O}_n \end{aligned}$$

$$\triangleright \overline{P}_n = \mathcal{O}_n^{-1} P_n$$

$$\triangleright \int_{-1}^1 \overline{P}_n^2 dx \quad \text{aus} \quad \int_{-1}^1 P_n^2 dx = \frac{2}{2n+1}$$

□

4.2. Zusammengesetzte Quadraturformeln

Ziel: Genaue Quadratur von stetigw.^{*} glatten Integranden auf $[a, b]$

Gitter*: $\mathcal{G} := \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N =: b\}$

Partitionierung: $[a, b] = \bigcup_j [x_{j-1}, x_j]$

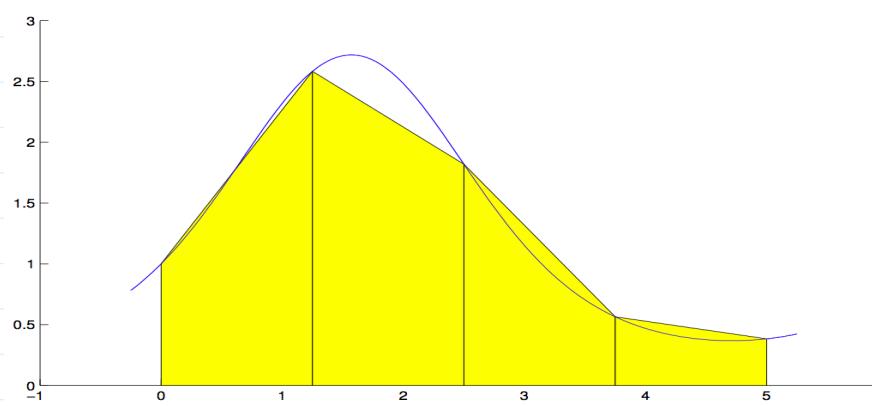
$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^N Q_{[x_{j-1}, x_j]}^{(n)}(f) \quad [\text{wieder eine Q.F.}]$$

erhalten aus Referenzformel $\hat{Q}^{(n)}$ auf $[0, 1]$
*zusammengesetzte Q.F. auf \mathcal{G}

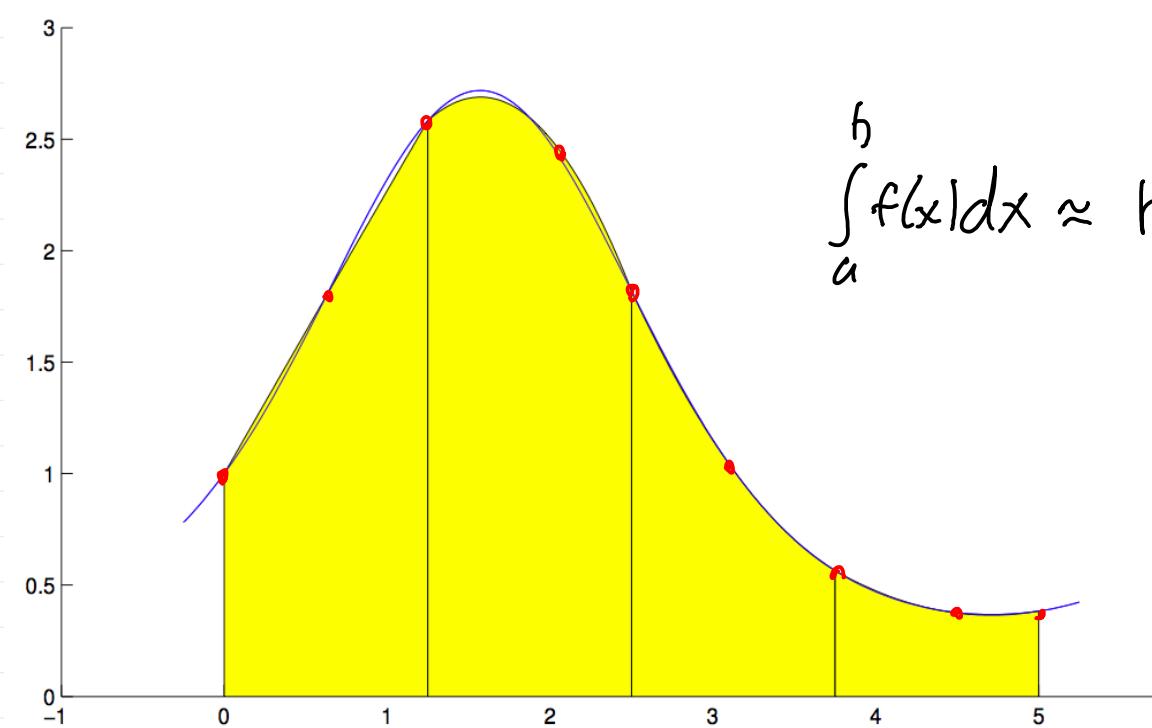
Bsp: Zsg. Trapezregel

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{2} (f(0) + f(1))$$

$$\rightarrow \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) dx \approx (x_j - x_{j-1}) \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$



Bsp: Simpsonregel



equidistant

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{6} f(a) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{N-1} f(\frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)) + \frac{1}{6} f(b) \right)$$

```

1 function T = simpson(f,a,b,N)
2 % Composite Simpson rule on an equidistant grid for the numerical
3 % integration of a continuous function.
4 % a,b are the interval bounds, f must be a handle of type @(x) to a
5 % function f(x), N is the number of grid intervals.
6 % Note: the function f must support vectorization
7 x = linspace(a,b,2*N+1); % Initialize gridpoints
8 fv = f(x); % row vector of function values
9 fv(2:2:end-1) = 4*fv(2:2:end-1); % midpoints of grid intervals
10 fv(3:3:end-2) = 2*fv(3:3:end-2); % grid points
11 T = (b-a)*sum(fv)/N/6; % summation

```

$$\triangleright \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(x_1 - x_0) f(a) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{2}(x_{j+1} - x_{j-1}) f(x_j) + \frac{1}{2}(x_N - x_{N-1}) f(b)$$

$$\text{Äquidistant: } x_j = a + \frac{j}{N}(b-a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

```

1 function T = trapez(f,a,b,N)
2 % Composite trapezoidal rule on an equidistant grid for the numerical
3 % integration of a continuous function.
4 % a,b are the interval bounds, f must be a handle of type @(x) to a
5 % function f(x), N is the number of grid intervals.
6 % Note: the function f must support vectorization
7 x = linspace(a,b,N+1); % Initialize gridpoints
8 fv = f(x); % row vector of function values
9 fv(1) = fv(1)/2; fv(end) = fv(end)/2; % special treatment of endpoints
10 T = (b-a)*sum(fv)/N; % summation

```

Zsg. Q.F. auf der Grundlage von $\hat{Q}^{(n)}$ höherer Ordnung: Gauß-Quadratur $\rightarrow \hat{Q}^{(n)}$.

Fehlerabschätzung: $f \in C^{(m)}([a, b])$, $m = \text{Ordnung von } \hat{Q}^{(n)}$

(4.O.F): Quadraturfehler auf $[x_{j-1}, x_j]$: Mit $C > 0$ unabhängig von f, f'

$$|E_{[x_{j-1}, x_j]}^{(n)}(f)| \leq C |x_j - x_{j-1}|^{m+1} \|f^{(m)}\|_{\infty, [x_{j-1}, x_j]} : \text{wird aufsummiert}$$

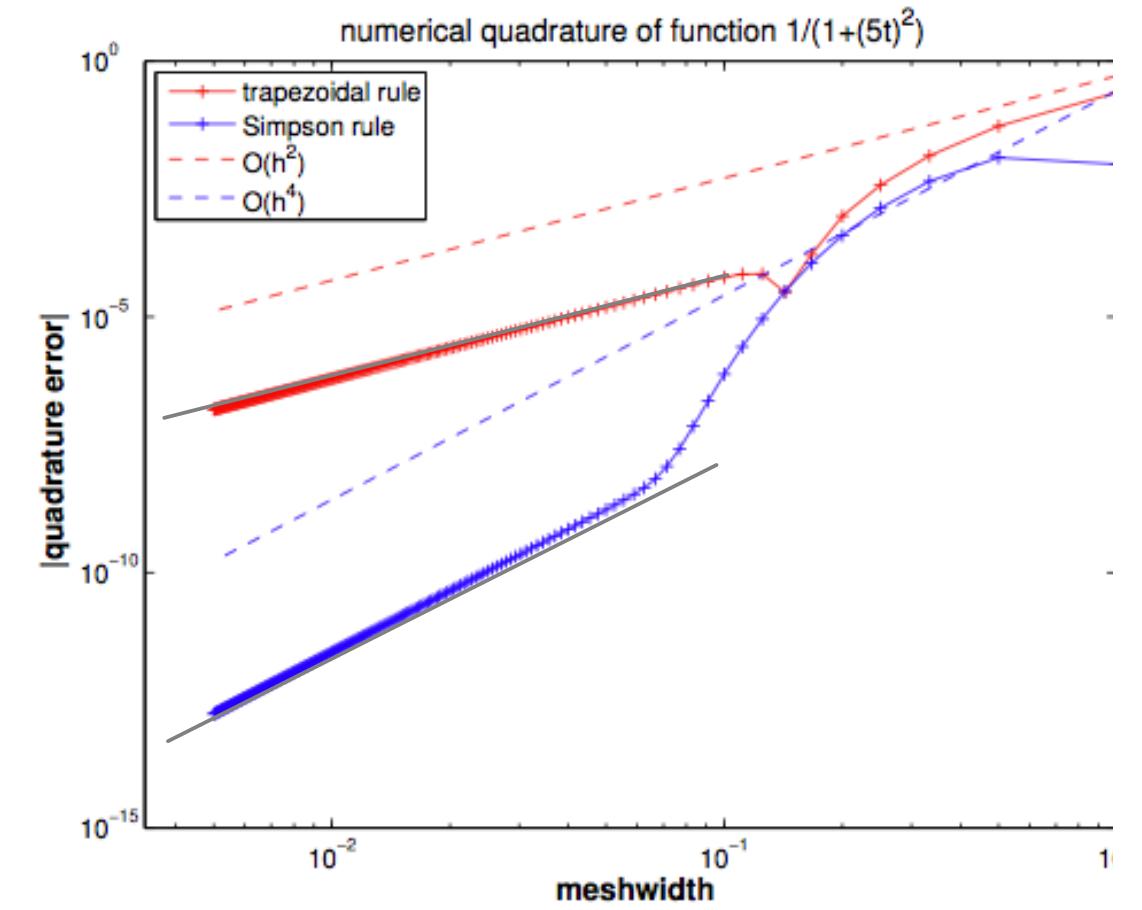
$$\triangleright |E_{[a,b]}^{\mathcal{G}}(f)| \leq Ch_{\mathcal{G}}^m \|f^{(m)}\|_{\infty, [a,b]} \rightarrow \text{Alg. Kugz mit Ordnung } m$$

Maschenweite $h_{\mathcal{G}} := \max_j |x_j - x_{j-1}|$

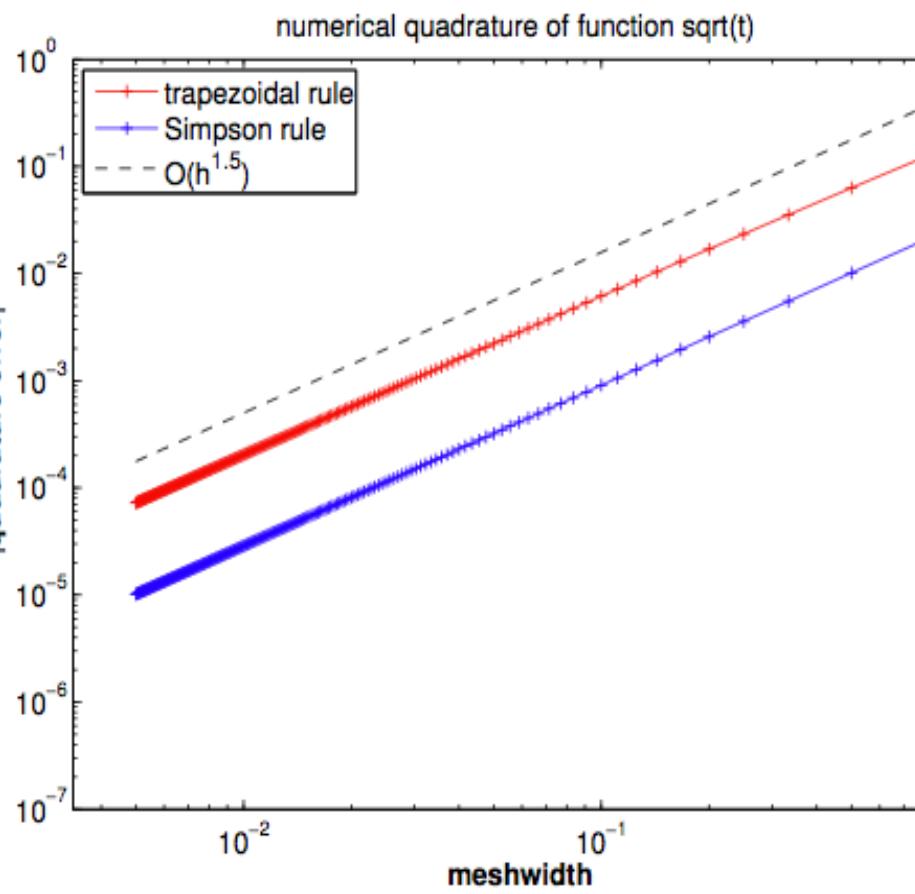
$$|E_{[a,b]}^{\mathcal{G}}(f)| = O(h_{\mathcal{G}}^m)$$

Aquidistante Gitter:

Bsp:
auf $[0,1]$ $f(x) = \frac{1}{1+(5x)^2}$ glatt



Reduzierte Konvergenzrate bei
nichtglatten Integranden, nur $O(h^{3/2})$



Abhilfe: Regulansierende Tf. *

Bsp:

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx$$

↑ glatt, aber nur verfügbar per Punkt-
auswertung \Rightarrow numerische Quadratur

$$* z = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = z^2 \Rightarrow dx = 2z dz$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = 2 \int_0^1 z^2 f(z^2) dz$$

glatter Integrand: Wenn $f \in C^\infty([0,1])$,
dann Konvergenz maximaler Ordnung
 $O(h^m)$ für zsg. Q.F. der Ordnung m