Musterlösung 3

1. **a)** Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, aber über $\mathbb{C}$, da sie 3 verschiedene komplexe Eigenwerte hat. Nämlich $\lambda \in \{-1+i, -1-i, 1\}$.

Die Matrix B ist weder über $\mathbb{R}$ noch über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar. Die Eigenwerte von B sind alle reell, $\{1, 3\}$, aber $\dim(E_1) + \dim(E_3) = 2 \neq 3$.

b) Die Abbildunsmatrix von f bezüglich der Standardbasis ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. Das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}$ (Spaltenentwicklung nach der 1. Spalte). Die Eigenwerte von f sind also die Nullstellen von $p_A(\lambda)$, d.h.

$$\lambda^n - 1 = 0.$$

Über $\mathbb{C}$ existieren also genau n verschiedene Nullstellen $\lambda_k := e^{\frac{2\pi k}{n} i}$, $k = 1, \cdots, n$. Somit ist die Abbildung f über $\mathbb{C}$ immer diagonalisierbar. Aber über $\mathbb{R}$ ist f nur für den Fall $n = 2$ diagonalisierbar. In dem Fall sind nämlich die beiden komplexen Eigenwerte $\lambda = 1, -1$ auch reell.

2.
- Wir zeigen zunächst, dass falls $P^2 = P$ ein Projektor ist, dann lässt sich der Vektorraum V als direkte Summe $\mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$ schreiben. Sei $v \in V$ dann ist

$$v = (v - Pv) + Pv.$$

Dabei liegt der Vektor Pv trivialerweise im Bild von P, und es gilt $P(v - Pv) = Pv - PPv = Pv - Pv = 0$. Somit liegt also der Vektor $(v - Pv) \in \mathrm{Kern}(P)$. Wir müssen noch zeigen, dass der Schnitt der beiden Räume trivial ist. Sei also $w \in \mathrm{Kern}(P) \cap \mathrm{Bild}(P)$: $v = Pv$, da dieser im Bild liegt, aber v liegt auch im Kern. D.h. $v = Pv = 0$.

Bitte wenden!

- Um zu beweisen, dass P diagonalisierbar ist, reicht es also zu zeigen, dass $\mathrm{Bild}(P)$ eine Basis aus Eigenvektoren besitzt. Aber das ist trivialerweise richtig, da die Einschränkung
$$P|_{\mathrm{Bild}(P)} : \mathrm{Bild}(P) \to \mathrm{Bild}(P)$$
die Idendität ist (jede Basis ist eine *Eigenbasis* = Basis aus Eigenvektoren).

Falls $P = \mathbb{1}$ ($\mathrm{Bild}(P) = V$), dann ist der Eigenwert 1 und falls $P = 0$ ($\mathrm{Kern}(P) = V$) ist der Eigenwert 0. Ansonsten hat P die Eigenwerte 1 und 0.

3. Angenommen die Vektoren sind linear abhängig, dann existieren $\lambda_i \in K$, nicht alle null, mit
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A^{i-1} v = 0.$$
Wähle $k := \min\{i|\lambda_i \neq 0\}$ (existiert, da wir angenommen haben die Vektoren sind linear abhängig). Dann gilt
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A^{i-1} v = \sum_{i=k}^{m} \lambda_i A^{i-1} v \\ 0 &= A^{m-k} 0 = A^{m-k} \left(\sum_{i=k}^{m} \lambda_i A^{i-1} v \right) = \lambda_k A^{m-1} v. \end{aligned}$$
Weil aber $v \notin Kern(A^{m-1}) \Rightarrow \lambda_k = 0$. Widerspruch zu der Wahl von λ_k.

4. **a)** Sei $y := x'$, dann ist $y' = x'' = -2\mu x' - \omega^2 x = -2\mu y - \omega^2 x$. Also erhalten folgende Differentialgleichung 1. Ordnung
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) Falls (x_0, y_0) ein Eigenvektor von A ist zum Eigenwert λ, dann ist
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Die umgekehrte Richtung ist trivial, setze nämlich $t = 0$.

c) d) Das charakteristische Polynom ist
$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

Somit sind die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{-2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - 4\omega^2}}{2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$. Somit gibt es in beiden Fällen (da $\mu \neq \omega$) 2 verschiedene Eigenwerte. Im Fall c) gibt es reelle Eigenwerte und im Fall d) gibt es keine rellen Eigenwerte, aber sie sind zueinander komplex konjugiert. D.h. A ist diagonilisierbar. Nun zu den Eigenvektoren: Es gilt $x' = y = \lambda x$, d.h. $\frac{y}{x} = \lambda$. Also sind die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

c) Also ist $x(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t},\ C, D \in \mathbb{R}$, eine Lösung des Systems. Da der Lösungsraum 2 dimensional ist (vgl. letzte Serie) sind das gerade alle Lösungen.

d) Eine physikalisch sinnvolle Lösung ist natuerlich eine reelle Lösung. Wir müssen also 2 linear unabhängige reelle Lösungen finden. Aber da λ_1 und λ_2 zueinander komplex konjugiert sind, ist die Lösung $\frac{1}{2}e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}$ eine reelle Lösung, nämlich der Realteil von $e^{\lambda_1 t} = e^{-\mu t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\, t)$. Aber auch $\frac{1}{2i}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})$ ist eine reelle Lösung, nämlich der Imaginärteil von $e^{\lambda_1 t} = e^{-\mu t}\sin(\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\, t)$. Diese beiden Lösungen sind linear unabhängig und spannen den Lösungsraum somit auf. Die allgemeine Lösung sieht also so aus

$$x(t) = e^{-\mu t}(C\cos(\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\, t) + D\sin(\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\, t)),$$

wobei $C, D \in \mathbb{R}$ Konstanten sind, die von den Anfangsbedingungen abhängen.

e) Aus der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ erhalten wir $x(0) = C = 1$, und aus $x'(0) = -\mu 1 + D\sqrt{\omega^2 - \mu^2} = 0$ erhalten wir für $D = \frac{\mu}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}$.

5.

- Sei $x (\neq 0) \in Kern(A)$ und $i \in \{1, \cdots, n\}$ so gewählt, dass $|x_i| = \max_j\{|x_j|\} > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j &= 0 \\ \Rightarrow |x_i||a_{ii}| &\leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}||x_j| \\ \Leftrightarrow |a_{ii}| &\leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|. \end{aligned}$$

Aber nach Voraussetzung war $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$. Also muss $x = 0$ sein. Und deshalb A regulär.

Bitte wenden!

- λ ist ein Eigenwert von $A \Leftrightarrow A - \lambda 1$ singulär ist ($det(A - \lambda 1) = 0$). Wegen a) existiert also ein $i \in \{1, \cdots, n\}$, mit

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{k \neq i} |a_{ik}| = \varepsilon_i.$$

Sonst wäre $A - \lambda \mathbb{1}$ nämlich regulär. D.h. also jeder Eigenwert liegt in der komplexen Zahlenebene in einem der Bälle $B(a_{ii}, \varepsilon_i) = \{z \in \mathbb{C} \big| |z - a_{ii}| \leq \varepsilon_i\}$. D.h. λ muss in der Menge Z liegen.

- 11 liegt nicht in der Menge Z (leicht nachzuprüfen), also wegen den vorherigen Teilaufgaben kann 11 kein Eigenwert von A sein.