

Über die Konvergenz zentrierter und normierter Summen von Zufallsvariablen und ihre Auswirkungen auf die Risikomessung

Hansjörg Furrer

1. April 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Generelles zur Risikoquantifizierung im SST	2
2.1	Absolute versus logarithmierte Renditen	3
3	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen	4
3.1	Stabile Verteilungen und ihre Anziehungsbereiche	5
3.2	Weitere wichtige Verteilungen	8
4	Grenzverteilungen zentrierter und normierter Summen von Zufallsvariablen	10
4.1	Grenzverteilungen von Summen Pareto-verteilter Zufallsvariablen	12
4.1.1	Tail-Index $0 < \alpha < 1$	13
4.1.2	Tail-Index $\alpha = 1$	18
4.1.3	Tail-Index $1 < \alpha < 2$	22
4.1.4	Tail-Index $\alpha = 2$	26
4.1.5	Tail-Index $\alpha > 2$	28
4.2	Grenzverteilungen von Summen t_ν -verteilter Zufallsvariablen	33
4.2.1	$\nu = 4$ Freiheitsgrade	35
4.2.2	$\nu = 8$ Freiheitsgrade	35
5	Schlussfolgerungen	35
A	Simulationsergebnisse für Pareto-verteilte Summanden	38
B	Simulationsergebnisse für t_ν-verteilte Summanden	40

C Value-at-Risk und Expected Shortfall für normal- und t_ν-verteilte Zufallsvariablen	41
Literaturverzeichnis	44

1 Einführung

In dieser Notiz untersuchen wir das Konvergenzverhalten von zentrierten und normierten Summen unabhängiger und identisch verteilten Zufallsvariablen. Allgemein bekannt in diesem Zusammenhang ist der Zentrale Grenzwertsatz. Dieser besagt, dass die Grösse $(S_n - b_n)/a_n$ mit wachsendem n gegen eine standard normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ konvergiert. Dabei bezeichnet $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ und $\{Y_i : i \in \mathbb{N}\}$ stellt eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen dar mit Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[Y]$ und endlicher Varianz $\sigma^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$. Die normierenden und zentrierenden Konstanten a_n und b_n sind gegeben durch $a_n = \sigma\sqrt{n}$ und $b_n = n\mu$. Im Financial Risk Management-Kontext findet dieses Resultat zum Beispiel bei der Skalierung von Risiken seine Anwendung. So werden die (regulatorischen) Kapitalanforderungen in der Versicherungsindustrie in der Regel über einen Einjahreshorizont definiert. Die Schätzung der Risiken, welchen ein Versicherungsportfolio über einen Einjahreshorizont ausgesetzt ist, basiert jedoch häufig auf Risikofaktoränderungen über einen kürzeren Horizont, zum Beispiel einen Monat oder gar eine Woche. Werden so genannte logarithmierte Renditen betrachtet, so ergibt sich die logarithmierte Einjahres-Rendite unter vereinfachenden Unabhängigkeitsannahmen aus der Summe von 12 logarithmierten Monatsrenditen oder 52 logarithmierten Wochenrenditen. Die Unabhängigkeitsannahme ist in der Realität im allgemeinen nicht gegeben. Dennoch konzentrieren wir uns in dieser Notiz auf diesen Spezialfall, nicht zuletzt deshalb, weil er einfacher zu beschreiben ist. Er führt aber tendenziell zu ‘gutmütigeren’ (Grenz-) Verteilungen, welche die daraus abgeleiteten Kapitalanforderungen unterschätzen dürften. Ungeachtet der Abhängigkeitsannahmen werden die statistischen Eigenschaften kurzfristiger Renditen also via Summenbildung auf die Einjahres-Renditen übertragen, möglicherweise in abgeschwächter Form. Wie gross dieser Einfluss ist, ist Gegenstand dieser Notiz. Insbesondere gehen wir der Frage nach, wie sehr sich die ‘tail-severity’ kurzfristiger Renditen auf die tail-severity der Jahresrenditen überträgt. Anders ausgedrückt interessiert die Frage, wie weit die Summe von 12 Monats- oder 52 Wochenrenditen von der Normalverteilung (oder allgemein einer stabilen Verteilung) entfernt ist. Wir messen dazu den Abstand zwischen einer zentrierten und normierten Summe und der dazugehörigen Grenzverteilung. Und zwar einmal anhand des Abstandes der entsprechenden Verteilungsfunktionen, ein anderes Mal via die Risikomasse Value-at-Risk (VaR) und Expected Shortfall für verschiedene Konfidenzniveaus. Die Verteilung einer Summe unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen bestimmen wir mit dem Softwarepaket **R**, genauer gesagt mit der Funktion `aggregateDist` der Bibliothek ‘aktuar’. Zur Erzeugung stabiler Verteilungen verwenden wir das Paket ‘stabledist’ in **R**. In den numerischen Beispielen betrachten wir einerseits Pareto-verteilte Summanden, andererseits t_ν -verteilte. Dabei lassen wir den Pareto-Parameter α respektive die Anzahl Freiheitsgrade ν variieren. Die Wahl der Pareto-Verteilung mag im Kontext der Renditen-Modellierung als von akademischer Natur erscheinen, da ihr Träger auf der positiven Halbachse konzentriert ist. Man kann sich aber durchaus eine um null symmetrische Verteilung mit Pareto-tails vorstellen oder konstruieren; eine Verteilung also, für die gilt $F(-x) \sim c_1 x^{-\alpha}$ und $\bar{F}(x) \sim c_2 x^{-\alpha}$

mit $x \rightarrow \infty$ und $\bar{F} = 1 - F$. Auch Grossschadenerscheinungen werden typischerweise durch die Pareto-Verteilung beschrieben. Demgegenüber hat die t_ν -Verteilung unendlichen Träger und ist symmetrisch um null.

Der Aufbau dieser Notiz ist wie folgt. Wir beginnen unsere Ausführungen mit einigen grundlegenden Aspekten zur Risikoquantifizierung im Schweizer Solvenztest SST, siehe Kapitel 2. Ein spezielles Augenmerk gilt dabei den Änderungen von Risikofaktoren resp. (Finanz-) Instrumenten, da diese massgeblich für die Kapitalanforderungen sind. Kapitel 3 stellt die Summenbildung von Zufallsvariablen in den Vordergrund und wiederholt die Bedingungen, wann eine Grenzverteilung existiert. Wie bereits oben erwähnt, spielt der Zentrale Grenzwertsatz in diesem Kontext eine grosse Rolle. Dieser besagt, dass für unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen Y_i mit endlichem zweitem Moment die Grösse $(S_n - b_n)/a_n$ gegen die Normalverteilung konvergiert, wobei $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Das Analogon für Verteilungen mit unendlicher Varianz bilden die so genannten stabilen Verteilungen: Nur stabile Verteilungen treten als Grenzwerte von Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen auf. In Kapitel 4 untersuchen wir das Konvergenzverhalten anhand konkreter Beispiele. Wir beginnen unsere Analysen für unabhängige und identisch Pareto-verteilte Summanden, ehe wir uns der t -Verteilung widmen. Im Falle der Pareto-Verteilung variieren wir den Pareto-Parameter α , im Falle der t -Verteilung die Anzahl ν der Freiheitsgrade. Bevor wir numerische Ergebnisse präsentieren können, bestimmen wir im Fall Pareto-verteilter Summanden die dazugehörige Grenzverteilung. Ist die Varianz endlich, entspricht diese offensichtlich der Normalverteilung, andernfalls einer stabilen Verteilung. Die Schwierigkeit besteht darin, die Parameter der stabilen Verteilung zu bestimmen, insbesondere den Skalierungsparameter. Kapitel 5 schliesst mit einigen zusammenfassenden Bemerkungen.

2 Generelles zur Risikoquantifizierung im SST

Die Solvabilität einer Versicherungsunternehmung (VU) nach SST leitet sich ab aus dem per Stichtag verfügbaren Kapital und seinen möglichen Schwankungen über einen Einjahreshorizont. Das per Stichtag verfügbare Kapital wird im SST als risikotragendes Kapital bezeichnet, wofür die Bezeichnung RBC verwendet wird. Wir nehmen an, dass das risikotragende Kapital zum Zeitpunkt 0 bekannt ist, während $RBC(s)$ mit $s > 0$ eine stochastische Grösse darstellt, also unbekannt ist. Aus Risikomanagement- resp. aufsichtsrechtlicher Sicht interessieren also die möglichen Veränderungen des risikotragenden Kapitals über einen bestimmten Zeithorizont h , also

$$RBC(t+h) - RBC(t).$$

Der allgemeinen Risikomanagement-Konvention folgend wird das risikotragende Kapital als Funktion von Risikofaktoren Z_1, \dots, Z_d dargestellt:

$$RBC = RBC(t; Z_1(t), \dots, Z_d(t)).$$

Häufig verwendete Risikofaktoren sind die (logarithmierten) Preise von Aktien, die Zinsen, Credit-spreads oder die (logarithmierten) Wechselkurse.

Der Zeithorizont im SST beträgt wie erwähnt ein Jahr. Da sich die Solvenzanforderungen aus den Veränderungen des risikotragenden Kapitals über den Einjahreshorizont ergeben, ist es

üblich und naheliegend, die entsprechenden Änderungen der Risikofaktoren über denselben Zeithorizont zu betrachten:

$$X(t+1) = Z(t+1) - Z(t). \quad (1)$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \Delta \text{RBC}(t+1) &= \text{RBC}(t+1) - \text{RBC}(t) \\ &= \text{RBC}(t+1; \mathbf{Z}(t+1)) - \text{RBC}(t; \mathbf{Z}(t)) \\ &= \text{RBC}(t+1; \mathbf{Z}(t) + \mathbf{X}(t+1)) - \text{RBC}(t; \mathbf{Z}(t)), \end{aligned}$$

wobei die Vektorschreibweise $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_d(t))'$ verwendet worden ist. Die Veränderungen des risikotragenden Kapitals sind somit durch die Risikofaktoränderungen bestimmt.

2.1 Absolute versus logarithmierte Renditen

Bezeichnen wir mit $S(t)$ den Wert eines Instrumentes zum Zeitpunkt t , so ist die *absolute* Veränderung zwischen den Zeitpunkten t und $t+1$ gegeben durch

$$X^{\text{abs}}(t+1) = S(t+1) - S(t).$$

Demgegenüber ist die *relative* Wertveränderung bestimmt durch

$$X^{\text{rel}}(t+1) = \frac{S(t+1) - S(t)}{S(t)} = \frac{S(t+1)}{S(t)} - 1. \quad (2)$$

Die logarithmierten Renditen (Log>Returns) sind definiert als

$$X^{\text{log}}(t+1) = \log\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right) = \log S(t+1) - \log S(t). \quad (3)$$

Beachte, dass für kleine Wertveränderungen ungefähr gilt $X^{\text{rel}} \approx X^{\text{log}}$. Dies folgt aus der Taylorapproximation 1. Ordnung, wonach $\log(1+x) \approx x$ für kleine x . Eine wichtige Eigenschaft logarithmierter Renditen ist die folgende:

$$\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) = \log\left(\frac{S(1)}{S(0)}\right) + \log\left(\frac{S(2)}{S(1)}\right) + \dots + \log\left(\frac{S(T)}{S(T-1)}\right) \quad (4)$$

oder anders ausgedrückt:

$$r(0, T) = \sum_{k=1}^n r_k \quad (5)$$

wobei $r(0, T)$ die logarithmierte Rendite über den Zeitraum $[0, T]$ bezeichnet, also $r(0, T) = \log(S(T)/S(0))$ und r_k die logarithmierte Rendite des Intervalls $[t_{k-1}, t_k]$. Mit anderen Worten, die Rendite über den Zeitraum von 0 bis T ist gleich der Summe der logarithmierten Renditen der Teilintervalle $[0, 1], [1, 2], \dots, [T-1, T]$.

3 Zufallsgrössen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Obschon es oft naheliegend und praktisch ist, für Modellierungszwecke auf normalverteilte Zufallsgrössen zurückzugreifen, so zeigen gerade die historischen Beobachtungen von Finanzmarktdaten bisweilen starke und gehäuft auftretende Wertveränderungen. Wertveränderungen also, die mit unabhängigen und identisch normalverteilten Zufallsgrössen nicht erfasst werden können. Um dies zu illustrieren, haben wir in Abbildung 1 die täglichen Wertveränderungen (log-returns) der Schlusskurse der SLHN-Aktie (Swiss Life Holding) über den Zeitraum vom 1. Januar 1999 bis 31. Dezember 2008 aufgetragen (obere Grafik). Demgegenüber zeigt die untere Grafik in Abbildung 1 gleich viele Renditen von Realisierungen normalverteilter Zufallszahlen. Deren Varianz wurde aus den historischen Beobachtungen der SLHN-Veränderungen geschätzt.

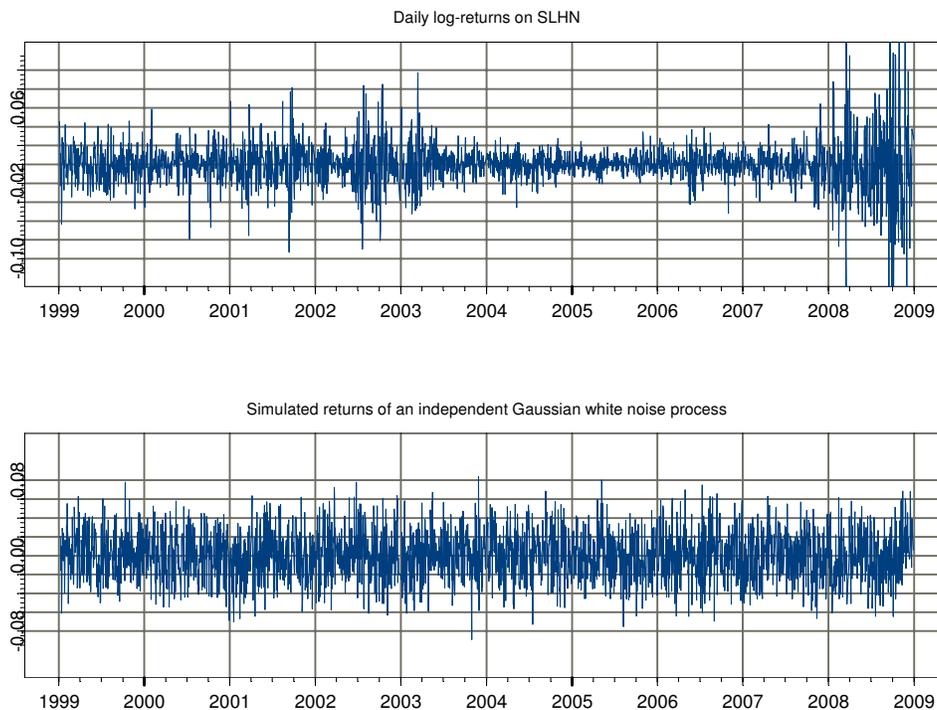


Abbildung 1: Tägliche Wertveränderungen der logarithmierten SLHN-Schlusskurse über den 10-Jahres Zeitraum vom 01.01.1999 bis 31.12.2008 (obere Grafik) und gleich viele Realisierungen unabhängiger und normalverteilter Zufallszahlen (untere Grafik). Die Varianz der simulierten normalverteilten Zufallsvariablen entspricht derjenigen geschätzt aus den historischen Beobachtungen über denselben Zeitraum.

Vergleicht man die beiden Grafiken miteinander, so ist augenfällig, dass die beobachteten Kursveränderungen zu weitaus stärkeren Ausschlägen neigen als die pseudomässig generierten. Darüberhinaus ist feststellbar, dass sich bei den historischen Beobachtungen Perioden mit moderaten, eher gleichmässigen Ausschlägen abwechseln mit Perioden extremer Veränderungen (Cluster-Bildung). Gerade für Risikomanagementzwecke mit seinem Fokus auf Ausreisser

ist diese Abweichung von der ‘Normalität’ zentral. Die in Figur 1 gemachten Beobachtungen sprechen wiederum gegen die Annahme von unabhängigen und identisch verteilten Renditen, siehe die einleitenden Bemerkungen in Kapitel 1.

3.1 Stabile Verteilungen und ihre Anziehungsbereiche

Die Bedeutung der Normalverteilung ergibt sich unter anderem wegen des Zentralen Grenzwertsatzes. Seien Y_1, \dots, Y_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ^2 . Setze $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Dann gilt

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Für Wahrscheinlichkeitsverteilungen *ohne* Varianz existiert ein analoges Resultat, wobei die normierenden Konstanten (hier $a_n = \sigma\sqrt{n}, b_n = n\mu$) anders gewählt werden müssen. Eine entscheidende Rolle in diesem Zusammenhang spielen die so genannten stabilen Verteilungen.

Definition 1 Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung G heisst stabil, falls es für jedes n normierende Konstanten $c_n > 0, \gamma_n$ gibt, so dass

$$S_n = c_n Y + \gamma_n, \tag{6}$$

wobei Y eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion G beschreibt und $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ mit Y_i iid mit Verteilungsfunktion G . \square

Beispiele von stabilen Verteilungen sind die Normalverteilung, die Cauchy-Verteilung oder die Lévy-Verteilung, siehe Kapitel 3.2.

Definition 2 Die unabhängigen Zufallsvariablen Y_k mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F gehören zum Anziehungsbereich der Zufallsvariablen Z mit Verteilung G , falls es normierende Konstanten $a_n > 0$ und b_n gibt, so dass

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \rightarrow Z, \quad n \rightarrow \infty. \tag{7}$$

\square

Eine notwendige Bedingung, dass eine Verteilungsfunktion F zu einem Anziehungsbereich einer Verteilung G gehört, ist die folgende:

$$\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF(x) \sim x^{2-\alpha} L(x), \quad x \rightarrow \infty, \tag{8}$$

mit $0 < \alpha \leq 2$ und einer langsam variierenden Funktion L , siehe Feller [4], Theorem 2, Kapitel XVII.5. Wir benutzen in diesem Fall die Schreibweise $F \in DA(G)$, wobei DA für

‘domain of attraction’ steht. Im Falle $\alpha = 2$ ist die Bedingung (8) auch hinreichend. Für eine Zusammenfassung dieser Resultate siehe Proposition 1 unten.

Man kann zeigen, dass die Bedingung (8) äquivalent ist mit

$$\frac{x^2(1 - F(x) + F(-x))}{\mu(x)} \rightarrow \frac{2 - \alpha}{\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (9)$$

siehe Feller [4], Kapitel IX.8.

Definition 3 Eine reellwertige Funktion L heisst regulär variierend mit Index γ , falls gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = x^\gamma$$

für alle $x > 0$. In diesem Fall schreiben wir $f \in \text{RV}_\gamma$. Im Fall $\gamma = 0$ heisst die Funktion f langsam variierend. \square

Eigenschaft (8) bedeutet, dass $\mu(x)$ regulär variierend ist mit Index $2 - \alpha$.

Schliesslich kann man zeigen, dass nur stabile Verteilungen als Grenzwerte von zentrierten und normierten Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen auftreten, siehe zum Beispiel Feller [4], Theorem 1, Seite 576: Eine Verteilung G besitzt einen Anziehungsbereich dann und nur dann, wenn sie stabil ist.

Proposition 1 Sei F eine Verteilungsfunktion. Es gilt

(a) $F \in \text{DA}(G_2)$ genau dann, wenn $\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF(y)$ langsam variierend ist oder gleichbedeutend, dann und nur dann wenn

$$\frac{x^2(1 - F(x) + F(-x))}{\mu(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

(b) $F \in \text{DA}(G_\alpha)$ mit $0 < \alpha < 2$ genau dann, wenn $1 - F(x) + F(-x) \in \text{RV}_{-\alpha}$ und die folgenden Tail-Ausgleichsbedingungen erfüllt sind:

$$\frac{F(-x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow q, \quad \frac{1 - F(x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow p, \quad p + q = 1, \quad x \rightarrow \infty.$$

\square

Für den Beweis, siehe Feller [4], Kapitel IX.8 und XVII.5.

Was die normalisierenden und zentrierenden Konstanten $a_n > 0$ und b_n betrifft, so sind diese in Tabelle 1 zu finden, siehe dazu Feller [4], XVII.5. Diese Konstanten sind so bestimmt, dass für eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen $\{Y_i : i \in \mathbb{N}\}$ mit Verteilungsfunktion F gilt

$$X_{*n} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - b_n}{a_n} \rightarrow X, \quad n \rightarrow \infty.$$

α	a_n	b_n
$0 < \alpha < 1$	$\inf\left\{x \mid \frac{n\mu(x)}{x^2} \leq 1\right\}$	–
$\alpha = 1$	$\inf\left\{x \mid \frac{n\mu(x)}{x^2} \leq 1\right\}$	$n^2 \mathbb{E}\left[\sin(Y/a_n)\right]$
$1 < \alpha \leq 2$	$\inf\left\{x \mid \frac{n\mu(x)}{x^2} \leq 1\right\}$	$n\mu$

Tabelle 1: Normalisierende und zentrierende Konstanten $a_n > 0$ und b_n für verschiedene α , wobei $\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF(y)$ und $\mu = \mathbb{E}[Y]$ den Erwartungswert von Y bezeichnet.

Mit anderen Worten, $F \in \text{DA}(G_\alpha)$.

Wegen der regulären Variation der Funktion μ folgt für $x > 0$, dass

$$\frac{n\mu(a_n x)}{a_n^2} \rightarrow x^{2-\alpha}, \quad n \rightarrow \infty,$$

da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Im Falle $\alpha = 2$ bedeutet dies zum Beispiel, dass die Maße $n x^2 dF(a_n x)$ gegen ein Maß $F^\#$ konvergieren, das im Nullpunkt konzentriert ist, siehe Kapitel 4.1.4.

In gewissen Fällen ist es möglich, dass die Konstanten a_n von der einfacheren Form $a_n = c n^{1/\alpha}$ sind für eine Konstante c . Dies gilt zum Beispiel im Falle $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ oder wenn F selber stabil ist. Wir sagen in diesem Fall, dass die Verteilung F im *normalen Anziehungsbereich* einer Verteilung G_α liegt und benutzen die Schreibweise $F \in \text{DNA}(G_\alpha)$. Der Bereich $\text{DNA}(G_\alpha)$ lässt sich wie folgt charakterisieren, siehe Embrechts et al. [3], Corollary 2.2.17.

Proposition 2 *Sei F eine Verteilungsfunktion. Es gilt*

- (a) $F \in \text{DNA}(G_2)$ genau dann, wenn die Zufallsvariable Y mit Verteilungsfunktion F endliche Varianz hat, wenn also gilt $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$.
- (b) $F \in \text{DNA}(G_\alpha)$ mit $\alpha < 2$ genau dann, wenn

$$F(-x) \sim c_1 x^{-\alpha}, \quad \bar{F}(x) \sim c_2 x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Also genau dann, wenn F Pareto-tails hat. □

Wir möchten Definition 2 in die Sprache der charakteristischen Funktionen übersetzen. Für eine Zufallsvariable X mit Verteilungsfunktion F_X ist die charakteristische Funktion $\varphi_X(t)$ gegeben durch

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) = u(t) + iv(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

mit

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ty) dF_X(y), \quad v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ty) dF_X(y).$$

Es gilt insbesondere $\varphi(0) = 1$ und $|\varphi(t)| \leq 1$ für alle t . Ebenso $\varphi_{aX+b}(t) = \exp\{itb\}\varphi_X(at)$ sowie $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ für unabhängige Zufallsvariablen X und Y .

Mit diesen beiden Eigenschaften folgt für $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$:

$$\varphi_{X_{*n}}(t) = \varphi_Y(t/a_n)^n e^{-itb_n/a_n}. \quad (11)$$

Falls eine charakteristische Funktion $\varphi(t)$ k -fach differenzierbar ist im Punkt $t = 0$, so gilt $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$. Insbesondere gilt

$$\varphi'(0) = im_1, \quad \varphi''(0) = -m_2,$$

wobei m_n das n -te Moment bezeichnet, falls es existiert, also $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x)$.

In der Sprache der charakteristischen Funktionen lässt sich das in (7) beschriebene Konvergenzverhalten wie folgt umformulieren: Eine Verteilungsfunktion F ist im Anziehungsbereich von G , falls es Konstanten $a_n > 0$ und b_n gibt mit

$$\varphi(t/a_n)^n e^{-itb_n/a_n} \rightarrow \omega(t), \quad n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Dabei bezeichnen $\varphi(t)$ und $\omega(t)$ die charakteristischen Funktionen der Verteilungen F respektive G . Gemäss Feller [4], Theorem 1, Seite 555, ist (12) äquivalent mit der Eigenschaft, dass

$$n(\varphi_F(t/a_n) - 1 - itb_n/(na_n)) \rightarrow \Psi(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

wobei $\Psi(t) = \log \omega(t)$.

3.2 Weitere wichtige Verteilungen

Gamma-Verteilung. Eine Zufallsvariable X folgt einer Gamma-Verteilung mit Parametern $\alpha > 0$, $\beta > 0$, falls ihre Dichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad 0 < x < \infty, \quad \alpha, \beta > 0, \quad (14)$$

wobei die Gammafunktion $\Gamma(\alpha)$ gegeben ist durch

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (15)$$

Es gilt $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Erwartungswert und Varianz von X sind gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \alpha\beta, \quad \text{Var}(X) = \alpha\beta^2.$$

Für die charakteristische Funktion gilt $\varphi(t) = (1 - it\beta)^{-\alpha}$.

t_ν -Verteilung mit ν Freiheitsgraden. Eine Zufallsvariable X folgt einer t_ν -Verteilung mit ν Freiheitsgraden, falls ihre Dichtefunktion gegeben ist durch

$$f_\nu(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Erwartungswert und Varianz sind gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = 0 \quad (\nu > 1), \quad \text{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad (\nu > 2).$$

Der Fall $\nu = 1$ entspricht der Cauchy-Verteilung; die Dichtefunktion (16) ist gegeben durch

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lognormal-Verteilung. Eine Zufallsvariable X genügt einer Lognormal-Verteilung mit Parametern μ und σ^2 , falls $\log X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, falls also der Logarithmus von X normalverteilt ist mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Die Dichtefunktion f einer lognormal-verteilten Zufallsvariablen ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad x > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Erwartungswert und Varianz sind gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}, \quad \text{Var}(X) = \exp\{2(\mu + \sigma^2)\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\}.$$

Pareto Verteilung. Die Zufallsvariable X hat eine Pareto-Verteilung, falls ihre kumulative Verteilungsfunktion F respektive Dichtefunktion f gegeben sind durch

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha, \quad f(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{x^{1+\alpha}}, \quad \alpha, k > 0, x \geq k. \quad (17)$$

Für den Erwartungswert und die Varianz einer Pareto-verteilten Zufallsvariablen X gelten

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha k}{\alpha - 1}, \quad (\alpha > 1); \quad \text{Var}(X) = \frac{\alpha k^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}, \quad (\alpha > 2).$$

α -stabile Verteilung. Die α -stabile Verteilung wird durch vier Parameter beschrieben und mit $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ bezeichnet. Der Parameter α heisst charakteristischer Exponent und bestimmt das Tail-Verhalten von $X \sim S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$. Der Parameter $\beta \in [-1, 1]$ bezeichnet die Schiefe und legt fest, ob die Verteilung links- ($\beta < 0$) oder rechtsschief ($\beta > 0$) ist. Die Parameter σ und μ sind Skalierungs- resp. Lokalisierungsparameter. Die Familie der α -stabilen Verteilungen ist umfangreich und enthält die folgenden Verteilungen als Spezialfälle:

- Gaussche resp. Normalverteilung
- Cauchy Verteilung
- Lévy Verteilung.

Mit Ausnahme der oben erwähnten drei Klassen kann die Dichtefunktion einer α -stabilen Verteilung nicht in geschlossener Form angegeben werden. Jedoch kann die charakteristische Funktion immer spezifiziert werden. Für $\alpha \neq 1$ haben wir

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \text{sign}(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) + i\mu t\right\} \quad (18)$$

während im Fall $\alpha = 1$ gilt

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left\{-\sigma|t|\left(1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \log|t|\right) + i\mu t\right\}. \quad (19)$$

Im Falle von $\beta = 1$ existiert die Laplace-Transformierte und ist gegeben durch

$$\phi_X(\gamma) = \mathbb{E}[e^{-\gamma X}] = \begin{cases} \exp\{-(\gamma\sigma)^\alpha / \cos(\pi\alpha/2)\}, & \alpha \neq 1, \\ \exp\{2\sigma\gamma \log \gamma/\pi\}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (20)$$

siehe Samorodnitsky und Taqqu [13], Proposition 1.2.12.

Normalverteilung. Eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$ mit Erwartungswert μ und Varianz δ^2 hat Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Die charakteristische Funktion einer normalverteilten Zufallsvariablen ist gegeben durch $\varphi_X(t) = \exp\{i\mu t - \delta^2 t^2/2\}$; X ist somit stabil mit $\alpha = 2$, $\beta = 0$ und $\sigma = \delta/\sqrt{2}$, d.h. $X \sim S_2(\delta/\sqrt{2}, 0, \mu)$.

Cauchy Verteilung. Eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable hat Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}, \quad x, \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0. \quad (22)$$

Eine Cauchy-verteilte Zufallsvariable X ist α -stabil mit $\alpha = 1$ und $\beta = 0$, also $X \sim S_1(\sigma, 0, \mu)$.

Lévy Verteilung. Eine Zufallsvariable hat eine Lévy-Verteilung, falls ihre Dichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right\}, \quad x > \mu.$$

Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch $F(x) = 2(1 - \Phi(1/\sqrt{x-\mu})) = \operatorname{erfc}(\sqrt{\sigma/(2(x-\mu))})$ mit $\operatorname{erfc}(x) = 2\Phi(-x\sqrt{2}) = 2(1 - \Phi(x\sqrt{2}))$.

Eine Lévy-verteilte Zufallsvariable ist α -stabil mit $\alpha = 1/2$ und $\beta = 1$, d.h. $X \sim S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$.

4 Grenzverteilungen zentrierter und normierter Summen von Zufallsvariablen

In diesem Kapitel wollen wir die Grenzverteilungen von Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen bestimmen. In diesem Zusammenhang interessiert zum Beispiel die Frage nach der minimalen Anzahl erforderlicher Summanden, bis die zentrierte und normierte Summe hinreichend gut durch die Grenzverteilung approximiert wird. Diese Erkenntnis ist zum Beispiel dann von Nutzen, wenn aus dem Tail-Verhalten von wöchentlichen oder monatlichen logarithmierten Renditen eine Aussage über das Tail-Verhalten der logarithmierten Jahresrenditen gemacht werden soll.

In Abschnitt 4.1 untersuchen wir die Konvergenz von Pareto-verteilten Summanden, in Abschnitt 4.2 die Konvergenz von t -verteilten Summanden mit ν Freiheitsgraden ($\nu > 2$). Beachte, dass sowohl die Pareto- wie auch die t -Verteilung im Anziehungsbereich stabiler Verteilungen liegen (resp. im Anziehungsbereich der Normalverteilung im Falle endlicher Varianz), siehe Proposition 1.

Um festzustellen, wie nahe eine zentrierte und normierte Summe X_{*n} bei ihrer Grenzverteilung X liegt, müssen wir den Abstand zwischen diesen beiden Zufallsgrößen messen. Es ist naheliegend, die dazugehörigen Verteilungsfunktionen als Argumente der Abstandsfunktion zu verwenden.

Definition 4 Seien U und V zwei Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_U und F_V . Wir definieren

$$d_1(U, V) = \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{F}_U(x) - \bar{F}_V(x))^2 dx, \quad (23)$$

$$d_2(U, V) = \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{F}_U(x) - \bar{F}_V(x)| dx, \quad (24)$$

wobei $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. □

Da im Risikomanagement-Bereich der Fokus häufig auf extremen Ereignissen liegt, bestimmen wir zusätzlich die Risikomasse Value-at-Risk (VaR) und Expected Shortfall (oder Tail-VaR) der beiden Zufallsgrößen X_{*n} und X für verschiedene Werte von n und verschiedene Konfidenzniveaus p .

Definition 5 Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und sei $p \in (0, 1)$. Der Value-at-Risk zum Niveau p ist definiert als

$$\text{VaR}_p(X) = F_X^{-1}(p) = \inf\{y : F(y) \geq p\} \quad (25)$$

□

Die konzeptionelle Schwäche des Value-at-Risk besteht darin, dass er nicht sub-additiv ist. Der Expected Shortfall hingegen ist ein kohärentes Risikomass und erfüllt somit die Eigenschaft der Sub-Additivität. Anstatt ein bestimmtes Konfidenzniveau p zu fixieren, wird der VaR zur Bestimmung des Expected Shortfalls über alle Niveaus $u \geq p$ gemittelt, womit automatisch ‘weiter in den Tail der Verteilungsfunktion F geschaut’ wird.

Definition 6 Sei X eine integrierbare Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und sei $p \in (0, 1)$. Der Expected Shortfall (auch Tail-VaR genannt) zum Niveau p ist definiert als

$$\text{ES}_p(X) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 \text{VaR}_u(X) du \quad (26)$$

□

Es lässt sich zeigen, dass für eine stetige Verteilungsfunktionen F der Expected Shortfall gleich dem erwarteten Verlust entspricht im Falle, dass der VaR überschritten wird:

$$\text{ES}_p(X) = \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{\{X \geq \text{VaR}_p(X)\}}]}{1-p} = \frac{\int_{\text{VaR}_p(X)}^{\infty} y dF(y)}{1-p} = \mathbb{E}[X | X \geq \text{VaR}_p(X)]$$

Damit wir den Abstand zwischen X_{*n} und der Grenzverteilung X messen und die Risikomasse $\text{VaR}_p(X_{*n})$ respektive $\text{ES}_p(X_{*n})$ bestimmen können, brauchen wir Kenntnis der (empirischen) Verteilungsfunktion $\hat{F}_{X_{*n}}$. In den später folgenden numerischen Beispielen bestimmen wir diese mit Hilfe des Softwarepaketes **R**, und zwar entweder mit der Funktion `ecdf`¹ oder mit `aggregateDist` enthalten in der Bibliothek ‘actuar’. Mit der Funktion `aggregateDist` kann eine zusammengesetzte Schadenverteilung $S = \sum_{i=1}^N X_i$ auf fünf² verschiedene Arten ermittelt werden. Wir beschränken uns in den Beispielen auf den Monte Carlo Simulationsansatz, da dieser die numerisch stabilsten Resultate liefert.

4.1 Grenzverteilungen von Summen Pareto-verteilter Zufallsvariablen

Im Folgenden untersuchen wir das Konvergenzverhalten zentrierter und normierter Summen von unabhängigen und identisch Pareto-verteilten Zufallsvariablen Y_i für verschiedene Pareto-Parameter α . Die Variablen Y_i haben Verteilungsfunktion F respektive Dichtefunktion f :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha, \quad f(x) = \frac{\alpha k^\alpha}{x^{1+\alpha}}, \quad \alpha, k > 0, x \geq k.$$

Wir unterscheiden nach unterschiedlicher Schwere des Tails. Konkret betrachten wir die fünf Fälle $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha < 2$, $\alpha = 2$ und $\alpha > 2$ und bestimmen die Grenzverteilungen von $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$. Wir wiederholen, dass die Existenz einer nicht entarteten Grenzverteilung G aus Proposition 1 folgt. Die Grenzverteilungen sind stabil und werden mit $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ bezeichnet. Es zeigt sich, dass der Pareto-Parameter α massgeblich den charakteristischen Exponenten der stabilen Grenzverteilung bestimmt. Letzterer wird in der Regel ebenfalls mit α bezeichnet. In der Tat, gilt für den Pareto-Parameter $0 < \alpha < 2$, so stimmt dieser mit dem charakteristischen Exponenten der stabilen Grenzverteilung S_α überein, siehe Kapitel 4.1.1, 4.1.2 und 4.1.3. Ist der Pareto-Tail-Index hingegen grösser oder gleich zwei, so ist die Grenzverteilung normal. Dies ist gleichbedeutend damit, dass der charakteristische Exponent der Grenzverteilung $\alpha = 2$, siehe Kapitel 4.1.4 und 4.1.5.

Was den Schiefe-Parameter β der Grenzverteilung $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ betrifft, so gilt wegen der Tail-Ausgleichsbedingung in Proposition 1 $\beta = 1$. Ferner zeigt sich, dass der Lokalisierungsparameter μ identisch null ist. Somit geht es in den folgenden Kapiteln im Wesentlichen darum, einerseits die normalisierenden und zentrierenden Konstanten $a_n > 0$ und b_n zu bestimmen, andererseits den Skalierungsparameter σ der Grenzverteilung $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$.

Da wir das Grenzverhalten von unabhängigen und identisch Pareto-verteilten Summanden untersuchen, welche folglich –nomen est omen– Pareto-tails haben, gehören diese für $0 < \alpha < 2$ in den *normalen Anziehungsbereich* $\text{DNA}(G_\alpha)$ stabiler Verteilungen, siehe Proposition 2. Das

¹ `ecdf`: empirical cumulative distribution function.

² `"recursive"`, `"convolution"`, `"normal"`, `"npower"`, `"simulation"`.

heisst, die normalisierenden Konstanten a_n sind von der Form $a_n = c n^{1/\alpha}$ für eine Konstante c . Es zeigt sich sogar, dass $c = 1$ gewählt werden kann. Dies trifft jedoch nicht zu im Fall $\alpha = 2$; hier ist die Varianz von Y unendlich und somit sind die normalisierenden Konstanten $a_n > 0$ gegeben durch die Bedingung $n\mu(a_n)/a_n^2 = 1$, siehe Tabelle 1. Ist der Pareto-Parameter $\alpha > 2$, gilt schliesslich $a_n = c\sqrt{n}$ mit $c^2 = \text{Var}(Y)$.

4.1.1 Tail-Index $0 < \alpha < 1$

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit Pareto-verteilten Zufallsvariablen, welche sehr heavy-tailed sind. Ihr Tail-Verhalten ist in dem Sinne extrem, als der Tail-Index α kleiner als eins ist ($0 < \alpha < 1$). Man beachte, dass eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit Tail-Index $\alpha < 1$ unendlichen Erwartungswert hat. Praktische Anwendungen mit derartigen Verteilungen sind äusserst selten. Hofert und Wüthrich [9] zeigen in ihrer Arbeit, dass die Modellierung von Schäden nuklearer Ereignisse zu Verteilungen mit unendlichem Erwartungswert führt. Aus dem Blickwinkel der Versicherungsindustrie sind Ereignisse mit unendlichem Erwartungswert nicht handhabbar. Es würde bedeuten, dass man sich gegen solche Schadenereignisse nicht versichern kann, da die gängigsten Ansätze zur Prämienbestimmung auf dem Erwartungswert-Prinzip basieren. Ebenso muss man sich der Schwierigkeiten oder gar Limiten bei numerischen Anwendungen bewusst sein, insbesondere im Bereich der Monte Carlo Simulation (rare event simulation).

Proposition 3 *Seien $Y_i, i \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch Pareto-verteilt mit $\bar{F}(x) = (k/x)^\alpha$, $x \geq k$, wobei $0 < \alpha < 1$. Dann konvergiert $X_{*n} = \sum_{i=1}^n Y_i/n^{1/\alpha}$ in Verteilung gegen eine α -stabile Zufallsvariable $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k(\Gamma(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha}$.*

Insbesondere sind in diesem Fall die zentrierenden Konstanten b_n identisch null, während $a_n = n^{1/\alpha}$. Beachte, dass $\cos(\pi\alpha/2) > 0$ ist für $0 < \alpha < 1$.

Die nachfolgende Beweisführung ist angelehnt an die Ausführungen in Beispiel g von Feller [4], Kapitel XVII.3, Seite 568.

Beweis. Sei $\zeta > 0$. Wir zeigen, dass $n(\varphi_Y(\zeta/n^{1/\alpha}) - 1)$ mit wachsendem n gegen $\Psi_\alpha(\zeta) = -(\sigma\zeta)^\alpha(1 - i \tan(\pi\alpha/2))$ strebt, wobei

$$\sigma = k\left(\Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)^{1/\alpha}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} n(\varphi_Y(\zeta/n^{1/\alpha}) - 1) &= n\left(\alpha k^\alpha \int_k^\infty e^{i\zeta y/n^{1/\alpha}} y^{-1-\alpha} dy - 1\right) \\ &= n\alpha k^\alpha \left(\int_k^\infty \frac{e^{i\zeta y/n^{1/\alpha}} - 1}{y^{1+\alpha}} dy\right) \end{aligned}$$

Wir substituieren $y/n^{1/\alpha}$ durch u und lassen dann n gegen unendlich streben. Den Limes bezeichnen wir mit $\Psi_\alpha(\zeta)$. Wir finden

$$\Psi_\alpha(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_Y(\zeta/n^{1/\alpha}) - 1) = \alpha k^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\zeta u} - 1}{u^{1+\alpha}} du.$$

Wir schreiben $\Psi_\alpha(\zeta) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$ mit

$$I(\lambda) = \alpha k^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-(\lambda-i\zeta)u} - 1}{u^{1+\alpha}} du.$$

Partielle Integration liefert

$$I(\lambda) = -k^\alpha(\lambda - i\zeta) \int_0^\infty e^{-(\lambda-i\zeta)u} u^{-\alpha} du.$$

Durch Substitution von $(\lambda - i\zeta)u$ mit t finden wir

$$I(\lambda) = -k^\alpha(\lambda - i\zeta)^\alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt = -k^\alpha(\lambda - i\zeta)^\alpha \Gamma(1 - \alpha).$$

Wir schreiben $(\lambda - i\zeta)^\alpha = r^\alpha \exp\{i\theta\alpha\}$ mit $r^2 = (\lambda^2 + \zeta^2)$ und $\theta = \theta(\lambda)$ derart, dass $\tan \theta = -\zeta/\lambda$, also $\theta = \arctan(-\zeta/\lambda)$. Beachte, dass $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \theta(\lambda) = -\pi/2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(\zeta) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = -k^\alpha \Gamma(1 - \alpha) \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (\lambda^2 + \zeta^2)^{\alpha/2} e^{i\theta\alpha} \\ &= -(k\zeta)^\alpha \Gamma(1 - \alpha) e^{-i\pi\alpha/2} \\ &= -(k\zeta)^\alpha \Gamma(1 - \alpha) \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \\ &= -(k\zeta)^\alpha \Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left(1 - i \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \\ &= -\sigma^\alpha k^\alpha \left(1 - i \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\sigma = k \left(\Gamma(1 - \alpha) \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^{1/\alpha}. \quad (27)$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{*n}(\zeta) = \exp\{\Psi_\alpha(\zeta)\}$. Daraus und mit (18) folgt, dass die Grenzverteilung von X_{*n} stabil ist mit Parametern α , $\beta = 1$ und σ wie in (27). \square

Alternativ kann man den Beweis auch vermöge der Laplace-Transformierten führen anstelle charakteristischer Funktionen. Bezeichne dazu $\phi_n(\gamma) = \mathbb{E}[\exp\{-\gamma X_{*n}\}]$ die Laplace-Transformierte von X_{*n} . Wir zeigen, dass

$$\phi_n(\gamma) = \left(1 + \frac{x_n(\gamma)}{n} \right)^n$$

mit

$$x_n(\gamma) = \alpha(\gamma k)^\alpha \int_{\gamma k/n^{1/\alpha}}^\infty e^{-t} t^{-\alpha-1} - n$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\gamma) = -(\gamma k)^\alpha \Gamma(1 - \alpha)$. Zusammen mit (20) folgt daraus die Behauptung. Wegen der Unabhängigkeit der Y_i gilt:

$$\begin{aligned}\phi_n(\gamma) &= \mathbb{E}[e^{-\gamma X_{*n}}] \\ &= \left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma Y/n^{1/\alpha}} \right] \right)^n \\ &= \left(\int_k^\infty e^{-\gamma y/n^{1/\alpha}} f_Y(y) dy \right)^n \\ &= \left(\alpha k^\alpha \int_k^\infty e^{-\gamma y/n^{1/\alpha}} y^{-\alpha-1} dy \right)^n\end{aligned}$$

Wir substituieren $\gamma y/n^{1/\alpha} = t$ und finden damit

$$\phi_n(\gamma) = \left(\frac{\alpha(\gamma k)^\alpha \int_{\gamma k/n^{1/\alpha}}^\infty e^{-t} t^{-\alpha-1} dt}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{x_n}{n} \right)^n$$

mit

$$x_n(\gamma) = \alpha(\gamma k)^\alpha \int_{\gamma k/n^{1/\alpha}}^\infty e^{-t} t^{-\alpha-1} dt - n$$

Wir zeigen nun, dass gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\gamma) = -(\gamma k)^\alpha \Gamma(1 - \alpha)$. Zu diesem Zwecke halten wir zuerst fest, dass gilt

$$n = \alpha(\gamma k)^\alpha \int_{\gamma k/n^{1/\alpha}}^\infty t^{-\alpha-1} dt.$$

Damit lässt sich $x_n(\gamma)$ schreiben als

$$\begin{aligned}x_n(\gamma) &= \alpha(\gamma k)^\alpha \int_{\gamma k/n^{1/\alpha}}^\infty t^{-\alpha-1} (e^{-t} - 1) dt \quad \text{und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\gamma) &= \alpha(\gamma k)^\alpha \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (e^{-t} - 1) dt \\ &= x(\gamma).\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert schliesslich

$$\begin{aligned}x &= (\gamma k)^\alpha \int_0^\infty \alpha t^{-\alpha-1} (e^{-t} - 1) dt \\ &= (\gamma k)^\alpha \left(-t^{-\alpha} (e^{-t} - 1) \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty t^{-\alpha} e^{-t} dt \right) \\ &= -(\gamma k)^\alpha \int_0^\infty t^{(1-\alpha)-1} e^{-t} dt \\ &= -(\gamma k)^\alpha \Gamma(1 - \alpha)\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Im Folgenden betrachten wir ein numerisches Beispiel mit $\alpha = 3/4$ und $k = 1$. Wir erzeugen $N = 10^7$ Realisierungen \hat{x}_{*n} von X_{*n} für $n \in \{12, 52, 100, 250, 500\}$ und vergleichen $\text{VaR}_p(X_{*n})$ mit dem Value-at-Risk der stabilen Grenzverteilung $S_{3/4}(\sigma, 1, 0)$, wobei $\sigma =$

$k(\Gamma(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha} = 1.54749$. Wir wählen $p \in \{0.9, 0.95, 0.975, 0.99, 0.995\}$. Wir rufen in Erinnerung, dass X_{*n} unendlichen Erwartungswert hat. Dies deshalb, weil eine Pareto verteilte Zufallsvariable mit Pareto-Parameter $\alpha = 3/4 < 1$ unendlichen Erwartungswert hat. Das gleiche trifft für die stabile Zufallsvariable $S_{3/4}(\sigma, 1, 0)$ zu. Eine Konsequenz davon ist, dass das Risikomass Expected Shortfall nicht existiert, und zwar weder für X_{*n} noch für $S_{3/4}(\sigma, 1, 0)$.

Ein einfacher Schätzer des Value-at-Risk zum Konfidenzniveau p ist das empirische Quantil

$$\hat{x}_p = \hat{F}_{*n,N}^{-1}(p),$$

wobei $\hat{F}_{*n,N}$ die empirische Verteilungsfunktion von X_{*n} bezeichnet und F^{-1} die verallgemeinerte Inverse einer Verteilungsfunktion F , also $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$. Unter minimalen Anforderungen konvergiert das empirische Quantil \hat{x}_p gegen das wahre Quantil x_p mit $n \rightarrow \infty$. Zudem kann man zeigen, dass \hat{x}_p asymptotisch normalverteilt ist, siehe zum Beispiel Serfling [14] S. 75:

$$\sqrt{N}(\hat{x}_p - x_p) \rightarrow \frac{\sqrt{p(1-p)}}{f_{*n}(x_p)} Z, \quad N \rightarrow \infty, \quad (28)$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und f_{*n} die Dichtefunktion der Variablen X_{*n} bezeichnet. Der Ausdruck $p(1-p)$ bezeichnet die Varianz des Indikators $1\{X_{*n} > p\}$. Aus Gleichung (28) ist ersichtlich, dass diese Varianz mit dem Faktor $1/f_{*n}^2(x_p)$ multipliziert wird. Dieser Faktor kann sehr gross sein, insbesondere für Werte von p nahe bei eins, da in diesem Fall die Dichtefunktion nahe bei null ist.

Aus der asymptotischen Normalität (28) lässt sich folgendes Vertrauensintervall für x_p ableiten:

$$\hat{x}_p \pm q_{1-a/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{f_{*n}(x_p)\sqrt{N}},$$

wobei $q_{1-a/2}$ das $(1-a/2)$ -Quantil einer standard normalverteilten Zufallsvariablen bezeichnet (z.B. $q_{1-a/2} = 1.96$ für $a = 5\%$). Die Abhängigkeit von f_{*n} erschwert die Anwendung dieses Intervallschätzers in der Regel erheblich. Ausgehend von den $N = 10^7$ Realisierungen $\hat{x}_{*n,i}$ approximieren wir den Wert $f_{*n}(x_p)$ durch $\hat{f}_{*n}(\hat{x}_p)$, indem wir die Dichtefunktion in \mathbb{R} vermöge der Funktion `density` schätzen.

Wir folgern aus Tabelle 2, dass der Value-at-Risk der Zufallsvariablen X_{*n} bereits bei relativ wenigen Summanden hinreichend gut durch den Value-at-Risk der (stabilen) Grenzverteilung approximiert wird. Auch die Güte der VaR-Schätzer erweist sich als relativ gut. Die Ursache dafür liegt einerseits in der relativ hohen Anzahl Simulationen ($N = 10^7$), andererseits im Umstand, dass die Verteilung der Summanden sehr heavy-tailed ist und damit $f_{*n}(x_p)$ noch immer hinreichend weit von null entfernt liegt.

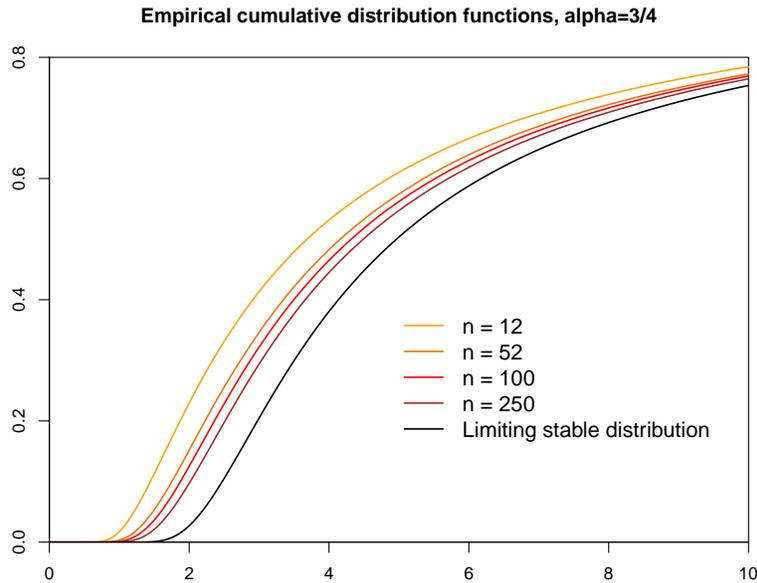


Abbildung 2: Kumulative Verteilungsfunktionen normierter Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 3/4$, $k = 1$) für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie Verteilungsfunktion der zugehörigen stabilen Grenzverteilung $S_{3/4}(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k(\Gamma(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha} = 1.54749$.

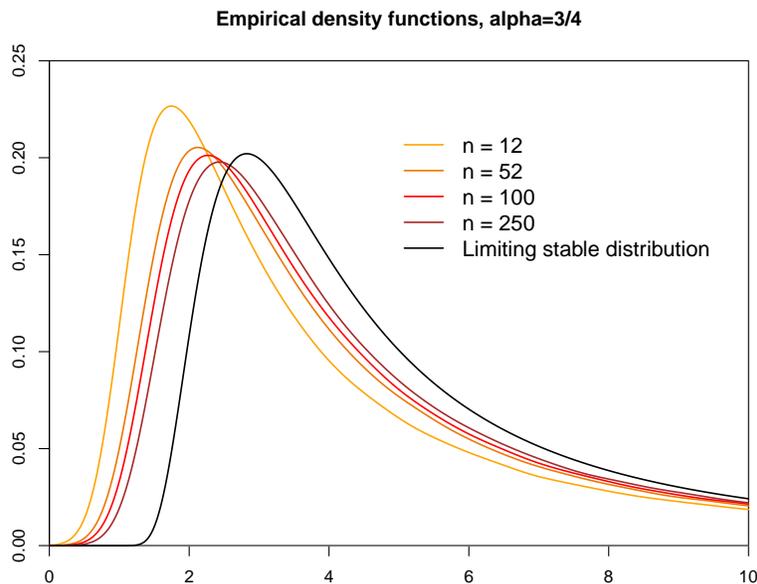


Abbildung 3: Dichtefunktionen normierter Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 3/4$, $k = 1$) für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie Dichtefunktion der zugehörigen stabilen Grenzverteilung $S_{3/4}(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k(\Gamma(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha} = 1.54749$.

n	VaR $_p(X_{*n})$ und 95%-Konfidenzintervall					$d_1(X_{*n}, X)$
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	
1	21.54	54.29	136.80	461.40	1170.19	0.462
12	25.01	58.94	143.15	469.98	1174.42	0.135
	[24.96, 25.06]	[58.75, 59.14]	[142.44, 143.86]	[466.25, 473.70]	[1166.10, 1182.74]	
52	25.81	59.99	144.57	476.50	1192.49	0.057
	[25.75, 25.86]	[59.80, 60.20]	[143.85, 145.30]	[472.34, 480.65]	[1184.01, 1200.98]	
100	26.00	60.27	144.69	476.53	1184.07	0.038
	[25.94, 26.05]	[60.08, 60.46]	[143.94, 145.44]	[472.08, 480.97]	[1174.66, 1193.48]	
250	26.17	60.40	144.82	475.22	1178.18	0.021
	[26.11, 26.23]	[60.20, 60.61]	[144.14, 145.50]	[470.51, 479.92]	[1161.51, 1194.85]	
500	26.25	60.52	145.29	477.65	1187.25	0.013
	[26.20, 26.31]	[60.31, 60.72]	[144.62, 145.96]	[473.92, 481.38]	[1173.25, 1201.25]	
∞	26.64	60.85	145.16	475.58	1184.03	0.000

Tabelle 2: VaR-Schätzungen mit 5%-Vertrauensintervall für normierte Summen $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i)/n^{1/\alpha}$ mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 3/4$, $k = 1$), sowie Abstandsfunktion d_1 .

4.1.2 Tail-Index $\alpha = 1$

Wir beginnen unsere Ausführungen im Fall $\alpha = 1$ mit dem Beweis der folgenden Proposition. Beachte, dass hier – im Unterschied zum Fall $\alpha < 1$ – eine Zentrierung durch Konstanten b_n erforderlich ist, wenn gleich diese nicht die übliche ist.

Proposition 4 *Seien Y_i , $i \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch Pareto-verteilt mit $\bar{F}(x) = k/x$, $x \geq k$. Dann konvergiert $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$ in Verteilung gegen eine stabile Zufallsvariable $X \sim S_1(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k\pi/2$, wobei die normierenden und zentrierenden Konstanten a_n und b_n gegeben sind durch*

$$a_n = n, \quad b_n = n^2 \mathbb{E} \left[\sin \left(\frac{Y}{n} \right) \right] = n^2 k \int_k^\infty \frac{\sin(y/n)}{y^2} dy.$$

Beweis. Sei $\zeta > 0$. Wir zeigen, dass die charakteristische Funktion $\varphi_{*n}(\zeta)$ von X_{*n} gegen $\omega(\zeta) = \exp\{\Psi(\zeta)\}$ konvergiert mit $\Psi(\zeta) = -k\zeta\pi/2 - ik\zeta \log \zeta$. Die stetige Funktion $\Psi(\zeta)$ lässt sich schreiben als $\Psi(\zeta) = -\sigma\zeta(1 + 2i \log \zeta/\pi)$ mit $\sigma = k\pi/2$. Daraus und mit (19) folgt die Behauptung.

Wir bemerken zuerst, dass für X_{*n} gilt

$$\varphi_{*n}(\zeta) = \mathbb{E}[e^{i\zeta X_{*n}}] = \mathbb{E}[e^{i\zeta(S_n/n - \tilde{b}_n)}] = \mathbb{E}[e^{i\zeta Y/n}]^n e^{-i\zeta n \tilde{b}_n}$$

mit $\tilde{b}_n = b_n/(na_n) = \mathbb{E}[\sin(Y/n)]$. Durch Logarithmieren finden wir weiter

$$\log \varphi_{*n}(\zeta) = n \log \varphi_Y(\zeta/n) - i\zeta n \tilde{b}_n = n(\log \varphi_Y(\zeta/n) - i\zeta \tilde{b}_n)$$

Man beachte, dass die Bedingung $\log \varphi_{*n}(\zeta) \rightarrow \Psi(\zeta)$, $n \rightarrow \infty$, äquivalent ist mit

$$n(\varphi_Y(\zeta/n) - 1 - i\zeta\tilde{b}_n) \rightarrow \Psi(\zeta), \quad n \rightarrow \infty.$$

da für kleine x gilt $\log(1+x) \approx x$.

Weil $f_Y(y) = ky^{-2}$, $y \geq k$, eine Dichtefunktion ist, gilt $\int_k^\infty f_Y(y) dy = k \int_k^\infty y^{-2} dy = 1$. Routine-Berechnungen zeigen

$$\begin{aligned} & n(\varphi_Y(\zeta/n) - 1 - i\zeta\tilde{b}_n) \\ &= n \left(k \int_k^\infty e^{i\zeta y/n} y^{-2} dy - 1 - i\zeta k \int_k^\infty \sin(y/n) y^{-2} dy \right) \\ &= nk \left(\int_k^\infty \frac{e^{i\zeta y/n} - 1 - i\zeta \sin(y/n)}{y^2} dy \right) \\ &= nk \left(\int_k^\infty \frac{\cos(\zeta y/n) + i \sin(\zeta y/n) - 1 - i\zeta \sin(y/n)}{y^2} dy \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Für den Imaginärteil Im_n von (29) finden wir durch Substitution von $\zeta y/n = u$:

$$\begin{aligned} \text{Im}_n &= nk \left(\int_k^\infty \frac{\sin(\frac{\zeta y}{n})}{y^2} dy - \zeta \int_k^\infty \frac{\sin(\frac{y}{n})}{y^2} dy \right) \\ &= nk \left(\int_{\zeta k/n}^\infty \frac{\sin(u)}{nu^2} \zeta du - \zeta \int_{k/n}^\infty \frac{\sin(u)}{nu^2} du \right) \\ &= k\zeta \left(\int_{\zeta k/n}^\infty \frac{\sin(u)}{u^2} du - \int_{k/n}^\infty \frac{\sin(u)}{u^2} du \right) \\ &= -k\zeta \int_{k/n}^{\zeta k/n} \frac{\sin(u)}{u^2} du. \end{aligned}$$

Wir substituieren jetzt $u = kx/n$ und finden weiter

$$\text{Im}_n = -k\zeta \int_1^\zeta \frac{\sin(\frac{kx}{n})}{\frac{k^2 x^2}{n^2}} \frac{k}{n} dx = -k\zeta \int_1^\zeta \frac{\sin(\frac{kx}{n})}{\frac{kx}{n}} \frac{dx}{x}.$$

Beachte, dass der Ausdruck $\sin(kx/n)/(kx/n)$ – unter Anwendung von l’Hospital’s Regel – mit wachsendem n gegen 1 strebt. Für den Imaginärteil Im_n bedeutet dies somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}_n = -k\zeta \int_1^\zeta \frac{dx}{x} = -k\zeta \log x \Big|_{x=1}^{x=\zeta} = -k\zeta \log \zeta.$$

Wir wenden uns nun dem Realteil Re_n zu und bemerken zuerst, dass

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(\kappa x)}{\kappa x^2}$$

eine symmetrische Dichtefunktion ist, also $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$, oder $\int_0^{\infty} f(y) dy = 1/2$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_n &= nk \left(\int_k^{\infty} \frac{\cos(\frac{\zeta y}{n})}{y^2} dy - \int_k^{\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) \\ &= k\zeta \left(\int_{\zeta k/n}^{\infty} \frac{\cos(u)}{u^2} du - \int_{\zeta k/n}^{\infty} \frac{1}{u^2} du \right) \\ &= -k\zeta \int_{\zeta k/n}^{\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du, \end{aligned}$$

wobei wir wiederum die Substitution $\zeta y/n = u$ vorgenommen haben. Mit wachsendem n finden wir schliesslich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}_n = -k\zeta \left(\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du \right) = -k\zeta \pi \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du \right) = -\frac{k\zeta \pi}{2}.$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_Y(\zeta/n) - 1 - i\zeta \tilde{b}_n) = \Psi(\zeta)$$

mit

$$\Psi(\zeta) = -\frac{k\zeta \pi}{2} - ik\zeta \log \zeta = -\frac{k\zeta \pi}{2} \left(1 + i\frac{2}{\pi} \log \zeta \right) = -\sigma \zeta \left(1 + i\frac{2}{\pi} \log \zeta \right)$$

wobei $\sigma = k\pi/2$. □

Will man Proposition 4 für numerische Berechnungen benutzen, so muss man beachten, dass es für die zentrierenden Konstanten b_n keine geschlossene Lösung gibt. Dies liegt daran, dass es für den Integranden $\sin(u)/u^2$, welcher bei der Bestimmung von $\mathbb{E}[\sin(Y/n)]$ erscheint, keine elementare Stammfunktion gibt. Abhilfe kann man sich zum Beispiel durch numerische Integration verschaffen. In der freien Programmiersprache R zum Beispiel mit der Funktion

```
>integrate(f, u.min, Inf)$value
```

mit

```
f = function(u){
  sin(u)/u^2
}
```

Tabelle 3 zeigt, dass zentrierte und normierte Summen unabhängiger und identisch Paretoverteilter Zufallsvariablen mit Pareto-Parameter $\alpha = 1$ sehr schnell gegen die zugehörige stabile Grenzverteilung $S_1(\sigma, 1, 0)$ konvergieren. Dies manifestiert sich zum Beispiel darin, dass der 99%-VaR *eines* Summanden nur um ca. 4% vom entsprechenden VaR der stabilen Grenzverteilung differiert ($\operatorname{VaR}_{0.99}(X_{*1}) = 99.496$, $\operatorname{VaR}_{0.99}(X) = 104.156$). Auch die Abstände der Verteilungsfunktionen – ausgedrückt durch die Metrik d_1 – sind viel kleiner als im Fall $\alpha = 3/4$.

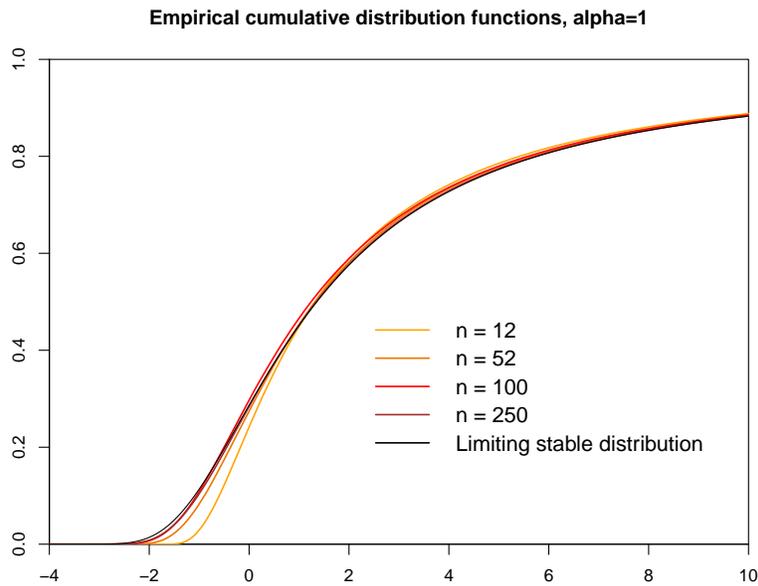


Abbildung 4: Kumulative Verteilungsfunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 1$, $k = 1$) für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie Verteilungsfunktion der zugehörigen stabilen Grenzverteilung $S_1(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k\pi/2 = 1.5708$.

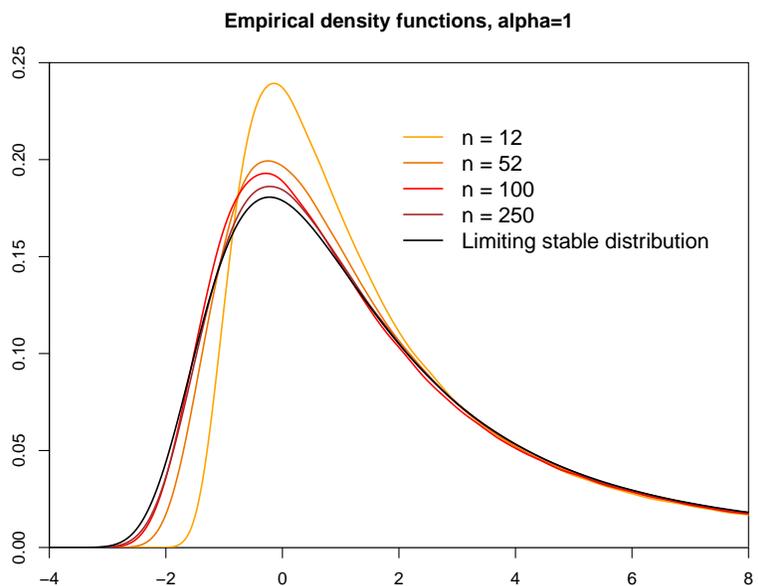


Abbildung 5: Dichtefunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 1$, $k = 1$) für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie Dichtefunktion der zugehörigen stabilen Grenzverteilung $S_1(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k\pi/2 = 1.5708$.

n	$\text{VaR}_p(X_{*n})$					$d_1(X_{*n}, X)$
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	
1	9.496	19.496	39.496	99.496	199.496	0.146
12	11.191	21.894	42.630	102.861	203.068	0.012
52	11.517	22.321	43.084	104.198	205.732	0.004
100	11.491	22.301	43.050	104.197	204.631	0.003
250	11.609	22.425	43.199	104.277	204.211	0.000
500	11.624	22.432	43.269	104.591	205.530	0.000
∞	11.649	22.450	43.203	104.156	204.862	0.000

Tabelle 3: Risikomass Value-at-Risk für zentrierte und normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 1$, $k = 1$) für verschiedene n sowie Abstandsfunktion d_1 .

Wir schliessen unsere Ausführungen mit der Grenzwertbestimmung von Summen stabiler Zufallsvariablen mit charakteristischem Exponenten $\alpha = 1$. Da diese stabil sind, ist auch deren (zentrierte und normierte) Summe wiederum 1-stabil. Seien also Y_i unabhängig und identisch $S_1(\sigma, 1, 0)$ -verteilt mit beliebigem $\sigma > 0$. Dann hat die zentrierte und normierte Summe $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$ mit $a_n = n$ und $b_n = 2\sigma n \log n/\pi$ die gleiche Verteilung wie die Summanden Y_i , also $X_{*n} \sim S_1(\sigma, 1, 0)$. Zum Beweis betrachten wir den Logarithmus der Laplace-Transformierten von X_{*n} und finden

$$\log \phi_n(\gamma) = n \left(\log \phi_Y(\gamma/n) + \frac{2\sigma\gamma}{\pi n} \log n \right) = n \left(\frac{2\sigma}{\pi} \frac{\gamma}{n} \log\left(\frac{\gamma}{n}\right) + \frac{2\sigma\gamma}{\pi n} \log n \right) = \frac{2\sigma}{\pi} \gamma \log \gamma,$$

wobei wir (20) benutzt haben und die Tatsache, dass $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$. Die Behauptung folgt nun aus (20).

4.1.3 Tail-Index $1 < \alpha < 2$

Wir beginnen unsere Ausführungen mit der Feststellung, dass Pareto-verteilte Zufallsvariablen mit einem Pareto-Parameter $\alpha > 1$ endlichen Erwartungswert haben. Dies hat zur Folge, dass eine Zentrierung notwendig sein wird, im Unterschied etwa zu den Fällen $\alpha \leq 1$. Mit anderen Worten, es sind nebst den normalisierenden Konstanten a_n auch zentrierende Konstanten b_n erforderlich, damit sich die Summen unabhängiger und identisch Pareto-verteilter Zufallsvariablen der Grenzverteilung annähern.

Proposition 5 *Seien Y_i , $i \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch Pareto-verteilt mit $\bar{F}(x) = (k/x)^\alpha$, $x \geq k$, wobei $1 < \alpha < 2$. Dann konvergiert $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$ in Verteilung gegen eine α -stabile Zufallsvariable $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k(\Gamma(2 - \alpha)/(1 - \alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2}))^{1/\alpha}$, wobei die normierenden und zentrierenden Konstanten a_n und b_n gegeben sind durch*

$$a_n = n^{1/\alpha}, \quad b_n = n\mu = n\mathbb{E}[Y] = n\alpha k^\alpha \int_k^\infty y^{-\alpha} dy = \frac{n\alpha k}{\alpha - 1}.$$

Man beachte, dass $\cos(\pi\alpha/2) < 0$ ist für $1 < \alpha < 2$. Zum Beweis von Proposition 5 arbeiten wir wiederum mit charakteristischen Funktionen.

Beweis. Sei $\zeta > 0$. Wir zeigen, dass $n(\varphi_Y(\zeta/n^{1/\alpha}) - 1 - i\zeta\mu/n^{1/\alpha})$ mit wachsendem n gegen $\Psi_\alpha(\zeta) = -(\sigma\zeta)^\alpha(1 - i \tan(\pi\alpha/2))$ strebt, wobei

$$\sigma = k \left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{1-\alpha} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^{1/\alpha}.$$

Wir führen die analogen Berechnungen durch wie in Kapitel 4.1.1. Es gilt

$$\begin{aligned} & n(\varphi_Y(\zeta/n^{1/\alpha}) - 1 - i\zeta\mu/n^{1/\alpha}) \\ &= n \left(\alpha k^\alpha \int_k^\infty e^{i\zeta y/n^{1/\alpha}} y^{-1-\alpha} dy - 1 - i\zeta\alpha k^\alpha \int_k^\infty y^{-\alpha}/n^{1/\alpha} dy \right) \\ &= n\alpha k^\alpha \left(\int_k^\infty \frac{e^{i\zeta y/n^{1/\alpha}} - 1 - i\zeta y/n^{1/\alpha}}{y^{1+\alpha}} dy \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Wir substituieren $y/n^{1/\alpha}$ durch u und lassen dann n gegen unendlich streben. Den Limes bezeichnen wir mit $\Psi_\alpha(\zeta)$. Wir finden

$$\Psi_\alpha(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\varphi_Y(\zeta/n^{1/\alpha}) - 1 - i\zeta\mu/n^{1/\alpha}) = \alpha k^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\zeta u} - 1 - i\zeta u}{u^{1+\alpha}} du.$$

Durch eine partielle Integration wird der Exponent im Nenner des obigen Integrals um eins vermindert, womit die Ergebnisse aus Kapitel 4.1.1 angewendet werden können. Wir setzen dazu $\tilde{\alpha} = \alpha - 1$ und stellen fest, dass $0 < \tilde{\alpha} < 1$. Es folgt also

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(\zeta) &= \alpha k^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\zeta u} - 1 - i\zeta u}{u^{1+\alpha}} dy = i\zeta k^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{i\zeta u} - 1}{u^{\tilde{\alpha}+1}} du \\ &= -i(\zeta k)^\alpha \frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}} \left(\cos\left(\frac{\pi\tilde{\alpha}}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi\tilde{\alpha}}{2}\right) \right). \end{aligned}$$

Beachte, dass $\cos(\pi\tilde{\alpha}/2) = \cos(\pi\alpha/2 - \pi/2) = \sin(\pi\alpha/2)$ und $\sin(\pi\tilde{\alpha}/2) = \sin(\pi\alpha/2 - \pi/2) = -\cos(\pi\alpha/2)$. Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(\zeta) &= -i(\zeta k)^\alpha \frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}} \left(\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \\ &= (\zeta k)^\alpha \frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}} \left(\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \\ &= (\zeta k)^\alpha \frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})}{\tilde{\alpha}} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left(1 - i \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \\ &= (\zeta k)^\alpha \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left(1 - i \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \\ &= -\sigma^\alpha \zeta^\alpha \left(1 - i \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\sigma = k \left(\frac{\Gamma(2 - \alpha)}{1 - \alpha} \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right)^{1/\alpha}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die charakteristische Funktion $\varphi_{*n}(\zeta)$ von X_{*n} mit wachsendem n gegen $\exp\{\Psi_\alpha(\zeta)\}$ strebt, woraus zusammen mit (18) die Behauptung folgt. \square

Tabelle 4 zeigt die Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für die approximierenden Verteilungen X_{*n} im Vergleich mit der Grenzverteilung X . Es ist ersichtlich, dass sich die VaR für die ausgewählten Konfidenzniveaus ‘von unten’ dem Risikomass der Grenzverteilung annähern, während im Fall des Expected Shortfalls die Annäherung von ‘von oben’ erfolgt. Konkret beträgt $\text{VaR}_{0.99}(X_{*12}) = 20.603$ und somit ca. 96% von $\text{VaR}_{0.99}(X) = 21.505$. Beim Expected Shortfall hingegen sind die Verhältnisse bei 12 Monatsrenditen wie folgt: $\text{ES}_{0.99}(X_{*12}) = 71.614$, was ca. 111% von $\text{ES}_{0.99}(X) = 64.615$ entspricht, siehe Tabelle 4. Dies bedeutet, dass bei Verwendung des Expected Shortfalls in Kombination mit der Grenzverteilung das wahre Risikokapital *unterschätzt* würde.

n	$\text{VaR}_p(X_{*n})$					$\text{ES}_p(X_{*n})$				
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	1.638	4.362	8.683	18.480	31.208	10.609	18.478	30.842	58.566	93.506
12	2.910	5.998	10.602	20.603	33.331	13.382	22.581	37.275	71.614	117.440
52	3.334	6.475	11.083	21.156	34.000	13.553	22.469	36.577	69.114	111.856
100	3.464	6.610	11.201	21.250	33.956	12.969	21.170	33.851	62.151	97.887
250	3.594	6.744	11.319	21.292	34.005	13.284	21.668	34.719	64.181	101.906
500	3.674	6.815	11.399	21.438	34.147	13.373	21.767	34.849	64.325	102.050
∞	3.959	7.057	11.565	21.505	34.184	13.606	21.966	35.031	64.615	102.589

Tabelle 4: Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für zentrierte und normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 1.5$, $k = 1$) für verschiedene n .

n	$d_1(X_{*n}, X)$	$d_2(X_{*n}, X)$
1	0.231	1.521
12	0.057	0.790
52	0.022	0.515
100	0.015	0.675
250	0.008	0.344
500	0.005	0.408
∞	0.000	0.000

Tabelle 5: Abstände d_1 und d_2 zwischen zentrierten und normierten Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 1.5$, $k = 1$) und ihrer Grenzverteilung.

Grafiken 6 und 7 zeigen die Annäherung von X_{*n} an die stabile Grenzverteilung $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ für verschiedene Werte von $n \in \{12, 52, 100, 250\}$, symbolisiert durch die entsprechenden Verteilungs- resp. Dichtefunktionen.

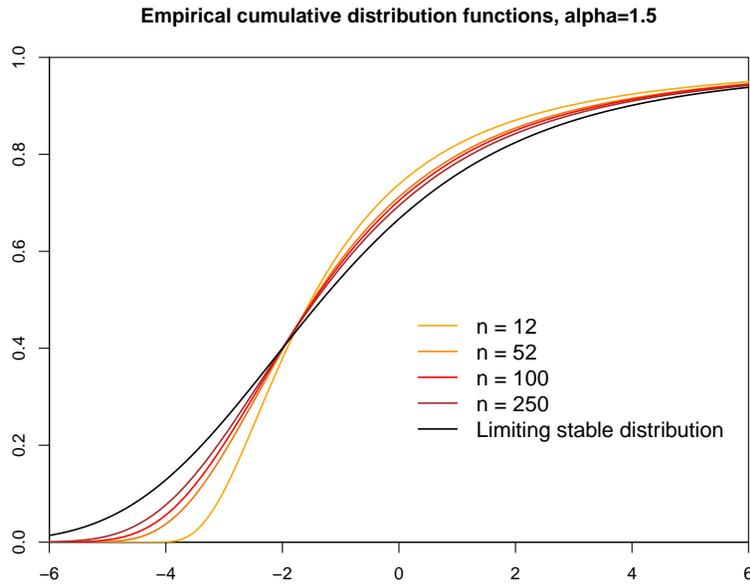


Abbildung 6: Kumulative Verteilungsfunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 1.5$, $k = 1$) für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie Verteilungsfunktion der zugehörigen stabilen Grenzverteilung $S_{1.5}(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k(\Gamma(2 - \alpha)/(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha} = 1.84527$.

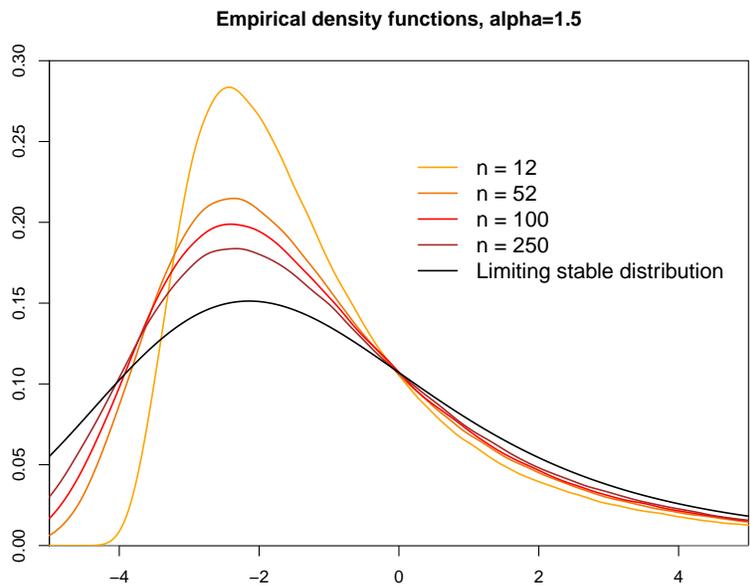


Abbildung 7: Dichtefunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 1.5$, $k = 1$) für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie Dichtefunktion der zugehörigen stabilen Grenzverteilung $S_{1.5}(\sigma, 1, 0)$ mit $\sigma = k(\Gamma(2 - \alpha)/(1 - \alpha) \cos(\pi\alpha/2))^{1/\alpha} = 1.84527$.

4.1.4 Tail-Index $\alpha = 2$

Wir bemerken zuerst, dass eine Pareto-verteilte Zufallsvariable Y mit Verteilungsfunktion F gegeben durch $F(x) = 1 - (k/x)^2$ unendliche Varianz hat. Trotzdem gehört F_Y in den Anziehungsbereich $DA(\Phi)$ der Normalverteilung, siehe Proposition 1: Die Bedingung $F_Y \in DA(\Phi)$ ist äquivalent damit, dass die Funktion $\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF(y)$ langsam variierend ist. Es gilt für $x > k$

$$\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF(y) = 2k^2 \int_k^x \frac{1}{y} dy = 2k^2(\log(x) - \log(k)).$$

Für die Funktion $L(x) = 2k^2(\log(x) - \log(k))$ finden wir für $t > k$

$$\frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{\log(tx) - \log(k)}{\log(t) - \log(k)} = 1 + \frac{\log(x)}{\log(t) - \log(k)} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty,$$

womit gezeigt ist, dass die Funktion $\mu(x)$ langsam variierend ist. Somit gehört F_Y in den Anziehungsbereich der Normalverteilung. Die Existenz des zweiten Momentes (oder der Varianz) ist also *keine* notwendige Bedingung für die asymptotische Normalität von S_n . Hingegen folgt aus Proposition 2, dass $F \notin DNA(\Phi)$, da $\mathbb{E}[Y^2] = \infty$. Somit sind die normalisierenden Konstanten a_n *nicht* von der Form $a_n = c\sqrt{n}$ für eine Konstante c . Dies im Unterschied zum klassischen Zentralen Grenzwertsatz, wo im Falle $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$ gilt $a_n = \sigma\sqrt{n}$ mit $\sigma^2 = \text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2$, siehe Kapitel 4.1.5.

Proposition 6 *Seien $Y_i, i \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch Pareto-verteilt mit $\bar{F}(x) = (k/x)^\alpha$, $x \geq k$, wobei $\alpha = 2$. Dann konvergiert $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$ in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, wobei die normierenden und zentrierenden Konstanten a_n und b_n gegeben sind durch*

$$a_n = \inf \left\{ x \mid \frac{n\mu(x)}{x^2} \leq 1 \right\}, \quad b_n = n\mu = n \mathbb{E}[Y] = 2nk. \quad (31)$$

wobei

$$\mu(x) = \int_k^x y^2 f(y) dy = 2k^2 \int_k^x y^{-1} dy = 2k^2(\log(x) - \log(k)).$$

Den Beweis von Proposition 6 führen wir allgemein. Dazu nehmen wir an, dass die Zufallsvariable Y Verteilungsfunktion F hat und dass $\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF(y) \in \text{RV}_0$, also langsam variierend ist.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass für jedes $x > 0$ aus der regulären Variation der Funktion $\mu(x)$ folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\mu(a_n x)}{a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(a_n x)}{\mu(a_n)} \frac{n\mu(a_n)}{a_n^2} = 1, \quad (32)$$

da beide Faktoren in (32) gegen 1 streben mit wachsendem n .

Sei $\zeta > 0$. Wir zeigen, dass $n(\varphi_Y(\zeta/a_n) - 1 - i\zeta\mu/a_n)$ mit wachsendem n gegen $\Psi(\zeta) = -\zeta^2/2$ strebt. Es gilt:

$$\begin{aligned} n(\varphi_Y(\zeta/a_n) - 1 - i\zeta\mu/a_n) &= n \int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta y/a_n} - 1 - i\zeta y/a_n) dF(y) \\ &= n \int_{\mathbb{R}} (e^{i\zeta u} - 1 - i\zeta u) dF(a_n u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\zeta u} - 1 - i\zeta u}{u^2} n u^2 dF(a_n u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{\zeta^2}{2} + O(u) \right) dF_n^\#(u), \end{aligned}$$

wobei $O(u)$ alle Terme in u und höherer Ordnung zusammenfasst. Das Mass $F_n^\#$ ist durch $dF_n^\#(du) = n u^2 dF(a_n u)$ definiert. Wir zeigen nun, dass die Grenzverteilung von $F_n^\#$ mit wachsendem n im Nullpunkt konzentriert ist. Dazu halten wir zuerst fest, dass für jedes $x > 0$ gilt:

$$\int_{-x}^x dF_n^\#(u) = \int_{-x}^x n u^2 dF(a_n u) = \frac{n}{a_n^2} \int_{-a_n x}^{a_n x} y^2 dF(y) = \frac{n\mu(a_n x)}{a_n^2} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

wobei wir in der letzten Gleichung (32) benutzt haben. Da die Aussage für jedes beliebige $x > 0$ gilt, folgt, dass die Grenzverteilung von $F_n^\#$ im Ursprung konzentriert ist. Wir schliessen daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{\zeta^2}{2} + O(u) \right) dF_n^\#(u) = -\frac{\zeta^2}{2}.$$

Damit ist gezeigt, dass $n(\varphi_Y(\zeta/a_n) - 1 - i\zeta\mu/a_n) \rightarrow \Psi(\zeta) = -\zeta^2/2$ mit wachsendem n , was gleichbedeutend damit ist, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{*n}(\zeta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\varphi_Y(\zeta/a_n) e^{-i\zeta\mu/a_n} \right)^n = e^{-\zeta^2/2}.$$

Damit haben also wir gezeigt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{*n}(\zeta) = \exp\{-\zeta^2/2\}$. Daraus folgt, dass $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$ in Verteilung gegen eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ konvergiert. \square

Tabelle 6 zeigt die normierenden Konstanten a_n gemäss (31) für unabhängige und identisch Pareto-verteilte Summanden Y_i mit Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - x^{-2}$, $x \geq 1$.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	2.13	2.93	3.57	4.12	4.63	5.11	5.56	5.98	6.39	6.78	7.15	7.51	7.87
n	16	17	18	19	20	25	50	100	250	500	750	1000	1500
a_n	8.21	8.54	8.86	9.18	9.49	10.94	16.80	25.44	43.42	64.56	81.21	95.49	119.83

Tabelle 6: Normierende Konstanten a_n gemäss (31) im Falle der Pareto-Verteilung gegeben durch die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - x^{-2}$, $x \geq 1$.

Tabelle 7 zeigt, dass die Normalverteilung zentrierte und normierte Summen Pareto-verteilter Zufallsvariablen mit Pareto-Parameter $\alpha = 2$ in der Regel sehr schlecht approximiert. Mit

n	$\text{VaR}_p(X_{*n})$					$\text{ES}_p(X_{*n})$				
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	1.162	2.472	4.325	8.000	12.142	4.325	6.944	10.649	18.000	26.284
12	1.131	1.939	2.977	4.904	7.017	2.906	4.338	6.299	10.152	14.521
52	1.140	1.830	2.686	4.260	5.993	2.614	3.791	5.391	8.522	12.061
100	1.147	1.801	2.602	4.066	5.669	2.517	3.605	5.071	7.915	11.098
250	1.155	1.769	2.506	3.838	5.315	2.428	3.437	4.792	7.437	10.423
500	1.163	1.751	2.451	3.718	5.118	2.374	3.332	4.615	7.116	9.938
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892

Tabelle 7: Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für zentrierte und normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 2$, $k = 1$) für verschiedene n .

n	$d_1(X_{*n}, X)$	$d_2(X_{*n}, X)$
1	0.085	0.698
12	0.030	0.390
52	0.019	0.310
100	0.016	0.288
250	0.012	0.250
500	0.010	0.232
∞	0.000	0.000

Tabelle 8: Abstände d_1 und d_2 zwischen zentrierten und normierten Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 2$, $k = 1$) und ihrer Grenzverteilung.

einer Value-at-Risk basierten Kapitalanforderung würde das Risikokapital hergeleitet aus 12 Monatsrenditen durch Approximation mit der Normalverteilung um mehr als 110% unterschätzt ($\text{VaR}_{0.99}(X_{*12}) = 4.904$, $\text{VaR}_{0.99}(X) = 2.326$). Bei Verwendung des Expected Shortfalls beträgt der Faktor zwischen den Risikomassen beinahe 4 ($\text{ES}_{0.99}(X_{*12}) = 10.152$, $\text{ES}_{0.99}(X) = 2.665$).

4.1.5 Tail-Index $\alpha > 2$

Dieser Fall entspricht dem klassischen zentralen Grenzwertsatz. Die Bedingung $\alpha > 2$ garantiert die Existenz des zweiten Momentes von F_Y , womit wir uns im Regime des wohlbekannten Zentralen Grenzwertsatzes befinden. Den Beweis führen wir deshalb allgemein.

Proposition 7 *Seien Y_i , $i \in \mathbb{N}$, unabhängig und identisch Pareto-verteilt mit $\bar{F}(x) = (k/x)^\alpha$, $x \geq k$, wobei $\alpha > 2$. Dann konvergiert $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$ in Verteilung gegen eine standard normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, wobei die normierenden und zentrierenden*

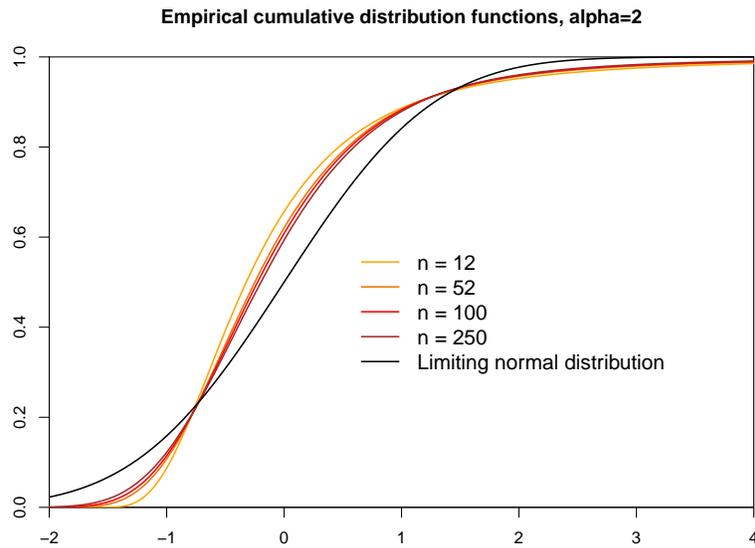


Abbildung 8: Kumulative Verteilungsfunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} von unabhängigen und identisch Pareto verteilten Zufallsvariablen mit Pareto-Parameter $\alpha = 2$ für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie der zugehörigen Grenzverteilung $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

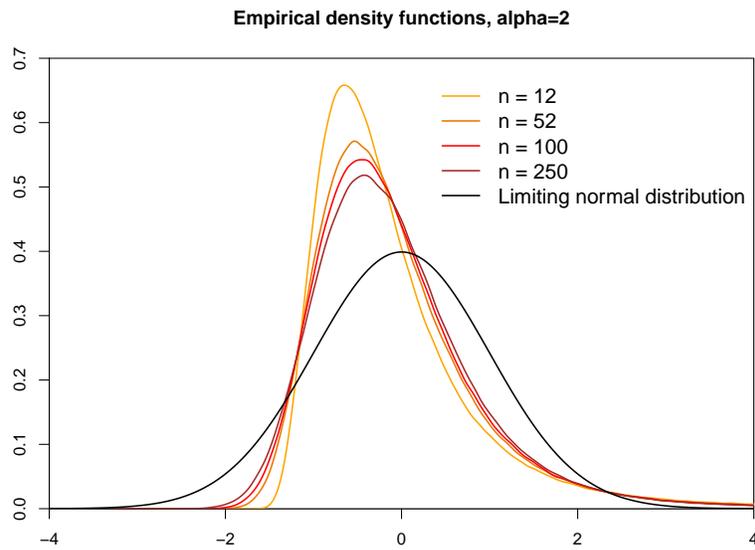


Abbildung 9: Dichtefunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} von unabhängigen und identisch Pareto verteilten Zufallsvariablen mit Pareto-Parameter $\alpha = 2$ für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie der zugehörigen Grenzverteilung $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Konstanten a_n und b_n gegeben sind durch

$$a_n = \sigma\sqrt{n}, \quad b_n = n\mu = n\mathbb{E}[Y] = n\alpha k^\alpha \int_k^\infty y^{-\alpha} dy = \frac{n\alpha k}{\alpha - 1}.$$

Eine standard normalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ist stabil mit Parametern $\alpha = 2$, $\beta = 0$ und $\sigma = 1/\sqrt{2}$.

Wie wir in Kapitel 4.1.4 gesehen haben, ist die Existenz des zweiten Momentes (der Varianz) keine notwendige Bedingung für die asymptotische Normalität von S_n . Vielmehr ist eine Verteilungsfunktion F im Anziehungsbereich der Normalverteilung ($F \in \text{DA}(\Phi)$), genau dann wenn die Funktion $\mu(x) = \int_{-x}^x y^2 dF(y)$ langsam variierend ist. Offensichtlich ist $\mu(x)$ langsam variierend, wenn immer F endliche Varianz hat.

Den Beweis des zentralen Grenzwertsatzes mit unabhängigen und identisch verteilten Summanden X_i mit $\mathbb{E}[X_i] = 0$ und $\text{Var}(X_i) = 1$ finden wir zum Beispiel in Feller [4], Kapitel XV.5, Seite 515.

Beweis. Wir setzen $\tilde{Y}_i = (Y_i - \mu)/\sigma$. Dann gilt $\mathbb{E}[\tilde{Y}_i] = 0$ und $\text{Var}(\tilde{Y}_i) = 1$. Wir beachten, dass sich $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - n\mu)/(\sigma\sqrt{n})$ schreiben lässt als $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n \tilde{Y}_i)/\sqrt{n}$. Für die charakteristische Funktion $\varphi_{*n}(\zeta)$ von X_{*n} folgt dann

$$\varphi_{*n}(\zeta) = (\varphi_{\tilde{Y}}(\zeta/\sqrt{n}))^n.$$

Wir zeigen, dass $\varphi_{*n}(\zeta)$ mit wachsendem n gegen $\omega(\zeta) = \exp\{\Psi(\zeta)\}$ strebt, wobei $\Psi(\zeta) = -\zeta^2/2$.

Dazu machen wir Gebrauch von (13) und zeigen, dass

$$n(\varphi_{\tilde{Y}}(\zeta/\sqrt{n}) - 1) \rightarrow -\zeta^2/2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Wir beachten, dass $\varphi'_{\tilde{Y}}(0) = 0$ und $\varphi''_{\tilde{Y}}(0) = -1$. Für die Taylor-Entwicklung von $\varphi_{\tilde{Y}}$ um 0 bedeutet dies, dass:

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{Y}}(t) &= \varphi_{\tilde{Y}}(0) + \varphi'_{\tilde{Y}}(0)t + \frac{\varphi''_{\tilde{Y}}(0)}{2!}t^2 + O(t^3) \\ &= 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^3), \end{aligned}$$

wobei $O(t^3)$ alle Terme dritter und höherer Ordnung in t zusammenfasst. Allgemein symbolisiert die Schreibweise $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow 0$, den Umstand, dass $|f(x)| \leq M|g(x)|$ für eine Konstante M und alle x mit $|x| < \delta$. Somit finden wir

$$\begin{aligned} n(\varphi_{\tilde{Y}}(\zeta/\sqrt{n}) - 1) &= n\left(1 - \frac{\zeta^2}{2n} + O\left(\frac{\zeta^3}{n^{3/2}}\right) - 1\right) \\ &\rightarrow -\frac{\zeta^2}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

n	$\text{VaR}_p(X_{*n})$					$\text{ES}_p(X_{*n})$				
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	1.156	1.888	2.685	3.852	4.828	2.311	3.147	4.059	5.392	6.507
12	1.312	1.825	2.316	2.949	3.425	2.035	2.528	3.012	3.654	4.147
52	1.311	1.752	2.154	2.647	3.002	1.908	2.306	2.679	3.148	3.491
100	1.306	1.726	2.102	2.560	2.882	1.868	2.240	2.584	3.011	3.317
250	1.298	1.697	2.051	2.471	2.766	1.826	2.173	2.490	2.875	3.148
500	1.295	1.683	2.026	2.432	2.712	1.807	2.143	2.448	2.817	3.077
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892

Tabelle 9: Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für zentrierte und normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 8, k = 1$) für verschiedene n .

n	$\text{VaR}_p(X_{*n})$					$\text{ES}_p(X_{*n})$				
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	0.944	1.658	2.506	3.880	5.149	2.201	3.153	4.285	6.116	7.808
12	1.234	1.800	2.386	3.223	3.936	2.109	2.735	3.414	4.435	5.338
52	1.282	1.769	2.244	2.876	3.380	1.992	2.485	2.990	3.708	4.321
100	1.290	1.750	2.185	2.754	3.191	1.944	2.391	2.839	3.457	3.968
250	1.293	1.722	2.118	2.616	2.988	1.887	2.287	2.674	3.188	3.595
500	1.295	1.707	2.082	2.544	2.878	1.856	2.230	2.585	3.043	3.394
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892

Tabelle 10: Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für zentrierte und normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 4, k = 1$) für verschiedene n .

n	$\text{VaR}_p(X_{*n})$					$\text{ES}_p(X_{*n})$				
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	0.567	1.105	1.816	3.115	4.467	1.690	2.588	3.772	5.936	8.190
12	0.915	1.452	2.082	3.139	4.190	1.915	2.683	3.644	5.350	7.115
52	1.037	1.541	2.104	3.016	3.907	1.934	2.611	3.439	4.891	6.391
100	1.076	1.564	2.096	2.943	3.761	1.925	2.559	3.324	4.655	6.021
250	1.118	1.585	2.079	2.837	3.562	1.909	2.493	3.186	4.382	5.620
500	1.146	1.600	2.069	2.774	3.444	1.897	2.447	3.089	4.188	5.318
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892

Tabelle 11: Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für zentrierte und normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha = 2.5, k = 1$) für verschiedene n .

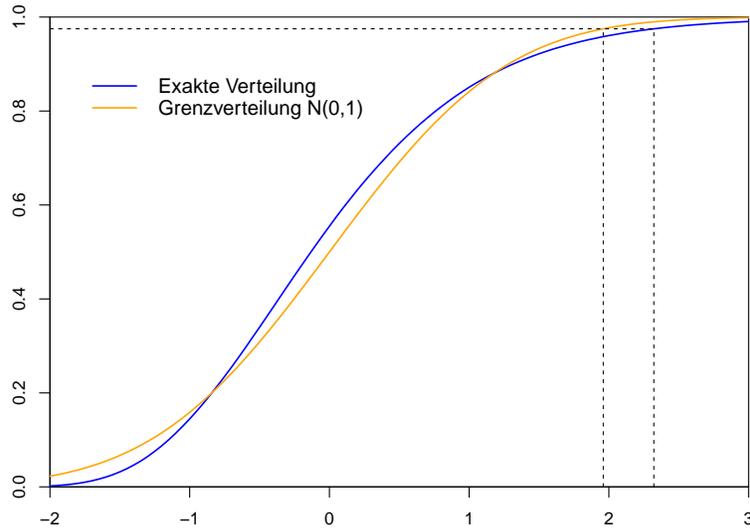


Abbildung 10: Verteilungsfunktion von $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i - b_n)/a_n$ für $n = 12$ und iid Pareto-verteilte Summanden mit Pareto-Parameter $\alpha = 8$ (blaue Linie) sowie zugehörige Grenzverteilung $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (orange Linie). Die gestrichelten Linien zeigen die 97.5%-Quantile von X_{*n} und X ; sie betragen 2.316 resp. 1.960.

Tabellen 9 bis 11 zeigen die Konvergenzgeschwindigkeiten bezüglich der Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für verschiedene Werte von α . Es lässt sich beobachten, dass selbst bei einem relativ stark abfallenden Tail ($\alpha = 8$) die Risikomasse zentrierter und normierter Summen X_{*n} nur langsam gegen die entsprechenden Grössen der Normalverteilung konvergieren, siehe Tabelle 9. Für $n = 12$ zum Beispiel (monatliche Renditen) liegt der Expected Shortfall beim Niveau 99% um 38% über dem Expected Shortfall der Normalverteilung (3.654 im Vergleich zu 2.665). Selbst bei wöchentlichen Renditen ($n = 52$) dominiert das Tail-Verhalten der einzelnen Summanden noch immer stark. In diesem Fall liegt der Expected Shortfall 20% über dem Expected Shortfall der Standard-Normalverteilung beim Niveau 99% (3.148 im Vergleich zu 2.665). Bei 500 Summanden schliesslich liegt der Expected Shortfall von X_{*n} noch um 6% über dem Expected Shortfall der Grenzverteilung. Es lässt sich festhalten, dass selbst im Falle $\alpha = 8$ die Risikomasse der Normalverteilung nur eine unzureichende Approximation darstellen für die Riskomasse normierter und zentrierter Summen von unabhängigen und identisch Pareto-verteilten Zufallsvariablen. Das Risiko und damit die Kapitalanforderungen würden somit *unterschätzt*, falls alleine auf das Risikomass der Grenzverteilung abgestellt würde anstatt auf das Risikomass der wahren Verteilung.

Bei abnehmendem Tail-Index präsentiert sich die Situation noch ungünstiger; die Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall werden zunehmend schlechter durch die entsprechenden Risikomasse der Normalverteilung approximiert. Dies hängt damit zusammen, dass die Tails der einzelnen Summanden schwerer und somit weiter vom Tail der Normalverteilung entfernt sind. Der Expected Shortfall der zentrierten und normierten Summe monatlicher Renditen ($n = 12$) liegt im Falle $\alpha = 4$ beim Niveau 99% um 66% über dem Expected Shortfall der

Normalverteilung (4.435 versus 2.665), siehe Tabelle 10, im Falle $\alpha = 2.5$ beträgt er sogar mehr als das Doppelte (5.350 versus 2.665), siehe Tabelle 11.

Tabelle 12 zeigt die Abstände der beiden Variablen X_{*n} und X , ausgedrückt durch die beiden Metiken $d_1(X_{*n}, X)$ und $d_2(X_{*n}, X)$, siehe (23) und (24). Es zeigt sich, dass die Abstände mit wachsender Anzahl Summanden n kleiner werden. Dies ist intuitiv klar, da X_{*n} in Verteilung gegen X konvergiert mit $n \rightarrow \infty$. Es zeigt sich aber auch, dass für kleinere Pareto-Parameter und damit schwerschwänzige Verteilungen deutlich mehr Summanden erforderlich sind, bis die zentrierte und normierte Summe X_{*n} hinreichend nahe bei ihrer Grenzverteilung liegt.

n	$d_1(X_{*n}, X)$			$d_2(X_{*n}, X)$		
	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$	$\alpha = 2.5$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$
1	0.068	0.108	0.168	0.517	0.564	0.696
12	0.031	0.009	0.004	0.339	0.197	0.133
52	0.015	0.003	0.001	0.248	0.113	0.067
100	0.011	0.002	0.001	0.216	0.088	0.050
250	0.007	0.001	0.000	0.175	0.060	0.032
500	0.004	0.000	0.000	0.149	0.043	0.021
∞	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabelle 12: Abstand zwischen X_{*n} und ihrem Grenzwert X , ausgedrückt durch die Abstandsfunktionen d_1 und d_2 für verschiedene Pareto-Parameter $\alpha \in \{2.5, 4, 8\}$.

4.2 Grenzverteilungen von Summen t_ν -verteilter Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Konvergenzverhalten unabhängiger und identisch t_ν -verteilter Zufallsvariablen für verschiedene Werte von ν . Wir wiederholen, dass die Varianz einer t_ν -verteilten Zufallsvariablen $Y \sim F$ mit Anzahl Freiheitsgraden $\nu > 2$ gegeben ist durch $\nu/(\nu - 2)$, siehe Abschnitt 3.2. Es gilt somit $F \in \text{DA}(\Phi)$ mit normalisierenden und zentrierenden Konstanten $a_n = \sigma\sqrt{n}$ und $b_n = 0$, wobei $\sigma^2 = \mathbb{E}[Y^2]$ die Varianz von Y bezeichnet. Beachte, dass sich die t_ν -Verteilung mit wachsender Anzahl Freiheitsgrade der Normalverteilung nähert.

Die t -Verteilung wird häufig verwendet zur Modellierung Finanzzeitreihen-Renditen. Der Grund dafür ist, dass sie - im Unterschied etwa zur Normalverteilung - eine Leptokurtosis³ aufweist. Das heisst, dass ihre Dichtefunktion im Vergleich zur Normalverteilung spitzer ist und einen dünneren "Bauch" hat, dafür aber schwerere 'Tails'.

³Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem vierten Moment. Die Kurtosis κ von X ist definiert als

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^4]}{\sigma^4}$$

Eine Verteilung heisst leptokurtisch, falls $\kappa > 3$.

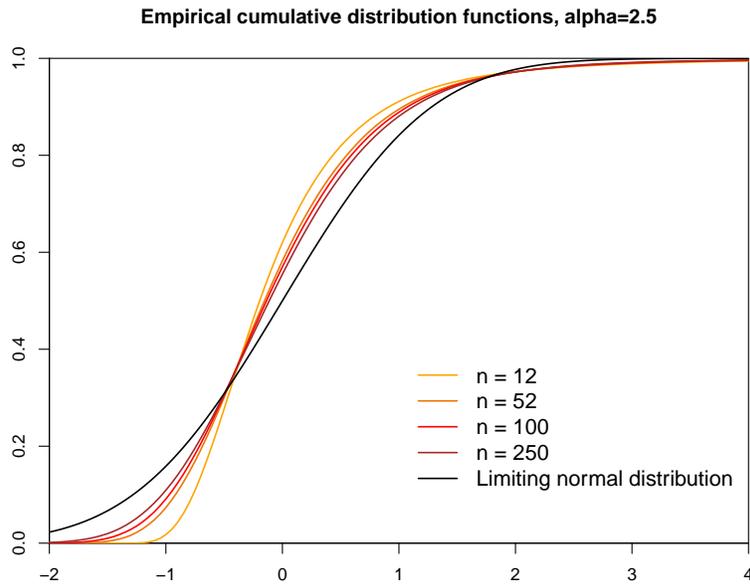


Abbildung 11: Kumulative Verteilungsfunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} von unabhängigen und identisch Pareto verteilten Zufallsvariablen mit Pareto-Parameter $\alpha = 2.5$ für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie der zugehörigen Grenzverteilung $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

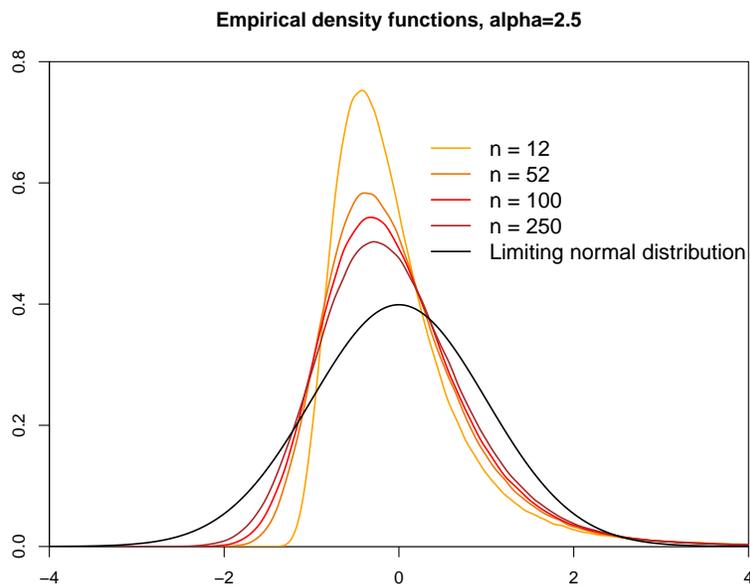


Abbildung 12: Dichtefunktionen zentrierter und normierter Summen X_{*n} von unabhängigen und identisch Pareto verteilten Zufallsvariablen mit Pareto-Parameter $\alpha = 2.5$ für $n \in \{12, 52, 100, 250\}$ sowie der zugehörigen Grenzverteilung $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

4.2.1 $\nu = 4$ Freiheitsgrade

Tabelle 13 zeigt die Konvergenzgeschwindigkeit bezüglich der Risikomasse VaR und Expected Shortfall im Falle unabhängiger und t_ν -verteilter Summanden mit $\nu = 4$.

Es lässt sich allgemein festhalten, dass die Konvergenzgeschwindigkeit bezüglich der Risikomasse schneller ist als im Falle Pareto-verteilter Summanden mit Pareto-Parameter $\alpha > 2$, siehe Tabellen 9 bis 11. Beispielsweise liegt im Falle monatlicher Renditen ($n = 12$) der Expected Shortfall beim Niveau 99% lediglich um 11% über dem Expected Shortfall der Normalverteilung (2.957 versus 2.665). Zum Vergleich sei vermerkt, dass im Falle der Pareto-Verteilung mit $\alpha = 8$ die entsprechenden Werte um 38% differierten.

n	VaR $_p(X_{*n})$					ES $_p(X_{*n})$				
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	1.084	1.507	1.963	2.649	3.256	1.767	2.265	2.824	3.692	4.472
12	1.237	1.617	1.969	2.418	2.758	1.767	2.126	2.479	2.957	3.346
52	1.265	1.634	1.964	2.358	2.638	1.759	2.085	2.387	2.766	3.050
100	1.272	1.639	1.963	2.347	2.616	1.758	2.077	2.370	2.731	3.993
250	1.277	1.643	1.963	2.338	2.597	1.757	2.071	2.354	2.697	2.941
500	1.279	1.644	1.961	2.333	2.587	1.756	2.067	2.346	2.682	2.916
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892

Tabelle 13: Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für normierte Summen $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i)/\sqrt{2n}$ mit unabhängigen und identisch t_ν -verteilten Summanden ($\nu = 4$) für verschiedene n ; $N = 10^7$ Simulationen.

4.2.2 $\nu = 8$ Freiheitsgrade

Die in Kapitel 4.2.1 gemachten Feststellungen gelten in verstärktem Masse auch hier. Die Konvergenzgeschwindigkeit bezüglich der Risikomasse ist noch einmal schneller als im Falle Pareto-verteilter Summanden. Im Falle monatlicher Renditen ($n = 12$) liegt der Expected Shortfall beim Niveau 99% nur noch um lediglich 2% über dem Expected Shortfall der Normalverteilung (2.722 versus 2.665).

Tabelle 15 zeigt die Abstände zwischen den Verteilungsfunktionen von X_{*n} und X gemessen mit den Abstandsfunktionen d_1 und d_2 für Freiheitsgrade $\nu \in \{4, 8\}$. Es ist augenfällig, dass selbst für kleine Anzahl Summanden die Verteilungsfunktionen schon sehr nahe beieinander liegen.

5 Schlussfolgerungen

In dieser Arbeit haben wir das Konvergenzverhalten von zentrierten und normierten Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto- oder t_ν -verteilten Summanden untersucht. Im Falle Pareto-verteilter Summanden mit $\alpha < 2$ haben wir zuerst die Parameter der stabilen Grenzverteilung $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ hergeleitet. Für $\alpha > 2$ bzw. $\nu > 2$ existiert das zweite Moment der

n	$\text{VaR}_p(X_{*n})$					$\text{ES}_p(X_{*n})$				
	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%
1	1.210	1.610	1.997	2.508	2.906	1.783	2.177	2.572	3.110	3.536
12	1.274	1.642	1.967	2.352	2.621	1.760	2.079	2.369	2.722	2.972
52	1.280	1.644	1.962	2.332	2.585	1.756	2.066	2.345	2.677	2.908
100	1.280	1.645	1.962	2.329	2.579	1.755	2.065	2.341	2.670	2.898
250	1.281	1.645	1.961	2.327	2.578	1.755	2.064	2.340	2.658	2.897
500	1.282	1.644	1.961	2.328	2.578	1.755	2.064	2.340	2.668	2.895
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892

Tabelle 14: Risikomasse Value-at-Risk und Expected Shortfall für normierte Summen $X_{*n} = (\sum_{i=1}^n Y_i)/\sqrt{4n/3}$ mit unabhängigen und identisch t_ν -verteilten Summanden ($\nu = 8$) für verschiedene n ; $N = 10^7$ Simulationen.

n	$d_1(X_{*n}, X)$		$d_2(X_{*n}, X)$	
	$\nu = 4$	$\nu = 8$	$\nu = 4$	$\nu = 8$
1	0.005	0.001	0.202	0.086
12	0.000	0.000	0.033	0.007
52	0.000	0.000	0.012	0.001
100	0.000	0.000	0.009	0.002
250	0.000	0.000	0.004	0.002
500	0.000	0.000	0.003	0.001
∞	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabelle 15: Abstand zwischen X_{*n} und ihrem Grenzwert X , ausgedrückt durch die Abstandsfunktionen d_1 und d_2 für verschiedene Anzahl Freiheitsgrade $\nu \in \{4, 8\}$.

Summanden, und somit befinden wir uns im Regime des wohlbekannten Zentralen Grenzwertsatzes, wonach die zentrierten und normierten Summen gegen die standard Normalverteilung konvergieren. Der Fall $\alpha = 2$ ist insofern speziell, als das zweite Moment der entsprechenden Pareto-Verteilung nicht existiert, die Grenzverteilung aber dennoch normal ist.

Die Verteilung von X_{*n} haben wir durch Monte Carlo Simulation bestimmt ($N = 10^7$ Realisierungen) und danach mit der (stabilen) Grenzverteilung X verglichen. Es zeigt sich, dass die Approximation in der Regel dann gut funktioniert, wenn die Tails der Summanden und der Grenzverteilung von vergleichbarer Schwere sind. Wie oben angetönt, verdient der Pareto-Exponent $\alpha = 2$ besondere Beachtung: Pareto-verteilte Zufallsvariablen mit $\alpha = 2$ haben unendliche Varianz, sind also sehr heavy-tailed. Trotzdem konvergieren ihre zentrierten und normierten Summen gegen die Normalverteilung. So erstaunt es nicht, dass in diesem Fall die Grenzverteilung nur eine *schlechte* Approximation darstellt für Summen mit einer kleinen bis mittleren Anzahl Summanden. Die Konvergenzgeschwindigkeit für Werte $\alpha + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, verbessert sich in dem Masse, als ε wächst. Die Grenzverteilung ist und bleibt normal, die Schwere der Tails nimmt jedoch ab und nähert sich der der Normalverteilung an. Doch selbst im Falle $\alpha = 2.5$ oder $\alpha = 4$ ist noch immer Vorsicht geboten. Wird das Risikomass Value-at-Risk

oder Expected Shortfall durch die entsprechenden Grössen der (normalen) Grenzverteilung approximiert, so kann das Risiko zum Teil stark *unterschätzt* werden.

Die Annahme unabhängiger und identisch verteilter Summanden sind stark vereinfachend. Renditen von Finanzzeitreihen zeigen in der Regel Heteroskedastizität, also stochastische Varianz und somit Abhängigkeit. Weiterführende Untersuchungen müssen zeigen, wie sich diese realistischeren Annahmen auf das Konvergenzverhalten von zentrierten und normierten Summen auswirken.

A Simulationsergebnisse für Pareto-verteilte Summanden

In diesem Kapitel fassen wir die Simulationsergebnisse in kompakter Form zusammen. Für verschiedene Pareto-Parameter $\alpha \in \{0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 4, 8\}$ und verschiedene Anzahl Summanden n sind die Risikomasse Value-at-Risk $\text{VaR}_\alpha(X_{*n})$ und –falls existent– Expected Shortfall $\text{ES}_\alpha(X_{*n})$ ausgewiesen zusammen mit den Risikomassen der entsprechenden (stabilen) Grenzverteilungen (Zeile mit $n = \infty$). Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X_{*n} haben wir dabei durch Monte Carlo Simulation ermittelt, indem wir $N = 10^7$ Realisierungen x_{*n} von X_{*n} erzeugt haben. Zudem weisen wir die Abstände der Verteilungsfunktionen von X_{*n} und X aus, gemessen mit den Funktionen d_1 und d_2 , siehe (23) und (24). Wegen numerischer Ungenauigkeiten sind die Abstände d_2 nur für Pareto-Parameter $\alpha > 1$ angegeben.

$\alpha = 3/4$						VaR			ES			d_1 d_2		
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d_1	d_2	
1	21.511	54.309	136.675	464.100	1166.627	10.609	18.478	30.842	58.566	93.506	1	0.462		
12	25.028	59.018	143.468	474.697	1177.859	13.382	22.581	37.275	71.614	117.440	12	0.135		
52	25.751	59.869	143.700	469.747	1169.353	13.553	22.469	36.577	69.114	111.856	52	0.057		
100	25.960	60.224	144.624	475.790	1185.742	12.969	21.170	33.851	62.151	97.887	100	0.038		
250	26.066	60.245	144.057	472.399	1175.002	13.284	21.668	34.719	64.181	101.906	250	0.021		
500	26.265	60.440	144.682	472.396	1172.435	13.373	21.767	34.849	64.325	102.050	500	0.013		
∞	26.638	60.850	145.158	475.582	1184.031	13.606	21.966	35.031	64.615	102.589				

$\alpha = 1$						VaR			ES			d_1 d_2		
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d_1	d_2	
1	9.496	19.496	39.496	99.496	199.496	4.325	6.944	10.649	18.000	26.284	1	0.146		
12	11.191	21.894	42.630	102.861	203.068	2.906	4.338	6.299	10.152	14.521	12	0.012		
52	11.517	22.321	43.084	104.198	205.732	2.614	3.791	5.391	8.522	12.061	52	0.004		
100	11.491	22.301	43.050	104.197	204.631	2.517	3.605	5.071	7.915	11.098	100	0.003		
250	11.609	22.425	43.199	104.277	204.211	2.428	3.437	4.792	7.437	10.423	250	0.000		
500	11.624	22.432	43.269	104.591	205.530	2.374	3.332	4.615	7.116	9.938	500	0.000		
∞	11.649	22.450	43.203	104.156	204.862	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892				

$\alpha = 1.5$						VaR			ES			d_1 d_2		
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d_1	d_2	
1	1.638	4.362	8.683	18.480	31.208	1.690	2.588	3.772	5.936	8.190	1	0.231	1.521	
12	2.910	5.998	10.602	20.603	33.331	1.915	2.683	3.644	5.350	7.115	12	0.057	0.790	
52	3.334	6.475	11.083	21.156	34.000	1.934	2.611	3.439	4.891	6.391	52	0.022	0.515	
100	3.464	6.610	11.201	21.250	33.956	1.925	2.559	3.324	4.655	6.021	100	0.015	0.675	
250	3.594	6.744	11.319	21.292	34.005	1.909	2.493	3.186	4.382	5.620	250	0.008	0.344	
500	3.674	6.815	11.399	21.438	34.147	1.897	2.447	3.089	4.188	5.318	500	0.005	0.408	
∞	3.959	7.057	11.565	21.505	34.184	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892				

$\alpha = 2$						VaR			ES			d_1 d_2		
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d_1	d_2	
1	1.162	2.472	4.325	8.000	12.142	1.690	2.588	3.772	5.936	8.190	1	0.085	0.698	
12	1.131	1.939	2.977	4.904	7.017	1.915	2.683	3.644	5.350	7.115	12	0.030	0.390	
52	1.140	1.830	2.686	4.260	5.993	1.934	2.611	3.439	4.891	6.391	52	0.019	0.310	
100	1.147	1.801	2.602	4.066	5.669	1.925	2.559	3.324	4.655	6.021	100	0.016	0.288	
250	1.155	1.769	2.506	3.838	5.315	1.909	2.493	3.186	4.382	5.620	250	0.012	0.250	
500	1.163	1.751	2.451	3.718	5.118	1.897	2.447	3.089	4.188	5.318	500	0.010	0.232	
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892				

$\alpha = 2.5$						VaR			ES			d_1 d_2		
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d_1	d_2	
1	0.567	1.105	1.816	3.115	4.467	1.690	2.588	3.772	5.936	8.190	1	0.068	0.517	
12	0.915	1.452	2.082	3.139	4.190	1.915	2.683	3.644	5.350	7.115	12	0.031	0.339	
52	1.037	1.541	2.104	3.016	3.907	1.934	2.611	3.439	4.891	6.391	52	0.015	0.248	
100	1.076	1.564	2.096	2.943	3.761	1.925	2.559	3.324	4.655	6.021	100	0.011	0.216	
250	1.118	1.585	2.079	2.837	3.562	1.909	2.493	3.186	4.382	5.620	250	0.007	0.175	
500	1.146	1.600	2.069	2.774	3.444	1.897	2.447	3.089	4.188	5.318	500	0.005	0.149	
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892				

$\alpha = 4$						VaR			ES			d_1 d_2		
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d_1	d_2	
1	0.944	1.658	2.506	3.880	5.149	2.201	3.153	4.285	6.116	7.808	1	0.108	0.564	
12	1.234	1.800	2.386	3.223	3.936	2.109	2.735	3.414	4.435	5.338	12	0.009	0.197	
52	1.282	1.769	2.244	2.876	3.380	1.992	2.485	2.990	3.708	4.321	52	0.003	0.113	
100	1.290	1.750	2.185	2.754	3.191	1.944	2.391	2.839	3.457	3.968	100	0.002	0.088	
250	1.293	1.722	2.118	2.616	2.988	1.887	2.287	2.674	3.188	3.595	250	0.001	0.060	
500	1.295	1.707	2.082	2.544	2.878	1.856	2.230	2.585	3.043	3.394	500	0.000	0.043	
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892				

$\alpha = 8$						VaR			ES			d_1 d_2		
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d_1	d_2	
1	1.156	1.888	2.685	3.852	4.828	2.311	3.147	4.059	5.392	6.507	1	0.168	0.696	
12	1.312	1.825	2.316	2.949	3.425	2.035	2.528	3.012	3.654	4.147	12	0.004	0.133	
52	1.311	1.752	2.154	2.647	3.002	1.908	2.306	2.679	3.148	3.491	52	0.001	0.067	
100	1.306	1.726	2.102	2.560	2.882	1.868	2.240	2.584	3.011	3.317	100	0.001	0.050	
250	1.298	1.697	2.051	2.471	2.766	1.826	2.173	2.490	2.875	3.148	250	0.000	0.032	
500	1.295	1.683	2.026	2.432	2.712	1.807	2.143	2.448	2.817	3.077	500	0.000	0.021	
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892				

Abbildung 13: Risikomasse Value-at-Risk und – falls existent – Expected Shortfall für zentrierte und normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch Pareto verteilten Summanden ($\alpha \in \{0.75, 1, 1.5, 2, 2.5, 4, 8\}$, $k = 1$) für verschiedene n sowie Abstandsfunktionen $d_1(X_{*n}, X)$ und $d_2(X_{*n}, X)$. $N = 10^7$ Simulationen x_{*n} von X_{*n} für $n \in \{12, 52, 100, 250, 500\}$, exakte Berechnung für $n \in \{1, \infty\}$.

B Simulationsergebnisse für t_ν -verteilte Summanden

In diesem Abschnitt sind die Simulationsergebnisse im Falle der t -Verteilung in kompakter Weise zusammengefasst. Für verschiedene Anzahl Freiheitsgrade $\nu \in \{4, 8\}$ und verschiedene Anzahl Summanden n sind die Risikomasse Value-at-Risk $\text{VaR}_\alpha(X_{*n})$ und Expected Shortfall $\text{ES}_\alpha(X_{*n})$ ausgewiesen zusammen mit den Risikomassen der normalen Grenzverteilung (Zeile mit $n = \infty$). Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X_{*n} haben wir dabei durch Monte Carlo Simulation ermittelt, indem wir $N = 10^7$ Realisierungen x_{*n} von X_{*n} erzeugt haben. Ferner sind die Abstände der Verteilungsfunktionen von X_{*n} und X angegeben, gemessen mit den Funktionen d_1 und d_2 , siehe (23) und (24).

v=4						ES							
VaR													
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d1	d2
1	1.084	1.507	1.963	2.649	3.256	1.767	2.265	2.824	3.692	4.472	1	0.005	0.202
12	1.237	1.617	1.969	2.418	2.758	1.767	2.126	2.479	2.957	3.346	12	0.000	0.033
52	1.265	1.634	1.964	2.358	2.638	1.759	2.085	2.387	2.766	3.050	52	0.000	0.012
100	1.272	1.639	1.963	2.347	2.616	1.758	2.077	2.370	2.731	2.993	100	0.000	0.009
250	1.277	1.643	1.963	2.338	2.597	1.757	2.071	2.354	2.697	2.941	250	0.000	0.004
500	1.279	1.644	1.961	2.333	2.587	1.756	2.067	2.346	2.682	2.916	500	0.000	0.003
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892			

v=8						ES							
VaR													
n	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	n	d1	d2
1	1.210	1.610	1.997	2.508	2.906	1.783	2.177	2.572	3.110	3.536	1	0.001	0.086
12	1.274	1.642	1.967	2.352	2.621	1.760	2.079	2.369	2.722	2.972	12	0.000	0.007
52	1.280	1.644	1.962	2.332	2.585	1.756	2.066	2.345	2.677	2.908	52	0.000	0.001
100	1.280	1.645	1.962	2.329	2.579	1.755	2.065	2.341	2.670	2.898	100	0.000	0.002
250	1.281	1.645	1.961	2.327	2.578	1.755	2.064	2.340	2.668	2.897	250	0.000	0.002
500	1.282	1.644	1.961	2.328	2.578	1.755	2.064	2.340	2.668	2.895	500	0.000	0.001
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	1.755	2.063	2.338	2.665	2.892			

Abbildung 14: Risikomasse Value-at-Risk und Exptected Shortfall für normierte Summen X_{*n} mit unabhängigen und identisch t_ν -verteilten Summanden ($\nu \in \{4, 8\}$) für verschiedene n sowie Abstandsfunctonen $d_1(X_{*n}, X)$ und $d_2(X_{*n}, X)$. $N = 10^7$ Simulationen x_{*n} von X_{*n} für $n \in \{12, 52, 100, 250, 500\}$, exakte Berechnung für $n \in \{1, \infty\}$.

C Value-at-Risk und Expected Shortfall für normal- und t_ν -verteilte Zufallsvariablen

Proposition 8 (Value-at-risk und Expected Shortfall für die Normalverteilung) *Sei $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt*

- (a) $\text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma q_\alpha(Z)$
 (b) $\text{ES}_\alpha(L) = \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha(Z))}{1 - \alpha}$.

Dabei bezeichnet $q_\alpha(Z)$ das α -Quantil der Zufallsvariablen $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Beweis. (a) Die Behauptung folgt aufgrund der Beobachtung, dass $q_\alpha(L)$ dem α -Quantil der Zufallsvariablen L entspricht genau dann wenn $(q_\alpha(L) - \mu)/\sigma$ das α -Quantil der standardisierten Zufallsvariablen $(L - \mu)/\sigma$ ist.

(b) Sei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Beachte, dass die Dichtefunktion $\varphi(y)$ von Z gegeben ist durch $\varphi(y) = 1/\sqrt{2\pi} \exp\{-y^2/2\}$ mit der Eigenschaft, dass $y\varphi(y) = -\varphi'(y)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z|Z > u] &= \frac{1}{\mathbb{P}[Z > u]} \int_u^\infty y\varphi(y) dy \\ &= \frac{1}{1 - \Phi(u)} \int_u^\infty (-\varphi'(y)) dy \\ &= \frac{1}{1 - \Phi(u)} (-\varphi(y)|_{y=u}^{y=\infty}) \\ &= \frac{\varphi(u)}{1 - \Phi(u)}. \end{aligned}$$

Sei nun $L \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L|L > q_\alpha(L)] &= \mu + \sigma \mathbb{E}\left[\frac{L - \mu}{\sigma} \mid \frac{L - \mu}{\sigma} > \frac{q_\alpha(L) - \mu}{\sigma}\right] \\ &= \mu + \sigma \mathbb{E}[Z|Z > q_\alpha(Z)] \\ &= \mu + \sigma \frac{\varphi(q_\alpha(Z))}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung benutzten wir $\Phi((q_\alpha(L) - \mu)/\sigma) = \Phi(q_\alpha(Z)) = \Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha$. \square

Unser Ziel ist es jetzt, ein analoges Resultat für die verallgemeinerte t -Verteilung herzuleiten.

Definition 7 *Eine Zufallsvariable Y genügt einer $t(\nu; \mu, \sigma)$ Verteilung falls $(Y - \mu)/\sigma$ eine t_ν -Verteilung mit ν Freiheitsgraden hat. Die Dichtefunktion einer t_ν -verteilten Zufallsvariablen bezeichnen wir mit $f_\nu(y)$; sie ist gegeben durch*

$$f_\nu(y) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Proposition 9 (Value-at-risk und Expected shortfall für die verallgemeinerte t -Verteilung) Sei $L \sim t(\nu; \mu, \sigma)$. Dann gilt

$$(a) \text{VaR}_\alpha(L) = \mu + \sigma q_\alpha(T)$$

$$(b) \text{ES}_\alpha(L) = \mu + \frac{\kappa\nu\sigma}{(\nu-1)(1-\alpha)} \left(1 + \frac{(q_\alpha(T))^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}.$$

Dabei bezeichnet $q_\alpha(T)$ das α -Quantil der Zufallsvariablen $T \sim t_\nu$ und κ ist gegeben durch

$$\kappa = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \quad (34)$$

Der nachfolgende Hilfssatz 1 wird zum Beweis von Proposition 9 benötigt.

Lemma 1 Sei $f_\nu(y)$ die Dichtefunktion einer t -verteilten Zufallsvariablen mit ν Freiheitsgraden, also

$$f_\nu(y) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Dann gilt:

$$\int_u^\infty y f_\nu(y) dy = \frac{\kappa\nu}{\nu-1} \left(1 + \frac{u^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}. \quad (35)$$

mit κ wie in Gleichung (34).

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_u^\infty y f_\nu(y) dy &= \kappa \int_u^\infty y \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dy \\ &= \kappa \int_u^\infty \frac{d}{dy} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right) dy \\ &= \frac{\kappa\nu}{1-\nu} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \Big|_{y=u}^{y=\infty} \\ &= \frac{\kappa\nu}{\nu-1} \left(1 + \frac{u^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}} \end{aligned}$$

□

Beweis von Proposition 9. (a) Die Behauptung für den VaR folgt wie in Proposition 8. Für den Beweis von (b) betrachten wir also $L \sim t(\nu; \mu, \sigma)$. Wir schliessen daraus:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L|L > q_\alpha(L)] &= \frac{1}{\mathbb{P}[L > q_\alpha(L)]} \int_{q_\alpha(L)}^{\infty} y f_L(y) dy \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_{q_\alpha(L)}^{\infty} y f_\nu\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dy \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \int_{(q_\alpha(L)-\mu)/\sigma}^{\infty} (\mu + \sigma u) f_\nu(u) du \\
&= \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_{(q_\alpha(L)-\mu)/\sigma}^{\infty} u f_\nu(u) du \\
&= \mu + \frac{\kappa\nu\sigma}{(\nu-1)(1-\alpha)} \left(1 + \frac{(q_\alpha(L))^2}{\nu}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}.
\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung benutzten wir Hilfssatz 1. □

Literatur

- [1] Bartkiewicz, K., Jakubowski, A., Mikosch, T., and Wintenberger, O. (2011). Stable limits for sums of dependent infinite variance random variables. *Probability Theory and Related Fields*, Vol. 150, pp. 337-372.
- [2] Blum, M. (1970). On the Sums of Independently Distributed Pareto Variates. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 19, No. 1, pp. 191-198.
- [3] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer.
- [4] Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Volume II, Second Edition, John Wiley and Sons.
- [5] Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Enigneering*, Springer.
- [6] Gnedenko, B. V., and Kolmogorov, A. N. (1968). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Reading, MA: Addison-Wesley.
- [7] Hall, P. (1979). On the rate of convergence in the central limit theorem for distributions with regularly varying tails. *Probability Theory and Related Fields*, Volume 49, Number 1, 1-11.
- [8] Hesterberg, T. C. and Nelson, B. L. (1998). Control variates for probability and quantile estimation. *Management Science*, Vol. 44, No. 9, 1295-1312.
- [9] Hofert, M. and Wüthrich, M. (2011). Statistical Review of Nuclear Power Accidents. *Preprint, ETH Zürich*.
- [10] Janssen, A. and Mason, D. M. (1990). On the rate of convergence of sums of extremes to a stable law. *Probability Theory and Related Fields*, Volume 86, Number 2, 253-264.
- [11] Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of Business*, Volume 36, 394-419.
- [12] Rachev, S. and Mittnik, S. (2000). *Stable Paretian Models in Finance*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.
- [13] Samorodnitsky, G. and Taquq, M. (1994). *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman and Hall, New York.
- [14] Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons, Inc.