

# **Komplexe Analysis**

Meike Akveld, Alessandra Iozzi, Peter Jossen

15. August 2020

## Inhaltsverzeichnis

Vorwort	4
Kapitel 1. Komplexe Zahlen	5
1.1. Grundbegriffe	5
1.2. Die komplexe Zahlenebene	7
1.3. Folgen und Reihen komplexer Zahlen	10
1.4. Die Euler'sche Formel	11
1.5. Logarithmen und Wurzeln	13
1.6. Der Fundamentalsatz der Algebra	17
Kapitel 2. Komplexwertige Funktionen	19
2.1. Ableitung komplexwertiger Funktionen	22
2.2. Die Cauchy–Riemann Gleichungen	27
2.3. Kurvenintegrale	32
2.4. Der Satz von Cauchy (Cauchy'scher Integralsatz)	43
2.5. Der Mittelwertsatz, das Maximum Prinzip und der Satz von Liouville	51
Kapitel 3. Taylor- und Laurentreihen	63
3.1. Reihen Entwicklung	63
3.2. Der Residuensatz	74
3.3. Anwendung: Bedingungen, unter denen $f(z) \equiv 0$	86
3.4. Anwendung des Residuensatzes auf reelle Integrale	88
Kapitel 4. Fourier Analysis	101
4.1. Fourier-Reihen	101
4.2. Fourier-Transformation	132
Kapitel 5. Laplace-Transformation	153
5.1. Grundbegriffe	153
5.2. Rechenregel und verallgemeinerte Funktionen	158
5.3. Eindeutigkeit der Laplace-Transformation und die Inverse Laplace Transformation	167
5.4. Anwendungen	171

**Vorwort**

Das Ziel dieses Kurses ist die Entwicklung der Theorie komplexwertiger Funktionen in einer komplexen Variablen. Wir werden zunächst die wichtigsten Sätze zu solchen Funktionen kennenlernen, und im Anschluss die Fourier- und die Laplacetransformationen behandeln.

## KAPITEL 1

# Komplexe Zahlen

### 1.1. Grundbegriffe

Die komplexen Zahlen kennen Sie vielleicht schon aus der Mittelschule. Sie wurden im Kurs Analysis I eingeführt, und in der Lineare Algebra verwendet. Wir setzen sie als bekannt voraus, machen aber trotzdem eine kurze Wiederholung.

Eine *komplexe Zahl* ist ein Paar  $(x, y)$  reeller Zahlen. Wir schreiben komplexe Zahlen  $z$  jedoch nicht als Paare  $z = (x, y)$ , sondern formell als Summen

$$z = x + iy.$$

Wir nennen diese Schreibweise die *Normalform* der komplexen Zahl  $z$ . Die Symbole  $+$  und  $i$  sind soweit einfach als Trennungssymbole zu verstehen, welche die Rolle des Kommas und der Klammern in  $(x, y)$  übernehmen. Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als die Menge aller solchen Paare.

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Anstelle von  $x + i0$  schreiben wir auch einfach  $x$ , und anstelle von  $0 + iy$  schreiben wir  $iy$ . Wir identifizieren damit insbesondere jede reelle Zahl  $x$  mit der komplexen Zahl  $x = x + i0$ , und nennen also eine komplexe Zahl  $z = x + iy$  *reell* falls  $y = 0$  gilt. Die komplexe Zahl  $i = i1$  heisst *imaginäre Einheit*.

Wir definieren Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$  durch

$$(1.1) \quad \left[ \begin{array}{l} z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{array} \right].$$

Durch direktes Nachrechnen können wir überprüfen, dass die so definierte Additions- und Multiplikationsoperation auf  $\mathbb{C}$  sowohl assoziativ als auch kommutativ sind, und das Distributivgesetz erfüllen. Wir bemerken ebenfalls dass diese Operationen kompatibel mit der Normalformschreibweise komplexer Zahlen sind, das heisst, wir können die Normalform auch als

$$x + iy = (x + i0) + (0 + i1) \cdot (y + i0)$$

lesen. Sind  $z_1$  und  $z_2$  reell, so erhalten wir die übliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen. Es gibt also keine Konflikte in der Notation. Die imaginäre Einheit  $i$  hat die Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

und man kann die Definition von Addition und Multiplikation komplexer Zahlen einfach daraus herleiten, wenn man sich gemerkt hat dass Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz gelten. Der folgende Satz fasst die grundlegenden arithmetischen Eigenschaften von  $\mathbb{C}$  zusammen.

**SATZ 1.1.** *Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , zusammen mit der eingeführten Additions- und Multiplikationsoperation, ist ein Körper. Das neutrale Element für die Addition ist die komplexe Zahl  $0 = 0 + i0$  und das neutrale Element für die Multiplikation ist die komplexe Zahl  $1 = 1 + i0$ .*

Den Begriff des Körpers kennen wir aus der linearen Algebra. Wir erinnern an die Definition: Ein *Körper* ist eine Menge  $K$  ausgestattet mit zwei Operationen  $+$  und  $\cdot$ , und mit zwei voneinander verschiedenen speziellen Elementen die wir als  $0 \in K$  und  $1 \in K$  schreiben, so dass die folgenden neun Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Assoziativität der Addition:  $(a + b) + c = a + (b + c)$  für alle  $a, b, c \in K$ ;
- (2) Kommutativität der Addition:  $a + b = b + a$  für alle  $a, b \in K$ ;
- (3) Neutrales Element für die Addition:  $0 + a = a = a + 0$  für alle  $a \in K$ ;
- (4) Existenz additiver Inverser: Für jedes  $a \in K$  existiert ein  $b \in K$  mit  $a + b = 0$ .
- (5) Assoziativität der Multiplikation:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  für alle  $a, b, c \in K$ ;
- (6) Kommutativität der Multiplikation:  $a \cdot b = b \cdot a$  für alle  $a, b \in K$ ;
- (7) Neutrales Element für die Multiplikation:  $1 \cdot a = a = a \cdot 1$  für alle  $a \in K$ ;
- (8) Existenz multiplikativer Inverser: Für jedes  $a \in K \setminus \{0\}$  existiert ein  $b \in K \setminus \{0\}$  mit  $a \cdot b = 1$ .
- (9) Distributivitätsgesetz:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  für alle  $a, b, c \in K$ ;

Eine formelle Rechnung zeigt, dass zu jedem gegebenen  $a \in K$  genau ein additives Inverses existiert. Es wird üblicherweise als  $-a$  geschrieben. Genauso kann man prüfen, dass zu einem gegebenen  $a \in K \setminus \{0\}$  genau ein multiplikatives Inverses existiert, das dann üblicherweise als  $a^{-1}$  oder  $\frac{1}{a}$  notiert wird. Alle diese Bedingungen kann man für die gegebene Addition und Multiplikation auf der Menge  $\mathbb{C}$  durch stures Nachrechnen überprüfen. Die einzige Ausnahme dabei ist vielleicht die Bedingung (8) über die Existenz multiplikativer Inverser. Zu einer gegebenen komplexen Zahl  $z = x + iy \neq 0$  können wir das multiplikative inverse explizit als

$$(1.2) \quad z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

angeben. Da  $z$  nicht Null ist, ist die reelle Zahl  $x^2 + y^2$  auch nicht Null, die Formel ergibt also Sinn. Dass tatsächlich  $z \cdot z^{-1} = 1$  gilt prüft man wiederum durch uninspiriertes Nachrechnen.

**BEMERKUNG 1.2.** Die reellen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation bilden auch einen Körper, genauer gesagt, einen Teilkörper von  $\mathbb{C}$ , da Addition und Multiplikation reeller Zahlen kompatibel mit Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sind. Wir können den Körper  $\mathbb{C}$  als eindimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{C}$ , oder als zweidimensionalen Vektorraum über  $\mathbb{R}$  auffassen. Typischerweise benützt man die Menge  $\{1, i\}$  als  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}$ .

BEMERKUNG 1.3. Das Symbol  $\iota$  das wir für die imaginäre Einheit benutzen ist ein  $i$  ohne  $i$ -Punkt. Alternativ wird auch  $i$  oder  $I$  benutzt, oder in sehr alter Literatur auch  $\sqrt{-1}$ . Insbesondere in der Elektrotechnik wird auch  $j$  verwendet, da das Symbol  $i$  schon für den Strom reserviert ist.

DEFINITION 1.4. Es sei  $z = x + iy$  eine komplexe Zahl. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \Re(z) &:= x && \text{Der Realteil von } z. \\ \Im(z) &:= y && \text{Der Imaginärteil von } z. \\ \bar{z} &:= x - iy && \text{Die zu } z \text{ konjugierte komplexe Zahl.} \end{aligned}$$

Der Realteil und der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind also reelle Zahlen, und es gilt  $z = \Re(z) + \iota\Im(z)$ . Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich wenn sie gleiche Real- und gleiche Imaginärteile haben. Die folgenden Beziehungen für komplexe Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  folgen direkt aus den Definitionen.

$$(1.3) \quad \begin{array}{l} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ \Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{array} .$$

Die Formel (1.2) für das multiplikative Inverse einer komplexen Zahl  $z = x + iy \neq 0$  kann man damit wie folgt herleiten. Wir bemerken zuerst, dass  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 > 0$  gilt, und finden

$$1 = \frac{z \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = z \cdot \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

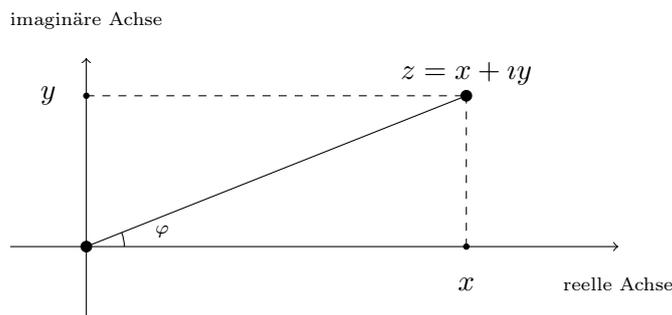
und daraus folgt, dass

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) + \iota \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

gilt, wie behauptet.

## 1.2. Die komplexe Zahlenebene

Komplexe Zahlen sind definitionsgemäss Paare reeller Zahlen, und wir können sie als Punkte in der Ebene darstellen. Die komplexe Zahl  $z = x + iy$  entspricht also dem Punkt mit Koordinaten  $(x, y)$ . Wir sprechen von der *komplexen Zahlenebene*. Addition komplexer Zahlen entspricht so der Vektoraddition in der Ebene. Die reellen Zahlen  $x + i0$  entsprechen der  $x$ -Achse, und die rein imaginären Zahlen  $0 + iy$  entsprechen der  $y$ -Achse. Wir sprechen deshalb von der reellen Achse und der imaginären Achse.



Der Abstand der komplexen Zahl  $z = x + iy$  vom Ursprung ist, nach dem Satz von Pythagoras, durch  $\sqrt{x^2 + y^2}$  gegeben.

DEFINITION 1.5. Sei  $z = x + iy$  eine komplexe Zahl. Wir nennen

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

den Betrag oder auch die Norm von  $z$ .

In der Literatur findet man dafür auch den Begriff *Modul* oder *Absolutbetrag* von  $z$ . Es gibt hier keinen Konflikt mit dem Betrag auf den reellen Zahlen, da für eine reelle Zahl  $z = x + i0$  der Betrag von  $z$  als komplexe Zahl gleich dem üblichen Betrag der reellen Zahl  $x$  ist. Wir können mit Hilfe des Betrags auch die Distanz zwischen zwei komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  in der komplexen Zahlenebene als

$$(1.4) \quad \text{dist}(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|.$$

angeben. Offenbar gilt  $z_1 = z_2$  genau dann, wenn  $|z_1 - z_2| = 0$  gilt, und insbesondere ist  $z = 0$  zu  $|z| = 0$  äquivalent. Es gilt

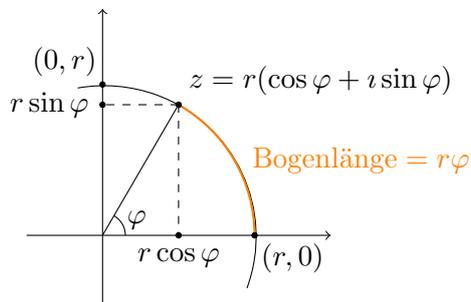
$$(1.5) \quad \boxed{\begin{array}{l} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \end{array}}$$

Die Ungleichung  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  wird *Dreiecksungleichung* genannt. Man kann sie geometrisch sofort sehen, wenn man in der komplexen Ebene das Dreieck mit Eckpunkten  $0$ ,  $z_1$  und  $z_1 + z_2$  zeichnet.

Für eine komplexe Zahl  $z \neq 0$  nennt man *Argument* von  $z$  den Winkel  $\varphi$ , der von der reellen Achse und der Geraden durch  $z$  und den Ursprung eingeschlossen wird, von der reellen Achse aus gemessen. Wir schreiben  $\varphi =: \arg(z)$ . Wir verstehen dabei  $\varphi$  nicht als eine reelle Zahl, sondern als ein Winkelmaß, das heißt, also eine Äquivalenzklasse von reellen Zahlen, wobei zwei reelle Zahlen als äquivalent gelten wenn sie sich um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  unterscheiden. Etwas informeller ausgedrückt ist  $\arg(z)$  eine nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  bestimmte reelle Zahl. Ist  $\varphi$  das Argument von  $z \neq 0$ , so können wir  $z$  als

$$\boxed{z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)},$$

schreiben, wobei  $r = |z|$  die Norm von  $z$ , also die Distanz von  $z$  zum Ursprung ist. Man nennt dies die *Polardarstellung* von  $z$ .



Das Argument  $\arg(z)$  einer komplexen Zahl  $z \neq 0$  ist als Winkelmaß nur bis auf ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  bestimmt. Um eine eindeutig bestimmte reelle Zahl zu bekommen können wir entscheiden, Winkel mit reellen Zahlen im Intervall  $(-\pi, \pi]$  zu messen. Wir erhalten so den *Hauptwert des Arguments* von  $z \neq 0$ . Definitionsgemäss ist das die eindeutig bestimmte reelle Zahl

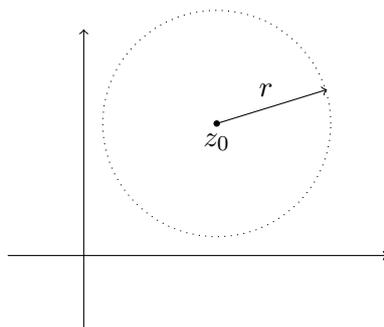
$$\boxed{\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]}$$

für die  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  mit  $r = |z|$  und  $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$  gilt.

DEFINITION 1.6. Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und sei  $r$  eine positive reelle Zahl. Die *offene Kreisscheibe* mit Zentrum  $z_0$  und Radius  $r$  ist die Teilmenge

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

von  $\mathbb{C}$ .



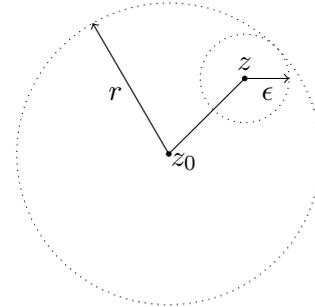
Die Kreislinie  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$  gehört nicht zu  $B(z_0, r)$ , die Kreisscheibe  $B(z_0, r)$  ist also eine Kreisscheibe ohne Rand. Dies ist hier die Bedeutung des Adjektivs *offen*. Allgemein ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  eine Teilmenge ohne Rand. Die formelle Definition ist folgende.

DEFINITION 1.7. Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{C}$  heisst *offen*, wenn zu jedem  $z \in U$  ein Radius  $\epsilon > 0$  existiert, so dass  $B(z, \epsilon) \subseteq U$  gilt.

BEISPIEL 1.8. Sei  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$ . Die Kreisscheibe  $B(z_0, r)$  ist offen im Sinn der obigen Definition. Sei  $z \in B(z_0, r)$  beliebig. Es gilt also  $|z - z_0| < r$ . Dann ist

$$\epsilon := r - |z - z_0| > 0$$

und aus der Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag folgt  $B(z, \epsilon) \subset B(z_0, r)$  wie gefordert.  $\square$



### 1.3. Folgen und Reihen komplexer Zahlen

Neben der algebraischen Struktur als Körper hat  $\mathbb{C}$  eine topologische Struktur die durch den Absolutbetrag, oder genauer gesagt, durch den Distanzbegriff (1.4) definiert wird. Wir können damit auch über Konvergenz einer Folge oder einer Reihe sprechen.

DEFINITION 1.9. Sei  $z_1, z_2, z_3, \dots$  eine Folge komplexer Zahlen. Wir sagen  $z \in \mathbb{C}$  sei der *Grenzwert* dieser Folge, und dass die Folge gegen  $z$  konvergiert, falls es für jede noch so kleine positive reelle Zahl  $\epsilon > 0$  eine ganze Zahl  $N > 0$  gibt, so dass

$$|z - z_n| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N$$

gilt. In diesem Fall schreiben wir  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .

Sei  $z_1, z_2, z_3, \dots$  eine konvergente Folge komplexer Zahlen, mit  $z_n = x_n + iy_n$ . Falls diese Folge gegen einen Grenzwert  $z = x + iy$  konvergiert, dann gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Umgekehrt, falls die Folgen reeller Zahlen  $x_1, x_2, \dots$  und  $y_1, y_2, \dots$  gegen Grenzwerte  $x$  und  $y$  konvergieren, so konvergiert die Folge komplexer Zahlen  $z_1, z_2, \dots$ , und zwar mit Grenzwert  $z = x + iy$ .

Nachdem wir nun den Konvergenzbegriff für Folgen komplexer Zahlen definiert haben, können wir auch über Konvergenz von Reihen komplexer Zahlen sprechen. Wir schreiben

$$(1.6) \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

und sagen dass die Reihe  $z_1 + z_2 + \dots$  gegen  $s \in \mathbb{C}$  konvergiert, falls die Folge der Partialsummen  $s_1, s_2, \dots$ , definiert durch

$$s_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

gegen  $s$  konvergiert. Wir sagen dass die Reihe (1.6) *absolut konvergiert* falls die Reihe reeller Zahlen

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

konvergiert. Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz, und die bekannten Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen reeller Zahlen gelten wortwörtlich auch für Reihen komplexer Zahlen, wenn man den Absolutbetrag als komplexen Betrag liest. Zum Beispiel gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

jede komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < 1$ .

Die wichtigste Art von Reihen die wir in diesem Kurs betrachten, sind Potenzreihen, also Reihen der Form

$$(1.7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

mit vorgegebenen komplexen Koeffizienten  $c_n \in \mathbb{C}$ , die wir üblicherweise als Funktion in der komplexen Zahl  $z$  betrachten. Viele wichtige Funktionen sind durch solche Reihen definiert, oder können als Reihe geschrieben werden. Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen kann man mit dem Wurzelkriterium untersuchen: Ist der Limes superior

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

strikt kleiner als 1, so konvergiert die Reihe (1.7) absolut. Sie divergiert fall dieser Limes superior  $> 1$  ist, und im Fall  $= 1$  sagt das Kriterium nichts aus.

DEFINITION 1.10. Der *Konvergenzradius* der Reihe (1.7) ist definiert als die reelle Zahl  $R \geq 0$

$$R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

oder als das Symbol  $+\infty$  falls der Limsup Null ist.

Zusammenfassend folgt also aus dem Wurzelkriterium, dass die Reihe (1.7) absolut konvergiert falls  $|z| < R$ , und divergiert falls  $|z| > R$  gilt. Falls der Konvergenzradius unendlich ist, also  $R = +\infty$ , so konvergiert die Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

## 1.4. Die Euler'sche Formel

Wir können klassische trigonometrische Funktionen wie Sinus, Kosinus, hyperbolischen Sinus und Kosinus, die Exponentialfunktion und viele mehr durch konvergente Potenzreihen definieren. In dem wir und die Variable als komplexe Zahl denken, können wir alle diese Funktionen zu komplexwertigen Funktionen in einer komplexen Variable verallgemeinern.

DEFINITION 1.11. Sei  $z \in \mathbb{C}$ . Das *Exponential*, der *Sinus* und der *Kosinus* von  $z$  sind

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Diese Reihen konvergieren absolut. Dies kann man mit dem Quotientenkriterium oder dem Wurzelkriterium leicht nachprüfen. Ihr Konvergenzradius (Definition 1.10) ist unendlich. Für das Exponential ist auch die alternative Schreibweise

$$\exp(z) = e^z$$

gebräuchlich, wobei  $e = \exp(1) = 2.71828\dots$  für die Euler'sche Konstante steht. Es gilt

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}, \quad \sin(\bar{z}) = \overline{\sin(z)}, \quad \cos(\bar{z}) = \overline{\cos(z)}$$

was wir anhand von (1.3) einfach einsehen können:

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp(z)},$$

und analog für Sinus und Kosinus.

Eine der wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion ist ihre sogenannte *Funktionalgleichung*: Für beliebige komplexe Zahlen  $z$  und  $w$  gilt:

$$\boxed{\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w)}.$$

Dies folgt essentiell aus der binomischen Formel, in dem man in der Reihe für  $\exp(z+w)$  die Potenzen  $(z+w)^n$  ausmultipliziert. Da alle Reihen absolut konvergieren ist dies auch gerechtfertigt.

$$\begin{aligned} (1.8) \quad \exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} z^p w^q = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{p!q!} z^p w^q = \left( \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{p!} \right) \left( \sum_{q=0}^{\infty} \frac{w^q}{q!} \right) = \exp(z) \exp(w) \end{aligned}$$

Im Spezialfall  $w = -z$  finden wir  $\exp(z) \exp(-z) = \exp(0) = 1$ , und daraus folgt dass  $\exp(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt.

Falls  $z$  eine rein imaginäre Zahl ist, also  $z = it$  für ein  $t \in \mathbb{R}$ , so bietet es sich an die Exponentialreihe in zwei Reihen aufzuteilen, wobei wir in die erste Reihe die Terme  $\frac{1}{n!} z^n$  mit geradem  $n$ , und in die zweite Reihe die Terme  $\frac{1}{n!} z^n$  mit ungeradem  $n$  nehmen. Ist  $n = 2m$  gerade, so gilt  $\frac{1}{n!} (it)^n = \frac{1}{2m!} (-1)^m t^{2m}$ , und ist  $n = 2m+1$  ungerade, so gilt  $\frac{1}{n!} (it)^n = i \frac{1}{(2m+1)!} (-1)^m t^{2m+1}$ . Damit finden wir

$$\exp(it) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} = \cos(t) + i \sin(t)$$

und wir haben den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 1.12 (Euler). Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$(1.9) \quad \boxed{\exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)}$$

Aus dem Satz folgt insbesondere, dass für jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$|\exp(it)| = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$$

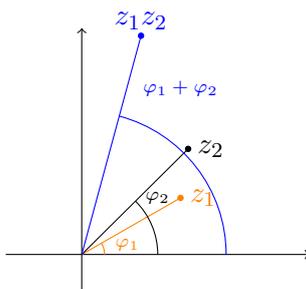
gilt. Falls wir  $t = \pi$  setzen, erhalten wir auch  $\exp(i\pi) = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$ , oder in der alternativen Schreibweise

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Mit Hilfe des komplexen Exponentials und Satz 1.12 können wir die Polardarstellung komplexer Zahlen auch als

$$\boxed{z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \exp(i\varphi)}$$

angeben. Dabei gilt  $r = |z|$  und  $\varphi = \arg(z)$  falls  $z \neq 0$ . Damit ist die Multiplikation in der komplexen Zahlenebene einfach geometrisch zu veranschaulichen.



$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \exp(i\varphi_1) \cdot r_2 \exp(i\varphi_2) = \underbrace{r_1 \cdot r_2}_{\text{Produkt der Längen}} \cdot \exp(i \underbrace{(\varphi_1 + \varphi_2)}_{\text{Summe der Winkel}})$$

## 1.5. Logarithmen und Wurzeln

Die reelle Logarithmusfunktion, auch *natürlicher Logarithmus* genannt, ist die Funktion

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$$

die eindeutig durch  $\exp(\log(t)) = t$  charakterisiert ist. Also  $\log(t)$  ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl  $s$  mit der Eigenschaft  $\exp(s) = t$ . Auch die Notation  $\ln(t)$  ist gebräuchlich. Für negative  $t \in \mathbb{R}$  und auch für  $t = 0$  ist der reelle Logarithmus nicht definiert, da es keine reellen Zahlen  $s$  mit  $\exp(s) \leq 0$  gibt. Es ist möglich, den Logarithmusbegriff auf die komplexen Zahlen auszudehnen, allerdings verlieren wir dabei Eindeutigkeit.

DEFINITION 1.13. Sei  $z$  eine komplexe Zahl. Ein *Logarithmus* von  $z$  ist eine komplexe Zahl  $w$ , die  $\exp(w) = z$  erfüllt.

PROPOSITION 1.14. Jede komplexe Zahl ausser  $z = 0$  besitzt einen eindeutigen komplexen Logarithmus  $w = s + it$ , der  $-\pi < t \leq \pi$  erfüllt. Alle anderen Logarithmen von  $z$  sind durch

$$w + 2\pi ik, \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

gegeben.

BEWEIS. Schreibe  $z \neq 0$  in Polarform  $z = r \exp(it)$ , mit  $r > 0$  und  $t \in (-\pi, \pi]$ , und schreibe  $s := \text{Log}(r)$  für den reellen Logarithmus von  $r$ . Dann gilt

$$z = \exp(s) \exp(it) = \exp(s + it),$$

und wir haben einen Logarithmus  $w = s + it$  von  $z$  gefunden, da  $z = \exp(w)$  gilt. Ist  $w_1 := s_1 + it_1$  ein weiteren Logarithmus von  $z$ , so gilt

$$z = \exp(w_1) = \exp(s_1 + it_1) = \exp(s_1) \exp(it_1).$$

Daraus folgt, dass

$$\exp(s) = |z| = \exp(s_1) \quad \text{und} \quad \exp(it) = \exp(it_1).$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton auf  $\mathbb{R}$  ist, folgt aus der ersten Gleichung  $s = s_1$ . Aus  $\exp(it) = \exp(it_1)$  folgt schliesslich dass

$$t_1 = t + i2\pi k$$

für eine ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  gilt, also  $w_1 = s + it + i2\pi k = w + i2\pi k$  wie behauptet. Daraus folgt nun auch die Eindeutigkeitsaussage im Satz.  $\square$

Im Verlauf des Beweises haben wir auch gesehen, wie man Logarithmen von  $z$  bestimmen kann. Da jede komplexe Zahl  $z \neq 0$  mehr als nur einen, ja sogar unendlich viele Logarithmen besitzt, ist es nicht sehr sinnvoll  $w = \log(z)$  einfach als eine komplexe Zahl die  $\exp(w) = z$  erfüllt zu definieren. Trotz der fehlenden Eindeutigkeit schreibt man

$$\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$$

was insofern Sinn ergibt als dass jeder Logarithmus von  $z$  von der Form  $s + it$  ist mit  $s = \log(|z|)$  und  $t = \arg(z)$  aufgefasst als reelle Zahl die aber nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  bestimmt ist. Je nach dem was man mit dem Ausdruck  $\log(z)$  dann fabriziert ist dies problematisch oder nicht. Zum Beispiel wird es überhaupt kein Problem sein die Funktion  $\log(z)$  abzuleiten, weil Addition einer Konstanten  $2\pi ik$  sowieso nichts an der Ableitung ändert. Ebenfalls die Gleichung

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$$

ist sinnvoll und richtig, wenn man beide Seiten der Gleichung als komplexe Zahlen interpretiert, die nur bis auf (voneinander unabhängige) ganzzahlige Vielfache von  $2\pi i$  bestimmt sind. Da dies aber schnell zu fatalen Fehlern in Rechnungen führen kann, sollte man mit

dem Ausdruck  $\log(z)$  extrem vorsichtig umgehen. Manchmal ist es hilfreich, nur Logarithmen  $w = s + it$  mit  $-\pi < t \leq \pi$  zu betrachten.

DEFINITION 1.15. Sei  $z \neq 0$  eine komplexe Zahl. Der Logarithmus

$$\boxed{\text{Log}(z) := \log(|z|) + i \text{Arg}(z)}$$

heisst der *Hauptwert des Logarithmus* von  $z$ .

BEISPIEL 1.16. Wir betrachten die komplexe Zahl

$$z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

mir Norm  $|z| = \sqrt{2+2} = 2$  und  $\text{Arg}(z) = \frac{3}{4}\pi$ . Der Hauptwert des Logarithmus von  $z$  ist damit durch

$$\text{Log}(z) = \log(2) + i\frac{3}{4}\pi$$

gegeben. Jeder weitere Logarithmus von  $z$  ist also von der Form  $\log(2) + i\frac{3}{4}\pi + i2\pi k$  für eine ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$ .

Um die Problematik des komplexen Logarithmus zu verdeutlichen berechnen wir nun  $\text{Log}(z^2)$ . Es gilt  $z^2 = -4i$ , und also  $|z^2| = 4$  und  $\text{Arg}(z^2) = -\frac{1}{2}\pi$ , und folglich

$$\text{Log}(z^2) = \log(4) - i\frac{1}{2}\pi = 2\log(2) - i\frac{1}{2}\pi.$$

Es ist also nicht wahr, dass  $\text{Log}(z^2) = 2\text{Log}(z)$  gilt. Im Gegenteil, wir haben gezeigt, dass

$$\text{Log}(z^2) = 2\text{Log}(z) - 2\pi i$$

gilt. Nur wenn wir uns die Freiheit gönnen, beide Seiten dieser Gleichung als komplexe Zahlen zu denken die nicht eindeutig, sondern nur bis auf Vielfache von  $2\pi i$  bestimmt sind, können wir den Term  $-2\pi i$  ignorieren. Wir würden das dann als  $\log(z^2) = 2\log(z)$  ausdrücken.

BEMERKUNG 1.17. Man kann den Hauptwert des Logarithmus als Potenzreihe

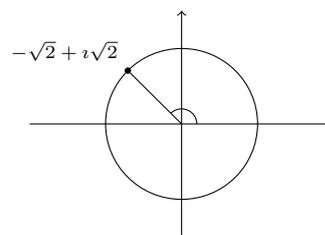
$$\text{Log}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$$

angeben. Diese Reihe konvergiert aber nur für  $|z-1| < 1$ .

DEFINITION 1.18. Sei  $z$  eine komplexe Zahl und  $n \geq 2$  eine ganze Zahl. Eine  $n$ -te Wurzel von  $z$  ist eine komplexe Zahl  $w$ , die  $w^n = z$  erfüllt.

Genau wie beim Logarithmus auch können wir nicht von *der*  $n$ -ten Wurzel von  $z$  sprechen, da es im Allgemeinen mehrere davon gibt. Die komplexe Zahl  $z = 0$  hat nur eine  $n$ -te Wurzel, nämlich  $w = 0$ . Ist  $z \neq 0$ , so existieren mehrere  $n$ -te Wurzeln von  $z$ , und zwar genau  $n$  Stück. In Polarform sind sie einfach anzugeben, nämlich ist jede  $n$ -te Wurzel von  $z = r \exp(it)$  von der Form

$$w = \sqrt[n]{r} \exp\left(i\frac{t+2\pi k}{n}\right)$$



für eine ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$ , wobei  $\sqrt[n]{r}$  für die eindeutige reelle, positive  $n$ -te Wurzel der reellen Zahl  $r > 0$  steht. Für  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  sind diese alle voneinander verschieden. Wir können die  $n$ -ten Wurzeln von  $z \neq 0$  auch mit Hilfe von Exponential und Logarithmus angeben, in dem wir

$$w = \exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right)$$

schreiben. Hier ist  $\log(z)$  als eine bis auf ein Vielfaches von  $2\pi i$  bestimmte komplexe Zahl zu verstehen. In dem wir für  $\log(z)$  die konkreten komplexen Zahlen  $\text{Log}(z) + 2\pi i k$  einsetzen erhalten wir daraus die verschiedenen  $n$ -ten Wurzeln von  $z$ .

BEISPIEL 1.19. Wir wollen die dritten Wurzeln von  $z = -2$  finden. Es gibt drei davon. Aus

$$|z| = 2 \quad \text{und} \quad \text{Arg}(z) = \pi$$

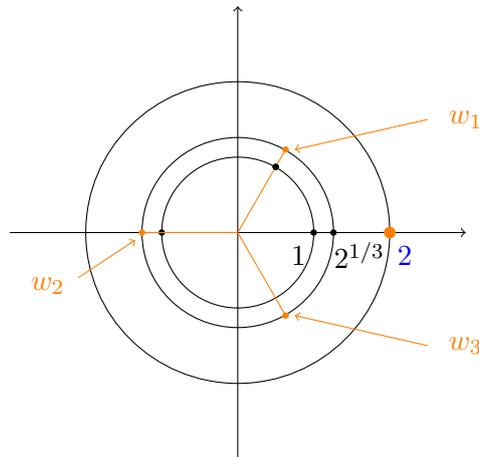
folgt, dass diese drei Wurzeln in Polarform durch

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt[3]{2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right) \\ w_2 &= \sqrt[3]{2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi+2\pi}{3}\right) \\ w_3 &= \sqrt[3]{2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi+4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

gegeben sind. Für jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  ist dann  $\sqrt[3]{2} \cdot \exp\left(i\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$  eine dieser drei Wurzeln, entsprechend dem Rest der Division von  $k$  durch 3. Wir können daraus mit Hilfe der Euler'schen Formel konkrete numerische Werte erhalten.

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.629960524947437 \dots + i1.09112363597172 \dots \\ w_2 &= -1.25992104989487 \dots + i0 \\ w_3 &= 0.629960524947437 \dots - i1.09112363597172 \dots \end{aligned}$$

In der komplexen Zahlenebene liegen diese drei Wurzeln in regelmässigen Abständen auf einem Kreis mit Zentrum im Ursprung und Radius  $\sqrt[3]{2} = 1.25992 \dots$



BEMERKUNG 1.20. Was ist  $i^i$ ? Die Frage kursiert auf verschiedenen Mathe- und Physikblogs, mit mehr oder weniger vollständigen Antworten. So direkt ist die Frage sinnfrei, weil wir gar nicht definiert haben was der Ausdruck  $z^w$  für komplexe Zahlen  $z$  und  $w$  eigentlich bedeuten soll. Ein möglicher Ansatz das zu definieren ist

$$(1.10) \quad z^w := \exp(w \log(z))$$

für komplexe  $z \neq 0$  und  $w$  zu setzen. Da wir hier  $\log(z)$  benutzen bedeutet das, dass wir es hier im Allgemeinen nicht mit einer eindeutig bestimmte komplexen Zahl zu tun haben. Schreiben wir das konkret mit einem bestimmten Logarithmus  $\text{Log}(z) + 2\pi ik$  aus, so finden wir

$$z^w = \exp(w(\text{Log}(z) + 2\pi ik)) = \exp(w \text{Log}(z)) \cdot \exp(2\pi iw)^k$$

was bedeutet:  $z^w$  in (1.10) ist eine komplexe Zahl, bestimmt bis auf Multiplikation mit einer ganzzahligen Potenz von  $\exp(2\pi iw)$ . Wir bemerken folgendes, stets für  $n \neq 0$ :

- (1) Ist  $w$  eine ganze Zahl, so ist  $z^w$  in (1.10) eine eindeutig bestimmte komplexe Zahl, und sie stimmt mit der üblichen Definition einer ganzzahligen Potenz überein.
- (2) Ist  $w = \frac{p}{n}$  ein gekürzter Bruch, so kann  $z^w$  in (1.10) genau  $n$  Werte annehmen, und das sind genau die  $n$ -ten Wurzeln von  $z$ .
- (3) Ist  $z$  eine positive reelle Zahl, so interpretiert man  $\log(z)$  in (1.10) oft auch als reellen Logarithmus. Damit ist dann  $z^w$  eindeutig bestimmt. Ein typisches Beispiel dafür ist die durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \Re(s) > 1$$

definierte Riemann'sche Zeta Funktion, in der jeder Summand als  $\exp(-s \log(n))$  für den reellen Logarithmus  $\log(n)$  gelesen werden muss.

- (4) Man könnte in (1.10) rechterhand auch einfach den Hauptwert des Logarithmus benutzen. Damit wäre dann  $z^w$  dann eindeutig bestimmt. Das ist aber trotzdem nicht eine wirklich nützliche Definition, da in diesem Zusammenhang die wohlbekannten Rechenregeln für Potenzen alle ihre Gültigkeit verlieren.

Wir können nun die Frage was  $i^i$  ist mit Hilfe von (1.10) beantworten. Aus  $\text{Log}(i) = 0 + i\frac{\pi}{4}$  ergibt sich der Hauptwert

$$i^i = \exp(i \text{Log}(i)) = \exp(-\frac{\pi}{4}) = 0.2078795763507619085469 \dots$$

der vielleicht unerwarteterweise eine reelle Zahl ist. Das ist aber nur ein möglicher Wert für  $i^i$ . Für jede ganze Zahl  $k \in \mathbb{Z}$  ist auch

$$\exp(-\frac{\pi}{4}) \cdot \exp(-2\pi)^k = \exp(-\frac{\pi}{4} - 2k\pi)$$

ein durch (1.10) beschriebener Wert.

## 1.6. Der Fundamentalsatz der Algebra

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass jede komplexe Zahl  $a \neq 0$  genau  $n$  voneinander verschiedene  $n$ -te Wurzeln hat. Mit anderen Worten hat die Gleichung

$$z^n - a = 0$$

genau  $n$  Lösungen, oder noch einmal anders formuliert hat das Polynom  $p(z) = z^n - a$  genau  $n$  Nullstellen. Sind  $w_1, \dots, w_n$  diese Lösungen oder Nullstellen, so gilt

$$p(z) = (z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n),$$

das heisst, das Polynom  $p$  kann vollständig in Linearfaktoren faktorisiert werden. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass so eine Faktorisierung auch für ganz beliebige Polynome mit komplexen Koeffizienten existiert. Man sagt der Körper  $\mathbb{C}$  sei *algebraisch abgeschlossen*.

SATZ 1.21 (Fundamentalsatz der Algebra). Sei  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$  (also  $a_n \neq 0$ ) mit komplexen Koeffizienten  $a_j \in \mathbb{C}$ . Dann existieren  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ , nicht unbedingt verschieden, mit

$$p(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n).$$

Insbesondere hat jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

Die analoge Aussage für Polynome mit reellen Koeffizienten und reelle Nullstellen ist falsch. Zum Beispiel hat das Polynom  $p(x) = x^2 + 1$  keine reelle Nullstelle. Der Körper der reellen Zahlen ist also nicht algebraisch abgeschlossen. Wir werden diesen wichtigen Satz im Abschnitt 2.5.1 beweisen. Dabei wird sich dieses rein algebraische Resultat als Konsequenz eines analytischen Satzes, nämlich dem Satz von Liouville über beschränkte holomorphe Funktionen (Satz 2.63) herausstellen.

## Komplexwertige Funktionen

Sei  $D$  irgendeine Menge. Eine *komplexwertige Funktion* auf der Menge  $D$  ist eine Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{C},$$

das heisst, eine Abbildungsvorschrift, die *jedem* Element  $x$  von  $D$  *genau eine* komplexe Zahl  $f(x) \in \mathbb{C}$  zuordnet. Ist  $D$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , so sprechen wir von einer komplexwertigen Funktion in einer reellen Variablen, und ist  $D$  eine (typischerweise offene) Teilmenge von  $\mathbb{C}$ , so sprechen wir von einer komplexwertigen Funktion in einer komplexen Variablen. Jede reellwertige Funktion kann auch als eine komplexwertige Funktion angesehen werden.

BEISPIEL 2.1. Beispiele für komplexwertige Funktionen in einer komplexen Variablen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind etwa die Exponentialfunktion, oder auch Sinus und Cosinus. Auch jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten kann man als komplexwertige Funktion in einer komplexen Variablen ansehen, etwa

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad f(z) = (9 - i)z^{12} + 3z - \sqrt{5}$$

In diesen Beispielen ist der Definitionsbereich  $D$  immer ganz  $\mathbb{C}$ , aber wir können diese Funktionen natürlich immer auf einen kleineren Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{C}$  einschränken. Eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $R > 0$  definiert eine Funktion

$$f: B(0, R) \rightarrow \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jetzt mit Definitionsbereich  $D = B(0, R)$ , die offene Kreisscheibe mit Radius  $R$ . Auch durch

$$f(z) = \Re(z), \quad f(z) = \Im(z), \quad \text{und} \quad f(z) = \bar{z}$$

werden komplexwertige Funktionen auf  $D = \mathbb{C}$  definiert. Komplexwertige Funktionen auf einem gemeinsamen Definitionsbereich kann man addieren und multiplizieren. Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion mit  $f(z) \neq 0$  für *alle*  $z \in D$ , so kann man auch durch  $f$  teilen. Zum Beispiel ist für  $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$  die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben durch  $f(z) = z^2 + 1$  nirgendwo Null, und es ist damit sinnvoll etwa durch

$$g(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$$

eine Funktion  $g: D \rightarrow \mathbb{C}$  zu definieren. Die selbe Formel die wir hier benützt haben um die Funktion  $g$  zu definieren können wir auch benutzen, um eine Funktion auf dem grösseren Definitionsbereich  $D = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$  zu definieren, aber wir können damit nicht eine komplexwertige Funktion auf  $D = \mathbb{C}$  beschreiben.

DEFINITION 2.2. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge. Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst *stetig im Punkt*  $z_0 \in U$ , falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $z \in U$  die Implikation

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

gilt. Wir sagen  $f$  sei *stetig auf*  $U$ , falls  $f$  stetig in jedem Punkt von  $U$  ist.

BEISPIEL 2.3. Alle Beispiele in 2.1 sind stetige Funktionen. Eine

DEFINITION 2.4. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge,  $z_0 \in U$  und  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Eine komplexe Zahl  $a$  nennt man den *Grenzwert von  $f$  in  $z_0$*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a,$$

falls es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $r = r(\epsilon) > 0$  gibt, mit

$$B(z_0, r) \subseteq U \quad \text{und} \quad |f(z) - a| < \epsilon$$

für alle in  $z \in B(z_0, r)$  mit  $z \neq z_0$ .

BEMERKUNG 2.5. Wir bemerken, dass man eine komplexwertige Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$  immer als Summe  $u + w$  für reellwertige Funktionen  $u = \Re(f)$  und  $v = \Im(f)$  schreiben kann, wobei  $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ . Man kann dann leicht verifizieren, dass, wie für Folgen

$$(2.1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \Re(f(z)) = \Re(a) \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \Im(f(z)) = \Im(a)$$

Man merkt, dass der Unterschied zwischen der Stetigkeit im Punkt  $z_0 \in U$  und der Existenz des Grenzwertes in  $z_0 \in U$  darin besteht, dass der Limes  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  auch dann existiert, wenn die Funktion im  $z_0$  nicht unbedingt definiert ist.

BEMERKUNG 2.6. Es ist einfach zu sehen, dass  $f$  in  $z_0$  stetig ist genau dann, wenn die folgende drei Eigenschaften gelten:

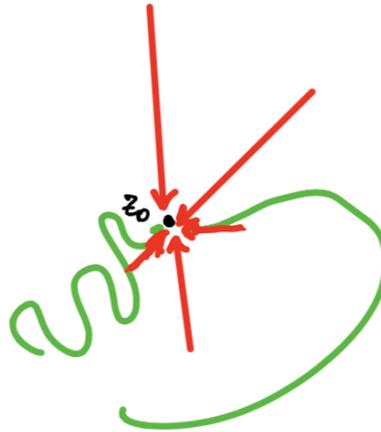
- (1) Der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existiert;
- (2) Die Funktion  $f$  ist in  $z_0$  definiert;
- (3) Für den Grenzwert gilt die Gleichheit  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Manchmal schreiben wir einfach

$$f \text{ ist stetig im Punkt } z_0 \iff \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

weil die Eigenschaften (1) und (2) auf der rechten Seite verstanden werden.

BEMERKUNGEN 2.7. (1) Der Radius  $r$  in den Definitionen 2.2 und 2.4 übernimmt die Rolle von  $\delta$  in den entsprechenden Definitionen in  $\mathbb{R}$ . Der Hauptunterschied zu den Definitionen in  $\mathbb{R}$  besteht darin, dass es nicht nur zwei sondern viel mehrere Richtungen gibt, um den Punkt  $z_0$  zu erreichen.

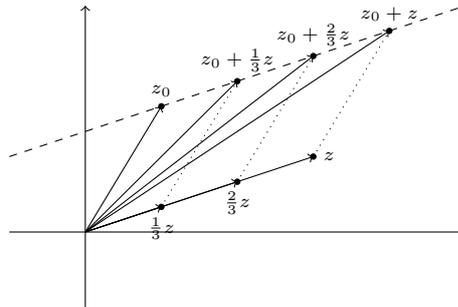


Der Grenzwert existiert, falls er unabhängig von der Richtung ist.

- (2) Wie für eine Funktion in einer Variable heisst konkret Stetigkeit, dass die Funktion keine “Sprüngen” macht.
- (3) Fall die Funktion  $f$  in  $z_0$  stetig ist, dann gilt für jedes  $z \neq 0$

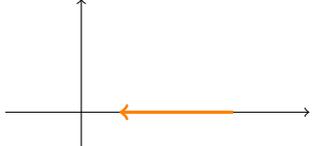
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(z_0 + tz) = f(z_0)$$

für  $t > 0$ . Wir werden sehr oft das Kontrapositive<sup>1</sup>dieser Aussage verwenden. Das heisst, wenn wir zwei Richtungen finden, in denen die Grenzen nicht gleich sind, ist die Funktion nicht stetig. Hier ist  $z_0 + tz$  die Gerade durch  $z_0$  mit Richtung  $z \in \mathbb{C}$ .



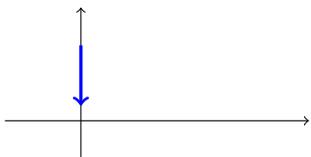
BEISPIEL 2.8. Wir betrachten die Funktion  $f(z) := \frac{\Re(z)}{|z|}$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  definiert. Diese Funktion ist im Ursprung nicht stetig, weil sie dort nicht definiert ist. Können wir  $f$  in  $z = 0$  definieren, damit die neue Funktion stetig ist? Anders gesagt, existiert der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ ?

<sup>1</sup>Seien  $A$  und  $B$  Aussagen. Das Kontrapositive der Aussage  $A \Rightarrow B$  ist  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ . Dann ist  $A \Rightarrow B$  genau dann, wenn  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ .

(1) 

Entlang der  $x$ -Achse gilt  $z = x$ :

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re(z)}{|z|} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

(2) 

Entlang der  $y$ -Achse gilt  $z = iy$ :

$$(2) \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Re(z)}{|z|} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Daraus folgt, dass die Funktion  $f$  im Ursprung nicht stetig ist und sie kann auch nicht stetig fortgesetzt werden.  $\square$

## 2.1. Ableitung komplexwertiger Funktionen

DEFINITION 2.9. Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Wir sagen, dass  $f$  *ableitbar* oder  *$\mathbb{C}$ -differenzierbar* in  $z_0 \in U$  ist, falls

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall ist  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  die *Ableitung von  $f$  an der Stelle  $z_0$*  und wir schreiben

$$(2.2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \text{oder} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{df}{dz}(z_0).$$

Die komplexwertige Funktion  $z \mapsto f'(z)$  ist die Ableitung von  $f$ .

BEMERKUNG 2.10. In der Analysis in einer Variable sieht man, dass eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *an der Stelle  $z_0$  differenzierbar* heisst, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall ist der Grenzwert die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Falls  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kann man die *partielle Ableitungen* von  $f$  betrachten: eine partielle Ableitung zu berechnen bedeutet, dass wir jeweils nur eine Variable als solche betrachten und die andere als Konstante. Zum Beispiel gilt für  $f(x, y) := xy \sin x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y \sin x + xy \cos x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \sin x. \end{aligned}$$

Die Funktion, die der Ableitung in einer Variablen entspricht, ist jedoch allgemeiner und heisst *total Ableitung*. Sie ist eine lineäre Funktion  $Df(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , die, unter geeigneten Hypothesen, mithilfe der partielle Ableitungen beschrieben werden kann. In diesem Fall sagen wir, dass die Funktion  $\mathbb{R}$ -*differenzierbar* ist.

Wir werden sehen, dass  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit ist viel stärker als  $\mathbb{R}$ -Differenzierbarkeit.

Falls wir  $z - z_0 = \Delta z$  setzen, ist  $z = z_0 + \Delta z$  und  $z \rightarrow z_0$  genau dann, wenn  $\Delta z \rightarrow 0$ . Wir können deshalb (2.2) so schreiben

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

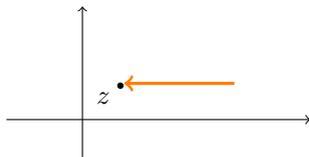
BEISPIEL 2.11. Wir berechnen die Ableitung von  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $f(z) := \frac{1}{z}$  und  $U := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Mit der obigen Schreibweise

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{z + \Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{z - (z + \Delta z)}{(z + \Delta z)z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-1}{(z + \Delta z)z} = -\frac{1}{z^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Die Funktion ist für alle  $z \in \mathbb{C}$  differenzierbar und  $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ . □

BEISPIEL 2.12. Wir berechnen die Ableitung von  $f(z) = \bar{z}$ .

$$(2.3) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

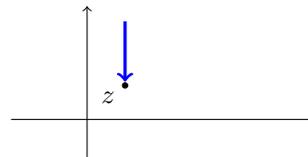


Entlang der  $x$ -Achse gilt  $\Delta z = \Delta x$  und (2.3) wird:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Entlang der  $y$ -Achse gilt  $\Delta z = i\Delta y$  und (2.3) wird:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{\Delta y} = -i.$$



Die Funktion  $f(z)$  ist nirgendwo  $\mathbb{C}$ -differenzierbar. Wir werden später sehen, weil das nicht überraschend ist.

Die partielle Ableitungen der Funktion  $f(z) = \bar{z}$  sind sehr einfach zu berechnen. Da  $f(x + iy) = x - iy$ , gilt für jedes  $z \in \mathbb{C}$

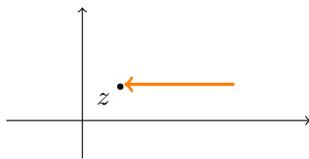
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -i.$$

Die partielle Ableitungen existieren und sind überall auch stetig. □

BEISPIEL 2.13. Wir möchten die  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit der Funktion  $f(z) := |z|^2 = z\bar{z}$  untersuchen.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)\overline{(z + \Delta z)} - z\bar{z}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z\bar{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z\bar{z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z\bar{z}}{\Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z} \right).
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

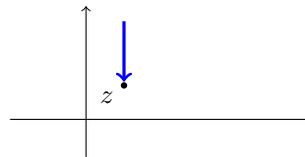
Entlang der  $x$ -Achse gilt  $\Delta z = \Delta x$  und (2.4) wird:



$$\begin{aligned}
 &\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z} \right) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (z + \bar{z} + \Delta x) \\
 &= z + \bar{z}.
 \end{aligned}$$

Entlang der  $y$ -Achse gilt  $\Delta z = i\Delta y$  und (2.4) wird:

$$\begin{aligned}
 &\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z} \right) \\
 &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} (-z + \bar{z} - i\Delta y) \\
 &= -z + \bar{z}.
 \end{aligned}$$



Dar-

aus folgt, dass die Grenzwerte entlang der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse sind gleich genau dann, wenn  $z = 0$ , d.h.  $f(z) = |z|^2$  ist für  $z \neq 0$  nicht  $\mathbb{C}$ -differenzierbar.

Wir werden uns jetzt ansehen, was an der Stelle  $z = 0$  passiert.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{\Delta z} = 0.$$

Daraus folgt, dass  $f$  an der Stelle  $z = 0$   $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist und  $f'(0) = 0$ . □

BEMERKUNG 2.14. Wir können aus dem Beispiel 2.13 einige Bemerkungen ableiten.

- (1) Es kann sein, dass eine Funktion  $f$  nur in einem Punkt  $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.
- (2) Wir können die Funktion  $f$  in Beispiel 2.13 als  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  mit  $u(x, y) = x^2 + y^2$  und  $v(x, y) = 0$  schreiben. Es ist deshalb klar, dass  $f$  überall stetige partielle Ableitungen besitzt, aber  $f$  ist nicht  $\mathbb{C}$ -differenzierbar.

Der folgende Satz gibt eine teilweise Umkehrung zu der obigen Aussage:

SATZ 2.15. Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine an der Stelle  $z_0 \in U$   $\mathbb{C}$ -differenzierbare Funktion. Dann ist  $f$  an der Stelle  $z_0$  stetig.

BEWEIS: Wir werden zeigen, dass  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , d.h., dass  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0$ . Eigentlich gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} (z - z_0) \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \\ &= f'(z_0) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass wir die  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit der Funktion in  $(*)$  benützt haben. Eigentlich gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} (z - z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) - f(z_0))}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)$$

nur falls beide Grenzwerte existieren. □

BEISPIELE 2.16.

$$\begin{aligned} f(z) = c \in \mathbb{C} &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0 \Rightarrow f'(z) = 0, \\ f(z) = z &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1 \Rightarrow f'(z) = 1, \\ f(z) = z^2 &\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0 \Rightarrow f'(z) = 2z. \end{aligned}$$

□

Es wäre sehr unpraktisch, die Ableitung jeder Funktion unter Verwendung der Definition berechnen zu müssen. Glücklicherweise gelten für Funktionen einer komplexen Variablen die gleichen Regeln wie für die Funktion einer reellen Variablen. Die folgende Rechenregeln kann man auch wie im  $\mathbb{R}$ -Fall beweisen: :

RECHENREGELN. Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  und  $f, g$   $\mathbb{C}$ -differenzierbar. Dann gilt

(1) Linearität:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g';$$

(2) Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

(3) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

für jedes  $z$  mit  $g(z) \neq 0$ ;

(4) Kettenregel:

$$(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$$

für  $g$   $\mathbb{C}$ -differenzierbar in  $z$  und  $f$   $\mathbb{C}$ -differenzierbar in  $g(z)$ ,

(5)

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1},$$

für jedes  $z$  innerhalb des Konvergenzradius.

BEISPIELE 2.17.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \Rightarrow f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1},$$

$$f(z) = \sin(z) \Rightarrow f'(z) = \cos(z),$$

$$f(z) = \cos(z) \Rightarrow f'(z) = -\sin(z),$$

$$f(z) = \exp(z) \Rightarrow f'(z) = \exp(z),$$

$$f(z) = \operatorname{Log}(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

□

DEFINITION 2.18. (1) Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst *holomorph auf  $U$*  falls sie auf dem ganzen  $U$   $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.

(2) Eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  heisst *holomorph in  $z_0 \in U$* , falls sie in einem offenen Menge um  $z_0$  holomorph ist.

Die Funktion in Beispiel 2.13 ist nicht holomorph im Ursprung, weil die Funktion nur im Ursprung  $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.

BEMERKUNG 2.19. Falls die Definition der Funktion  $\bar{z}$  enthält, ist die Funktion **nie** holomorph. (Sehen Sie die Beispiele 2.12 und 2.13.)

BEMERKUNGEN 2.20. i) Der Name holomorph kommt aus Griechisch:

(a) “ $\acute{o}\lambda o\varsigma$ ” [holos]=ganz

(b) “ $\mu o\rho\varphi\eta$ ” [morfé]= Form, Gestalt

Aus diesem Grund nennt Man *ganze<sup>2</sup> Funktion* eine Funktion, die holomorph auf der ganzen Komplexe Ebene ist.

iii) Holomorph für eine komplexwertige Funktion ist das pendant von  $\mathbb{R}$ -differenzierbar für eine reellewertige Funktion, aber zeigt sich als ganz starke Eigenschaft. Insbesondere werden wir sehen, dass eine holomorphe Funktion beliebig oft  $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist und sie lässt sich in einer Potenzreihe entwickeln (d.h. analytisch).

<sup>2</sup>“Entire function” auf Englisch, “fonction entière” auf Französisch und “funzione intera” auf Italienisch.

## 2.2. Die Cauchy–Riemann Gleichungen

In diesem Abschnitt werden wir lernen, was die Konsequenzen sind von "holomorph sein", wie stark diese Eigenschaft im Vergleich zu reell-differenzierbar ist und wie man sie leicht nachweisen kann.

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subset \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, d.h.

$$(2.5) \quad f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert für jedes  $z_0 \in U$  und insbesondere sind die Grenzwerte entlang der  $x$ -Ache und der  $y$ -Achse gleich

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y}.$$

Betrachten wir nun diese beide Grenzwerte etwas genauer:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + v(x_0 + \Delta x, y_0) - (u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) + v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ &= u_x(x_0, y_0) + v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \frac{1}{i}(u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)) \\ &= -i u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Da diese beide Grenzwerte gleich sein sollten, erhalten wir noch einmal aus (2.1):

$$(2.6) \quad \boxed{\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}}$$

Dies sind die sogenannten Cauchy–Riemann Gleichungen und damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

**SATZ 2.21.** Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion und nehme an, dass  $f'(z)$  für einer beliebigen  $z_0 \in U$  existiert. So existieren die partiellen Ableitungen  $u_x, u_y, v_x, v_y$  an der Stelle  $z_0$  und erfüllen die Cauchy–Riemann Gleichungen (CRG), d.h.

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) &= -u_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Zudem gilt:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(z_0) + v_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\ &= v_y(z_0) - u_y(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0). \end{aligned}$$

**BEISPIEL 2.22.** Sei  $f(z) = z^3$ , sodass  $f'(z) = 3z^2$ . Wir können  $f(z)$  als  $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3$  schreiben und die partielle Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 + 6ixy = 3z^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -6xy + 3ix^2 - 3iy^2 = 3iz^2, \end{aligned}$$

die (2.7) entsprechen.

**2.2.1. Reell-Differenzierbarkeit versus komplex-Differenzierbarkeit.** Wie gesagt, ist die  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit viel stärker als die  $\mathbb{R}$ -Differenzierbarkeit. In diesem Abschnitt werden wir dies erklären und eine geometrische Charakterisierung der  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit geben.

Betrachten wir eine beliebige Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ; wie immer identifizieren wir  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  durch  $z = x + iy \mapsto (x, y)$ , und sei  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ .

Falls  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0) \in U$  reell-differenzierbar ist, ist die Ableitung von  $f$  eine lineare Abbildung

$$(2.8) \quad \begin{aligned} f'(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese kann eine beliebige reelle  $(2 \times 2)$ -Matrix sein. Falls die Funktion  $f$  an der Stelle  $z_0$  auch  $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist, darstellt die Matrix in (2.8) auch die Ableitung  $f'(z_0)$ . Falls die CRG gelten, nimmt die Matrix in (2.8) die Form

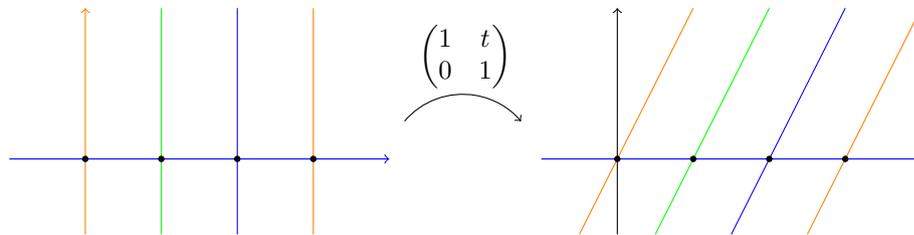
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

an, wobei  $a = u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$  und  $-b = u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$ . Man kann sehen, dass jede  $(2 \times 2)$  reelle Matrix (mit Determinante gleich 1) zu einer der folgenden konjugiert ist:

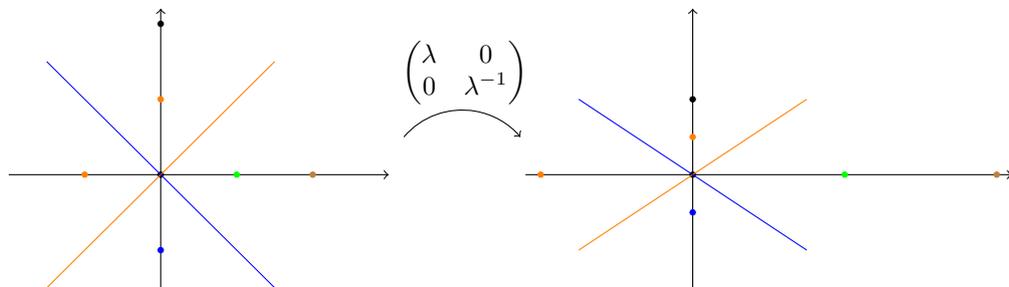
$$(2.9) \quad (i) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}; \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (iii) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

wobei  $a, b, t, \lambda \in \mathbb{R}$  und  $\lambda \neq 0$ .

- (i) In diesem Fall ist die Matrix eine Drehung der Winkel  $\theta$  um Ursprung, wobei  $a = \cos \theta$  und  $b = \sin \theta$ . Man kann einfach sich überzeugen, dass diese Matrix den Winkel zwischen zwei Geraden erhält.
- (ii) Die Matrix in (ii) eine Verschiebung entlang der  $x$ -Achse darstellt. Je grösser die  $y$ -Koordinate eines Punktes, desto grösser die Verschiebung. Die Geraden, die im Bild am Links senkrecht zur  $x$ -Achse waren, sind nach der Abbildung nicht mehr zur  $x$ -Achse senkrecht.



- (iii) Die Matrix in (iii) stellt eine Streckung entlang der  $x$ -Achse dar und eine Verlängerung entlang der  $y$ -Achse. Die zu einander senkrecht Geraden im Bild am Links sind nicht mehr senkrecht nach der Abbildung (am Rechts).



**DEFINITION 2.23.** (1) Eine lineare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) mit positiver Determinante heisst *konform*, falls sie winkeltreu ist (d.h. sie erhält den Winkel zwischen zwei Geraden).

(2) Eine differenzierbare Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (oder  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ) heisst *konform* falls die Ableitung in jedem Punkt winkeltreu ist.

Anders gesagt, erhält eine konforme Abbildung den Winkel zwischen der Tangenten zu zwei Kurven in der Ebene.

Wir haben bemerkt, dass eine  $\mathbb{R}$ -differenzierbare Funktion  $f$  auch  $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist genau dann, wenn ihre Ableitung eine konformale Abbildung ist.

**2.2.2. Zurück zu den Cauchy–Riemann Gleichungen.** Die Frage stellt sich, ob die Umkehrung des Satzes 2.21 gilt.

BEISPIEL 2.24. Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

definiert. Man kann leicht berechnen, dass

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{und} \quad v(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Daraus folgt, dass

$$u_x(0, 0) = v_y(0, 0) \quad \text{und} \quad u_y(0, 0) = -v_x(0, 0),$$

die Ableitung  $f'(0)$  existiert aber nicht.  $\square$

Dies soll als Motivation für den folgenden Satz dienen, den wir hier nicht beweisen. (Sie finden dies in der Literatur - eher technisch).

**SATZ 2.25.** Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  und sei  $z_0 \in U$ . Nehmen wir an, dass

- (1)  $u_x, u_y, v_x, v_y$  in einer offenen Menge um  $z_0$  existieren, und
- (2)  $u_x, u_y, v_x, v_y$  sind stetig in  $z_0$  und erfüllen die CRG in  $z_0$ .

Dann existiert  $f'(z_0)$ , d.h.  $f$  ist  $\mathbb{C}$ -differenzierbar in  $z_0$ .

Die Schlussfolgerung des Satzes gilt nur an der Stelle  $z_0$ . Es ist klar, dass falls die Hypothesen in (2) auf einer offenen Menge  $V \subset U$  gelten, ist die Funktion  $f$  auf  $V$  holomorph.

BEISPIEL 2.26. Wir betrachten noch einmal die Funktion  $f(z) := |z|^2$  im Beispiel 2.13. Da

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad v(x, y) = 0,$$

gilt

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x & v_x(x, y) &= 0 \\ u_y(x, y) &= 2y & v_y(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Die partielle Ableitungen  $u_x, u_y, v_x, v_y$  existieren in einer offenen Menge um  $z = 0$  (eigentlich überall) und sie sind dort stetig. Aber die CRG gelten nur im Ursprung. Daraus folgt, dass  $f'(z)$  nur für  $z = 0$   $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.  $\square$

Wir werden ein Paar wichtige Konsequenzen der CRG sehen, bevor wir den nächsten Begriff einleiten.

**KOROLLAR 2.27.** Sei  $f: B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$ .

- (1) Falls  $\Re(f) = u$  konstant ist, ist  $f$  konstant.
- (2) Sei  $g: B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  auch holomorph und sei  $\Re(f) = \Re(g)$ . Dann  $f = g + ic$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$ .

BEWEIS. (1) Da  $f$  holomorph ist, gelten die CRG, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= u_x = v_y \\ 0 &= u_y = -v_x. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $v$  unabhängig von  $x$  und von  $y$  ist, d.h.  $v$  ist konstant. Wegen der Voraussetzungen war  $u$  konstant, so dass  $f$  konstant ist.

(2) Sei  $h := f - g$ . Dann ist  $h$  auf  $B(z_0, R)$  holomorph und  $\Re(h) = 0$  (dann konstant). Aus (1) folgt, dass  $h$  auch konstant,  $f(z) - g(z) = \alpha \in \mathbb{C}$ , für jedes  $z \in B(z_0, r)$ . Da  $\Re(f) = \Re(g)$ , muss  $\alpha \in i\mathbb{R}$ .  $\square$

**KOROLLAR 2.28.** Seien  $f: B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph für  $z_0 \in \mathbb{C}$  und  $r > 0$ .

- (1) Falls  $\bar{f}: B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, ist  $f$  konstant.
- (2) Falls  $|f(z)|$  konstant ist, ist  $f(z)$  konstant.

BEWEIS. (1) Da  $f = u + iv$  holomorph ist, gelten die CRG

$$(2.10) \quad u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x.$$

Da  $\bar{f} = u + i(-v)$  auch holomorph ist, sind in diesem Fall die CRG

$$(2.11) \quad u_x = -v_y \quad \text{und} \quad u_y = -(-v)_x = v_x.$$

Aus (2.10) und (2.11) folgt, dass

$$u_x = 0 \quad \text{und} \quad u_y = 0,$$

sodass  $\Re(u)$  konstant ist. Aus dem Korollar 2.27 folgt, dass  $f$  konstant ist.

(2) Falls  $|f(z)| \equiv 0$ , ist  $f(z) \equiv 0$  und die Behauptung ist bewiesen. Wir nehmen deshalb an, dass  $|f(z)| = c \neq 0$ . Insbesondere ist  $f(z) \neq 0$  für jedes  $z \in B(z_0, r)$ . Aus  $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$  können wir deshalb

$$\overline{f(z)} = \frac{|f(z)|^2}{f(z)}$$

schreiben und  $\bar{f}$  ist holomorph. Aus (1) folgt, dass  $f$  konstant ist.  $\square$

**KOROLLAR 2.29.** Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

Wir haben hier die Ordnung der partiellen Ableitungen umtauscht. Dies sollte begründet werden: es folgt aus der unendlich oft  $\mathbb{C}$ -Differenzierbarkeit einer holomorphen Funktionen (Satz 2.55).  $\square$

DEFINITION 2.30. Eine Funktion  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U \subset \mathbb{R}^2$  und

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

heisst *harmonisch* auf  $U$ .

Harmonische Funktionen sind wichtig, weil sie Lösungen der Laplace Gleichung  $\Delta g = 0$  sind, wobei

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

der Laplace Operator ist. Der Laplace-Operator ist der Prototyp eines elliptischen Operators. Partielle Differentialoperatoren können als hyperbolisch, parabolisch und elliptisch klassifiziert werden, und jede Kategorie verfügt über Eigenschaften, die von allen PDE in dieser Kategorie gemeinsam genutzt werden. Beispielsweise hängt eine elliptische PDE nicht von der Zeit ab und ist typischerweise die stationäre Konfiguration einer parabolischen PDE.

### 2.3. Kurvenintegrale

DEFINITION 2.31. Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . So definiert man

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \Re(f(t)) dt + i \int_a^b \Im(f(t)) dt,$$

wobei die Integrale reell sind.

Wir möchten jetzt das Integral einer komplexwertigen Funktion auf einer Menge definieren, die nicht unbedingt gerade wie ein Intervall ist. Wir brauchen den Begriff vom "Pfad".

DEFINITION 2.32. (1) Ein *Pfad* ist eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ .

(2) Ein Pfad ist *einfach*, falls aus  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$  folgt, dass  $t_1 = t_2$  oder  $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$ .

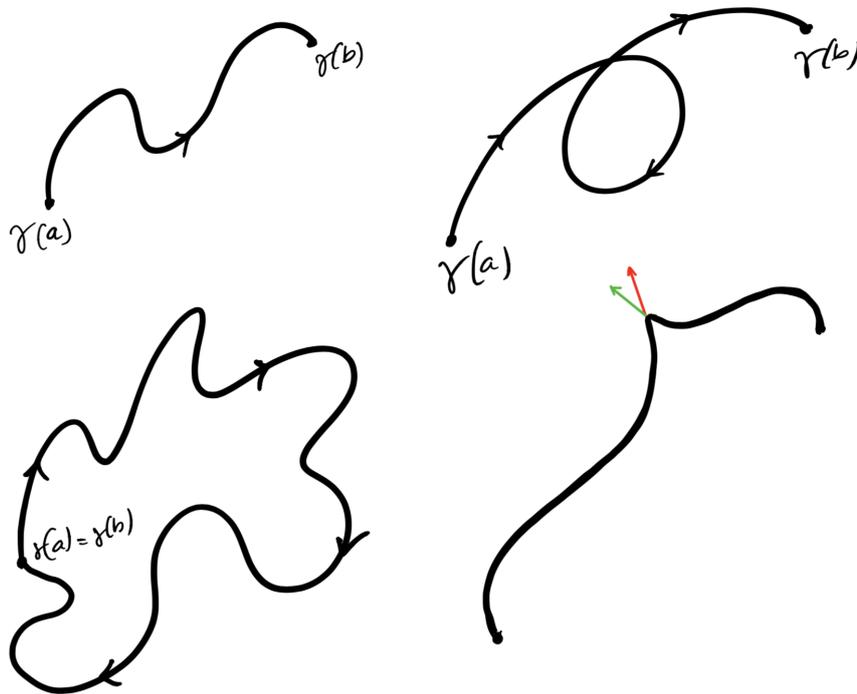


ABBILDUNG 1. Im Uhrzeigersinn von oben links: ein einfacher Pfad, ein nicht einfacher Pfad; ein nicht differenzierbarer einfacher Pfad und ein geschlossener Pfad.

- (3) Falls  $\gamma(a) = \gamma(b)$  heisst der Pfad *geschlossen*.  
 (4) Der Pfad ist *differenzierbar* auf  $(a, b)$ , falls

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

für jedes  $t \in (a, b)$  existiert. In diesem Fall heisst  $\gamma'(t_0)$  der *Tangentialvektor* zum Pfad  $\gamma$  an der Stelle  $\gamma(t_0) \in U$ .

Ein einfacher Pfad ist ein Pfad, der keine Selbstschnittpunkte hat.

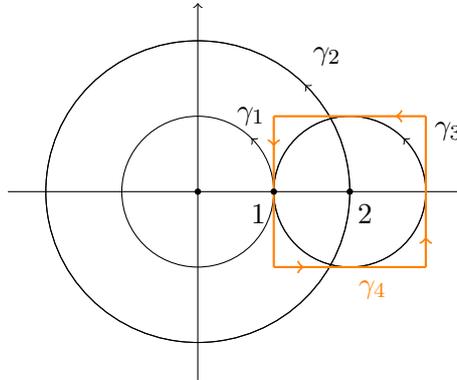
**BEMERKUNG 2.33.** Wir verwenden hier einen Terminologiemissbrauch. Der Pfad ist eine Kurve, das Bild von  $\gamma$ , zusammen mit einer Parametrisierung der Kurve. Es gibt viele verschiedene Parametrisierung einer Kurve. Wir unterscheiden nicht in unsere Schreibweise zwischen einer Kurve und ihrer Parametrisierung.

**BEISPIELE 2.34.** Wir betrachten die folgenden Kreise:

- (1)  $\gamma_1$  mit Zentrum im Ursprung und Radius  $r = 1$ ,
- (2)  $\gamma_2$  mit Zentrum im Ursprung und Radius  $r = 2$ ,
- (3)  $\gamma_3$  mit Zentrum in  $(2, 0)$  und Radius  $r = 1$

und

- (4) den roten Pfad  $\gamma_4$  im Bild.



- (i) Eine Parametrisierung von  $\gamma_1$  ist die Funktion  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , durch

$$\gamma_1(t) := \exp(2\pi it).$$

definiert. Die Funktion  $\delta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\delta(t) := \exp(2\pi it^2)$  ist auch eine Parametrisierung der selben Kurve. Die Geschwindigkeit eines Punktes, der sich gemäss der Parametrisierung  $\gamma_1$  entlang der Kurve bewegt, ist konstant, während ein Punkt, der die Kurve gemäss der Parametrisierung  $\delta$  durchläuft, langsamer am Anfang und dann schneller läuft.

- (ii) Eine Parametrisierung von  $\gamma_2$  ist die Funktion  $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma_2(t) := 2 \exp(2\pi it).$$

- (iii) Eine Parametrisierung von  $\gamma_3$  ist die Funktion  $\gamma_3: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\gamma_3(t) := 2 + \exp(2\pi it).$$

- (iv) Eine Parametrisierung von  $\gamma_4$  ist die Funktion

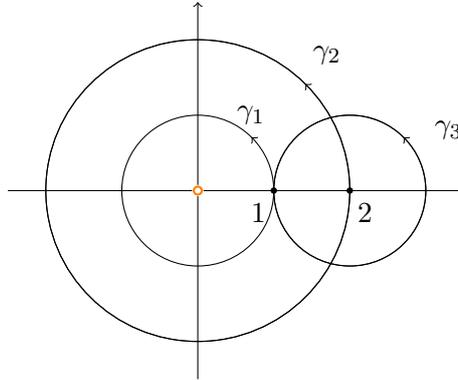
$$(2.12) \quad \gamma_4(t) := \begin{cases} 1 + 8t - i & t \in [0, \frac{1}{4}) \\ 3 + i(-3 + 8t) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ 7 - 8t + i & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ 1 + i(7 - 8t) & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

DEFINITION 2.35. Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$  differenzierbar. Wir definieren das *Kurvenintegral von  $f$  entlang  $\gamma$*  durch:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \Re(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt + i \int_0^1 \Im(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

BEMERKUNGEN 2.36. Diese Definition macht sogar noch Sinn wenn  $\gamma$  an endlich vielen Stellen nur stetig und nicht differenzierbar ist.

BEISPIELE 2.37. Betrachte  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Wir berechnen das Kurvenintegral von  $f$  entlang den Kurven im Beispiel 2.34 (1), (2) und (3).



(1) Falls  $\gamma_1(t) = \exp(2\pi it)$  ist  $\gamma_1'(t) = 2\pi i \exp(2\pi it)$  und

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^1 \frac{1}{\exp(2\pi it)} 2\pi i \exp(2\pi it) dt = 2\pi i.$$

(2) Falls  $\gamma_2(t) = 2 \exp(2\pi it)$  ist  $\gamma_2'(t) = 4\pi i \exp(2\pi it)$  und

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^1 \frac{1}{2 \exp(2\pi it)} 4\pi i \exp(2\pi it) dt = 2\pi i$$

(3) Falls  $\gamma_3(t) = 2 + \exp(2\pi it)$  ist  $\gamma_3'(t) = 2\pi i \exp(2\pi it)$  und

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} f(z) dz &= \int_0^1 \frac{2\pi i \exp(2\pi it)}{2 + \exp(2\pi it)} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 \frac{\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)}{2 + \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 \frac{[\cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)][2 + \cos(2\pi t) - i \sin(2\pi t)]}{(2 + \cos(2\pi t))^2 + \sin^2(2\pi t)} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 \frac{\cos(2\pi t)(2 + \cos(2\pi t)) + \sin^2(2\pi t)}{(2 + \cos(2\pi t))^2 + \sin^2(2\pi t)} dt \\ &\quad + 2\pi \int_0^1 \frac{\cos(2\pi t) \sin(2\pi t) - \sin(2\pi t)(2 + \cos(2\pi t))}{(2 + \cos(2\pi t))^2 + \sin^2(2\pi t)} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 \frac{2 \cos(2\pi t) + 1}{4 + 4 \cos(2\pi t)} dt - 2\pi \int_0^1 \frac{2 \sin(2\pi t)}{4 + 4 \cos(2\pi t)} dt \\ &= \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Um das Integral von  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf  $\gamma_4$  zu berechnen, brauchen wir die Eigenschaft (KI4) dieses Integrals.

EIGENSCHAFTEN. Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$  ein Pfad und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig:

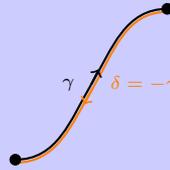
(KI1) Linearität: Sei  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\int_{\gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz.$$

(KI2) Sei  $\delta: [0, 1] \rightarrow U \subseteq \mathbb{C}$  durch  $\delta(t) := \gamma(1-t)$  definiert.

Dann ist

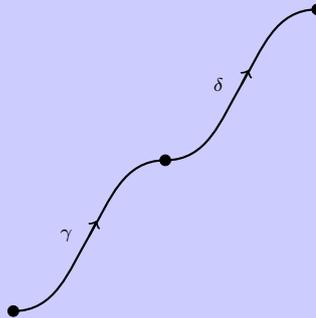
$$\int_{\delta} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$



Man schreibt  $\delta = \gamma^{-1}$  oder manchmal auch  $\delta = -\gamma$ .

(KI3) Sei  $\delta: [0, 1]$  ein Pfad mit  $\gamma(1) = \delta(0)$  und setze

$$(\gamma * \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \delta(2t-1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$



So gilt

$$\int_{\gamma * \delta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\delta} f(z) dz.$$

(KI4) Unabhängigkeit der Parametrisierung: Sei  $\sigma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine differenzierbare Funktion mit  $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$  und sei  $\delta: [0, 1] \rightarrow U$  durch  $\delta(t) := \gamma(\sigma(t))$  definiert. Anders gesagt, ist  $\delta$  eine andere Parametrisierung des Bildes von  $\gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\delta} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

BEWEIS. Der Beweis von (KI1) ist gleich dem Beweis für reelle Integrale.

(KI2)

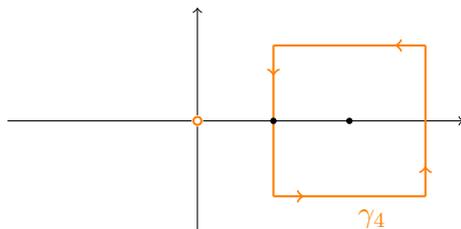
$$\begin{aligned}
\int_{\delta} f(z) dz &= \int_0^1 f(\delta(t)) \cdot \delta'(t) dt \\
&= \int_0^1 f(\gamma(1-t)) \cdot (-\gamma'(1-t)) dt \\
&= \int_1^0 f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau \\
&= - \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau \\
&= - \int_{\gamma} f(z) dz.
\end{aligned}$$

(KI3) Diese Eigenschaft folgt aus der Additivität des Integrales

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^c g(t) dt + \int_c^b g(t) dt.$$

(KI4)

$$\begin{aligned}
\int_{\delta} f(z) dz &= \int_0^1 f(\gamma(\sigma(t))) \cdot (\gamma(\sigma(t)))' dt \\
&= \int_0^1 f(\gamma(\sigma(t))) \cdot \gamma'(\sigma(t)) \sigma'(t) dt \\
&= \int_0^1 f(\gamma(\tau)) \cdot \gamma'(\tau) d\tau \\
&= \int_{\gamma} f(z) dz
\end{aligned}$$

wobei  $\tau = \sigma(t)$ ,  $d\tau = \sigma'(\tau) dt$ ,  $\tau(0) = 0$  und  $\tau(1) = 1$ . □BEISPIEL 2.38. Falls  $\gamma_4(t)$  ist durch (2.12) definiert

ist

$$\gamma_4'(t) = \begin{cases} 8 & t \in (0, \frac{1}{4}) \\ 8i & t \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \\ -8 & t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \\ -8i & t \in (\frac{3}{4}, 1) \end{cases}.$$

Falls  $f(z) := \frac{1}{z}$ , gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_4} f(z) dz &= \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{8}{1+8t-i} dt + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{8i}{3+i(-3+8t)} dt \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{-8}{7-8t+i} dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{-8i}{1+i(7-8t)} dt \\
&= 8 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1+8t+i}{(1+8t)^2+1} dt + 8i \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3-i(-3+8t)}{9+(-3+8t)^2} dt \\
&\quad - 8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{7-8t-i}{(7-8t)^2+1} dt - 8i \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1-i(7-8t)}{1+(7-8t)^2} dt \\
&= 8 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1+8t}{(1+8t)^2+1} dt + 8 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{(-3+8t)}{9+(-3+8t)^2} dt \\
&\quad - 8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{7-8t}{(7-8t)^2+1} dt - 8 \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{7-8t}{1+(7-8t)^2} dt \\
&\quad + i \left( 8 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{(1+8t)^2+1} dt + 8 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{9+(-3+8t)^2} \right. \\
&\quad \left. + 8 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{(7-8t)^2+1} dt - 8 \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{1}{1+(7-8t)^2} dt \right) \\
&= \dots \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Ist es wirklich nötig alle diese Rechnungen zu führen? Der folgende Satz gibt äquivalenten Aussagen, die diese Rechnungen vereinfachen.

**DEFINITION 2.39.** Eine Menge  $U$  heisst *wegzusammenhängend*, falls es für jede zwei Punkte  $z_1, z_2 \in U$  einen Pfad gibt, der die zwei Punkte verbindet.

**SATZ 2.40 (Die Stammfunktion).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene wegzusammenhängende Menge und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Für jede geschlossene Kurve  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .
- (ii) Das Kurvenintegral  $\int_{\delta} f(z) dz$  ist unabhängig vom Pfad  $\delta: [0, 1] \rightarrow U$ .
- (iii) Es gibt eine  $\mathbb{C}$ -differenzierbare Funktion  $F: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F'(z) = f(z)$ .

Falls eine (und deshalb jede) der Aussagen gilt, heisst die Funktion  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und

$$\int_{\delta} f(z) dz = F(\delta(1)) - F(\delta(0)).$$

BEWEIS. (iii)  $\Rightarrow$  (i) Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  eine geschlossene Kurve, d.h.  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Da  $F'(z) = f(z)$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 F'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (F(\gamma(t)))' dt \\ &= F(\gamma(t)) \Big|_0^1 \\ &= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0. \end{aligned}$$

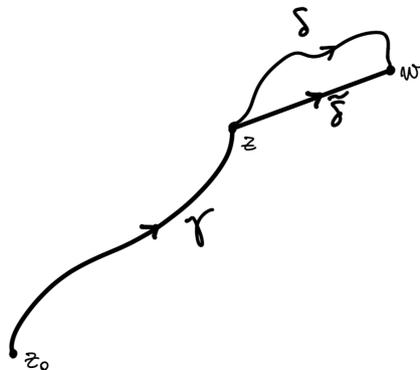
(i)  $\Rightarrow$  (ii) Seien  $\gamma, \delta: [0, 1] \rightarrow Y$  zwei Pfade mit  $\gamma(0) = \delta(0)$  und  $\gamma(1) = \delta(1)$ . Dann ist  $\gamma * \delta^{-1}$  eine geschlossene Kurve. Aus (i), (KI2) und (KI3) folgt, dass

$$0 = \int_{\gamma * \delta^{-1}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\delta^{-1}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\delta} f(z) dz.$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Wähle  $z_0 \in U$  und definiere

$$F_{z_0}(z) = \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$$

mit  $\gamma(0) = z_0, \gamma(1) = z$ . Aus (ii) folgt, dass  $F_{z_0}$  unabhängig vom Pfad  $\gamma$  ist und ist deshalb wohldefiniert. Wir behaupten, dass  $F'_{z_0}(z) = f(z)$ . Sei  $\delta$  eine beliebige Kurve von  $z$  nach  $z + w$ .



Es gilt:

$$\begin{aligned} F'_{z_0}(z) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{F'_{z_0}(z+w) - F'_{z_0}(z)}{w} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\int_{\gamma^* \delta} f(\xi) d\xi - \int_{\gamma} f(\xi) d\xi}{w} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\int_{\delta} f(\xi) d\xi}{w} \end{aligned}$$

Noch einmal aus (ii) können wir den Pfad  $\delta$  wählen, so dass das Integrals am einfachsten ist. Wählen wir deshalb  $\delta(t) := z + tw$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} F'_{z_0}(z) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\int_{\delta} f(\xi) d\xi}{w} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\int_0^1 f(z+sw) w ds}{w} \\ &= \int_0^1 \lim_{w \rightarrow 0} f(z+sw) ds \\ &= \int_0^1 f(z) ds \\ &= f(z), \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von  $f$  wurde im vorletzten Schritt benützt. Wir werden nicht beweisen, dass  $F_{z_0}$   $\mathbb{C}$ -differenzierbar ist.  $\square$

**BEMERKUNG 2.41.** Falls eine Stammfunktion einer Funktion  $f$  existiert, so ist sie bis auf eine Konstante  $c \in \mathbb{C}$  eindeutig definiert. Dies folgt aus der definierenden Eigenschaft einer Stammfunktion. Anders gesagt, falls  $F$  und  $G$  zwei Stammfunktionen von  $f(z)$  sind, gilt

$$F'(z) = f(z) \quad \text{und} \quad G'(z) = f(z).$$

Daraus folgt, dass

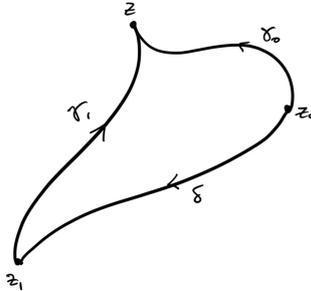
$$0 = F'(z) - G'(z) = (F - G)'(z),$$

so dass  $F(z) - G(z) = c$ , für  $c \in \mathbb{C}$ .

Falls die zwei Stammfunktionen wie im Satz definiert werden, kann man die Konstante bestimmen. Hätte man statt  $z_0 \in U$  einen anderen Startpunkt z.B.  $z_1 \in U$  gewählt, so gilt:

$$\begin{aligned} F_{z_0}(z) &= \int_{\gamma_0} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{\delta^* \gamma_1} f(\xi) d\xi \\ &= \int_{\delta} f(\xi) d\xi + \int_{\gamma_1} f(\xi) d\xi \\ &= c(z_0, z_1) + F_{z_1}(z), \end{aligned}$$

wobei  $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow U$ , mit  $\gamma_i(0) = z_i$  und  $\gamma_i(1) = z$  für  $i = 1, 2$  ist und  $\delta: [0, 1] \rightarrow U$  ist eine Kurve von  $z_0$  nach  $z_1$ . Die Konstante  $c(z_0, z_1)$  ist das Integral von  $f$  auf dem Pfad  $\delta$  und sie ist unabhängig von  $z$ .



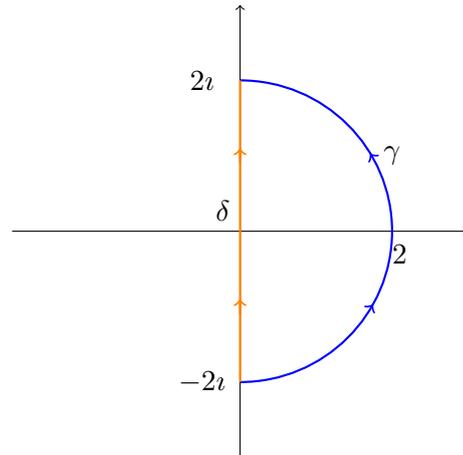
Es gibt natürlich Stammfunktionen, die nicht wie im Satz definiert werden.

BEISPIEL 2.42. Bestimme das Kurvenintegral von  $f(z) = \bar{z}$  auf

- (1)  $\delta(t) = it$  und  $-2 \leq t \leq 2$ , und
- (2)  $\gamma(t) = 2 \exp(it)$  und  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

Es ist einfach zu sehen, dass das Kurvenintegral von  $f(z) = \bar{z}$  entlang der Kurve  $\delta$  gleich null ist.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \bar{z} dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \overline{2 \exp(it)} \cdot (2 \exp(it))' dt \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(-it) \cdot i \exp(it) dt \\ &= 4i [t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi i. \end{aligned}$$



Das zeigt, dass das Integral von  $f$  abhängig vom Pfad ist.

Wir bemerken, dass auf  $\gamma$

$$4 = |z|^2 = z\bar{z} \Rightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$$

gilt. Daraus folgt, dass

$$4\pi i = \int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{\gamma} \frac{4}{z} dz,$$

so dass

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \pi i.$$

Es ist deshalb einfach zu zeigen, dass

$$\boxed{\int_{\delta} \frac{dz}{z} = 2\pi i},$$

wobei  $\delta(t) := 2 \exp(it)$  für  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ . Wir werden zurück zu diesem Integral kommen.  $\square$

BEISPIEL 2.43. Bestimme  $\int_{\gamma} z dz$  mit  $\gamma(0) = z_1$  und  $\gamma(1) = z_2$  beliebig.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \int_0^1 \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\gamma(t))^2 \\ &= \frac{1}{2} [\gamma(t)]_0^1 \\ &= \frac{z_2^2 - z_1^2}{2} \end{aligned}$$

Also ist dieses Integral unabhängig vom Weg  $\gamma$ .  $\square$

BEISPIEL 2.44. Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $f(z) := \frac{1}{z^2}$  definiert, wobei  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $f$  auf  $U$  stetig und wir behaupten, dass  $F(z) := -\frac{1}{z}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist. Anders gesagt, behaupten wir dass  $F'(z) = f(z)$  für jedes  $z \in U$ . Eigentlich gilt

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{z + \Delta z} - \frac{-1}{z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta z(z + \Delta z)z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{z(z + \Delta z)} \\ &= \frac{1}{z^2} \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Ähnlich kann man beweisen, dass  $F(z) := -\frac{1}{(n-1)z^{n-1}}$  eine Stammfunktion von  $f(z) = z^n$  für  $n \geq 2$  ist. An der anderen Seite haben wir im Beispiel 2.42 gesehen, dass  $f(z) = \frac{1}{z}$  keine Stammfunktion besitzt. Der Grund ist, dass die Stammfunktion von  $f(z) = \frac{1}{z}$  auf einer offenen Menge  $U$ , die den Ursprung nicht enthält, der Logarithmus ist. Die Halbachse nicht positiver reeller Zahlen besteht aber auf Unstetigkeiten des Logarithmus und deshalb kann der Logarithmus keine Stammfunktion von  $f$  auf  $U$  sein.

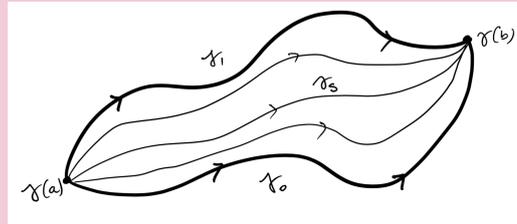
### 2.4. Der Satz von Cauchy (Cauchy'scher Integralsatz)

Die Frage stellt sich: Wann hat eine stetige Funktion eine Stammfunktion? Anders gesagt, wann ist das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} f(z)dz$  wegunabhängig? Bevor wir diese Frage beantworten können, brauchen wir einen kleinen Ausflug in die Topologie und einen Ausblick in die Vektoranalysis.

**DEFINITION 2.45.** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$  Pfade mit  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \alpha$  und  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \beta$ . Wir sagen  $\gamma_0$  sei *homotop* zu  $\gamma_1$ , falls es eine stückweise stetige Funktion  $H : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow U$  mit

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \gamma_0(t) & \forall t \in [0, 1] & \quad \text{und} & \quad H(s, 0) = \alpha \\ H(1, t) &= \gamma_1(t) & & & \quad H(s, 1) = \beta \quad \forall s \in [a, b] \end{aligned}$$

gibt. Die Funktion  $H$  ist die sogenannte *Homotopie* von  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ .



Die Idee der Definition von Homotopie ist, dass  $H$  den Pfad  $\gamma_0$  nach dem Pfad  $\gamma_1$  deformiert. Die Variable  $s$  ist ein Parameter und für jedes  $s \in [0, 1]$  ist  $\gamma_s(t) := H(s, t)$  ein Pfad von  $\alpha$  nach  $\beta$ .

**DEFINITION 2.46.** Eine Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{C}$  heisst *einfach zusammenhängend* falls sie wegzusammenhängend ist und für alle  $\alpha, \beta \in U$ , alle Pfade von  $\alpha$  nach  $\beta$  homotop zu einander sind.

**SATZ 2.47 (Cauchy'scher Integralsatz).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine einfach zusammenhängend offene Teilmenge und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Dann besitzt  $f$  eine Stammfunktion.

Der Satz 2.40 gibt äquivalenten Aussagen, es gibt aber keine Behauptung, dass die Aussagen wahr sind. Aber falls die Funktion  $f$  holomorph (und nicht nur stetig) ist und die Menge  $U$  einfach zusammenhängend (und nicht nur wegzusammenhängend) ist, dann ist die Aussage im Satz 2.40(iii) wahr. Daraus folgt, dass die anderen Aussagen sind auch wahr:

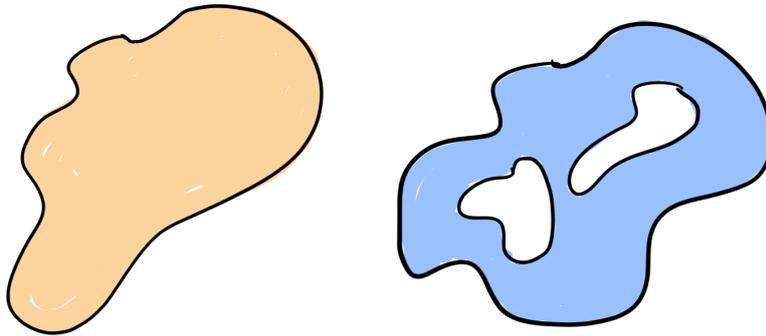


ABBILDUNG 2. Eine einfach zusammenhängende Menge an der linken Seite und eine nicht einfach zusammenhängende Menge an der rechten Seite.

**KOROLLAR 2.48.** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine einfach zusammenhängend offene Teilmenge und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion.

- (1) Sei  $\gamma$  ein geschlossener Pfad. Dann gilt:  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .
- (2) Das Kurvenintegral von  $f$  unabhängig vom Pfad ist.

Wie führen den Beweis auf den Satz von Gauss aus der Vektoranalysis zurück.

**2.4.1. Vektorfelder und Divergenz.** Sei  $\mathcal{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Vektorfeld auf  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  eine offene Menge. Man schreibt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  und

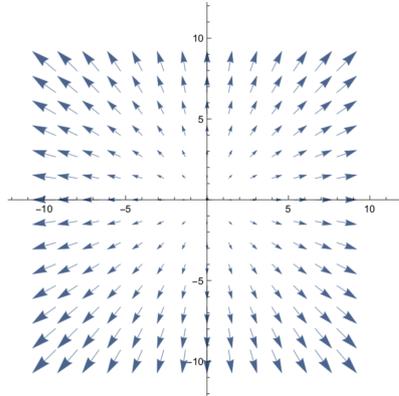
$$\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Man definiert die *Divergenz*  $\operatorname{div} \mathcal{F}: U \rightarrow \mathbb{R}$  eines Vektorfeldes durch

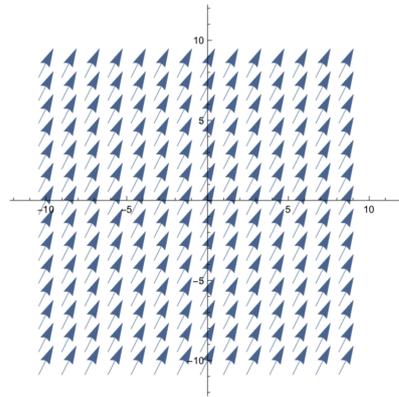
$$\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

**BEISPIELE 2.49.** Wir geben einige Beispiele, um eine Gefühl zu entwickeln:

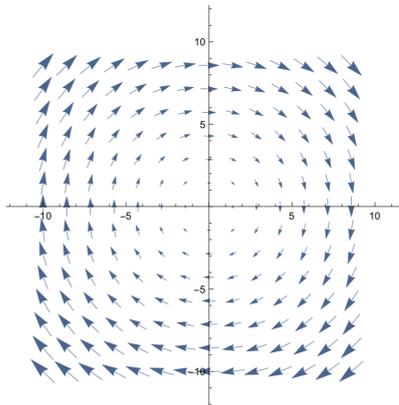
- (1) Falls  $\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ist  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) = 1 + 1 = 2 > 0$  konstant.



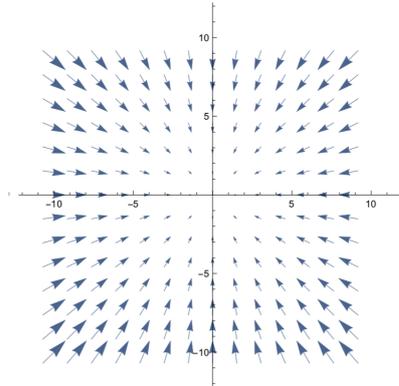
(2) Falls  $\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  ist  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) = 0 + 0 = 0$ .



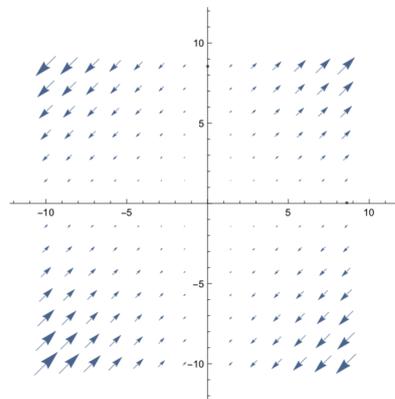
(3) Falls  $\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  ist  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) = 0 + 0 = 0$ .



(4) Falls  $\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$  ist  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) = -1 - 1 = -2 < 0$ .



(5) Falls  $\mathcal{F}(x, y) = \begin{pmatrix} xy \\ xy \end{pmatrix}$  ist  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) = y + x$ .



Zusammenfassend kann man festhalten:

- Falls  $\operatorname{div} \mathcal{F} > 0$ , wird ein Partikel, der sich entlang dem Vektorfeld  $F$  frei bewegt, positiv beschleunigt, d.h. sie wird sich schneller bewegen.
- Falls  $\operatorname{div} \mathcal{F} < 0$ , wird ein Partikel, der sich entlang dem Vektorfeld  $F$  frei bewegt, negativ beschleunigt, d.h. sie wird sich langsamer bewegen.

Man kann das Vektorfeld auch als Wasserfluss interpretieren:

- Falls  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) > 0$ , ist der Punkt  $(x, y)$  eine Quelle, d.h. der Punkt beiträgt zu einer Zunahme der Flüssigkeit;
- Falls  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) = 0$ , gibt es im Punkt  $(x, y)$  eine gleichmässige Strömung;
- Falls  $\operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) < 0$ , ist der Punkt  $(x, y)$  eine Senke, d.h. der Punkt beiträgt zu einer Abnahme der Flüssigkeit.

Wir betrachten jetzt nur Mengen, die einen endlichen Rand haben. Die intuitive Definition vom *Rand einer Menge* wird für uns genügen und wir werden nur beschränkte und abgeschlossene Mengen  $V$  mit stückweise glattem Rand betrachten. Eine Teilmenge  $V \subset \mathbb{R}^2$  heisst *kompakt*, falls sie die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

- (1)  $V$  ist abgeschlossen, d.h.  $\mathbb{R}^2 \setminus V$  ist offen, und

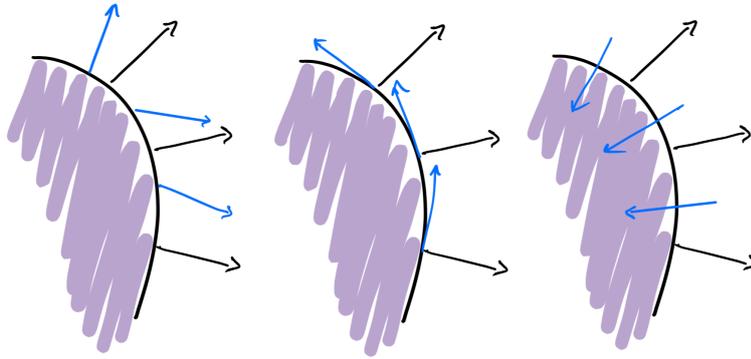


ABBILDUNG 3. Von links nach rechts: grosserer Fluss, kein Fluss und negativer Fluss

- (2)  $V$  ist beschränkt, d.h. es gibt ein  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  und ein  $r > 0$ , sodass  $V \subset B((x_0, y_0), r)$ .

Falls  $V \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$  eine kompakte Menge mit stückweise glattem Rand  $\partial V = S$  ist, können wir aus der obigen Diskussionen

$$\int_V \operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) dx dy = \text{Gesamte Volumenzunahme über das Gebiet } V$$

herleiten.

Die Rechterhand kann man natürlich auch messen, indem man misst wieviel Wasser über den Rand  $S$  von  $V$  fließt (Figure 3).

Um den Gesamtfluss zu berechnen muss man den Teil in der Richtung des Normalvektors über der Rand summieren, d.h. wir müssen auf den Normalvektor projizieren. Das bedeutet, dass wir das Skalarprodukt des Vektorfelds mit den Normalvektor berechnen müssen. Da die Richtung des Normalvektors statt seine Länge wichtig ist, berechnen wir das Skalarprodukt des Vektorfelds mit dem Einheitsnormalvektor.

**SATZ 2.50 (Satz von Green-Gauss).** Seien  $\mathcal{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Vektorfeld auf einem offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  und sei  $V \subset U$  eine kompakt Menge mit stückweise glattem Rand  $\partial V = S$ . Es gilt:

$$\int_V \operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) dx dy = \int_{S=\partial V} \mathcal{F}(s) \cdot n_S(s) ds,$$

wobei  $n_S$  der Einheitsnormalvektor an der Stelle  $s \in S = \partial V$  ist.

**BEMERKUNG 2.51.** Wenn  $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$  den Rand im positiven Sinne – d.h. in Gegenuhrzeigersinn – parametrisiert, so ist

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

die Tangente an der Stelle  $\gamma(t)$  und

$$N_s(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$$

ist der nach aussen zeigende Normalvektor. Da

$$ds = d\gamma(t) = \|\gamma'(t)\| dt$$

und

$$\|N_S(s)\| = \|\gamma'(t)\|,$$

gilt

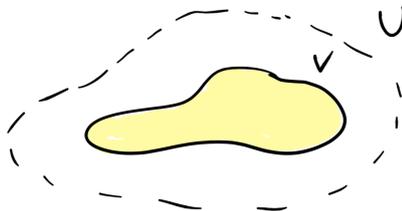
$$n_S(s) ds = \frac{N_S(s)}{\|N_S(s)\|} ds = \frac{N_S(s)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt = N_S(s) dt,$$

sodass

$$(2.13) \quad \int_S \mathcal{F}(s) \cdot n_S(s) ds = \int_0^1 \mathcal{F}(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt.$$

BEWEIS DES SATZES VON CAUCHY. Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,  $f(z) = u(z) + w(z)$ , sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und einfach zusammenhängend und sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  ein geschlossener Pfad,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . Wir müssen zeigen, dass  $\int_\gamma f(z) dz = 0$ .

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass  $\gamma$  ein Gebiet  $V$  einschliesst, d.h. dass  $\gamma$  einfach ist.



Wir werden zwei verschiedene Vektorfelder betrachten:

- (1) Mithilfe von  $F(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix}$  beweisen wir, dass  $\Im \left( \int_\gamma f(z) dz \right) = 0$ .
- (2) Mithilfe von  $F(x, y) := \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}$  beweisen wir, dass  $\Re \left( \int_\gamma f(z) dz \right) = 0$ .

Nach dem Satz von Gauss und (2.13) gilt

$$(2.14) \quad \int_V \operatorname{div} \mathcal{F}(x, y) dx dy = \int_0^1 \mathcal{F}(\gamma(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt.$$

- (1) Falls  $F(x, y) := \begin{pmatrix} u(x, y) \\ -v(x, y) \end{pmatrix}$ , liefert die rechte Seite von (2.14)

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} u(\gamma(t)) \\ -v(\gamma(t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \underbrace{u(\gamma(t))y'(t) + v(\gamma(t))x'(t)}_{\Im(f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))} dt = \Im \left( \int_{\gamma} f(z) dz \right).$$

Aus der linken Seite von (2.14) erhalten wir

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) dx dy \stackrel{(2.6)}{=} \int_V 0 dx dy = 0.$$

Mithilfe von diesen zwei letzten Berechnungen haben wir gezeigt, dass

$$\Im \left( \int_{\gamma} f(z) dz \right) = 0.$$

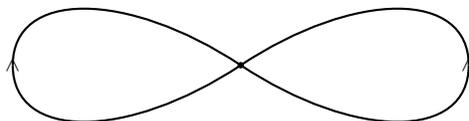
Wir bemerken, dass wir hier die Holomorphizität der Funktion  $f$  in der Form der Cauchy–Riemann Gleichungen benützt haben.

(2) Analog definiert man einen Vektorfeld  $\vec{F}(x, y) := \begin{pmatrix} v(x, y) \\ u(x, y) \end{pmatrix}$  wie in (2) und zeigt damit, dass

$$\Re \left( \int_{\gamma} f(z) dz \right) = 0.$$

□

BEMERKUNG 2.52. Wenn  $\gamma$  die Annahme nicht erfüllt, zum Beispiel wenn sich  $\gamma$  selbst schneidet, so kann man  $\gamma$  in Teilschlaufen aufteilen und dann funktioniert der Beweis.



Noch einige Eigenschaften, die wichtig im Folgenden sein werden.

EIGENSCHAFTEN. Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine wegzusammenhängende Menge, sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  ein Pfad und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig. Dann gilt

(KI5)

$$\left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| dt.$$

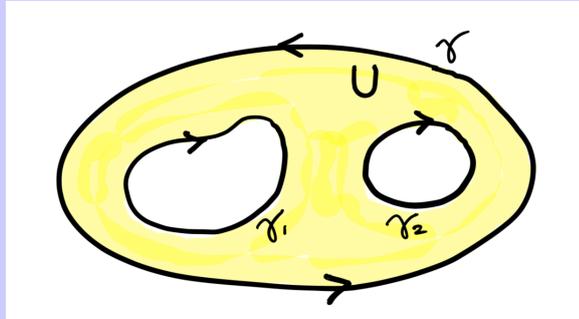
(KI6) Sei  $L$  die Länge von  $\gamma$ , d.h.  $L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ . Wenn  $|f(z)| \leq M$  für jedes  $z \in U$ , dann folgt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L.$$

(KI7) Sei

(a)  $\gamma$  eine geschlossene einfache im Gegenuhrzeigersinn orientierte Kurve und

- (b) seien  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  einfache geschlossene im Uhrzeigersinn orientierte Kurven, die innerhalb  $\gamma$  sind. Nehmen wir an, dass die Mengen, die diese Kurven einschliessen, keine Schnittpunkte mit einander haben.
- (c) Sei  $U$  die Menge von diesen Kurven definiert.

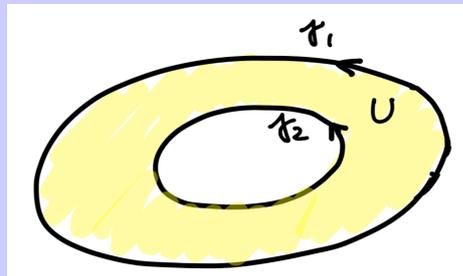


Falls  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz = 0.$$

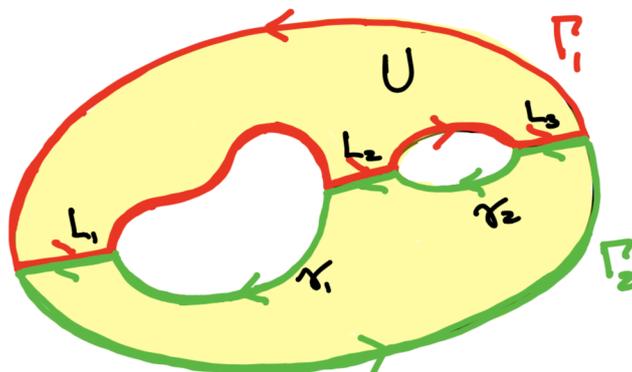
Insbesondere, seien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwei Kurven mit der gleichen Orientierung und sei  $U$  die Menge von dieser zwei Kurven definiert. Falls  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$



BEWEIS. (KI5) und (KI6) folgen aus den entsprechenden Eigenschaften eines reellen Integrales.

(KI7) Wir führen eine Geradestrecke  $L_1$  ein, um die äussere Kurve  $\gamma$  mit dem inneren  $\gamma_1$  zu verbinden. Wir führen eine weitere Geradestrecke  $L_2$  ein, um  $\gamma_1$  mit  $\gamma_2$  zu verbinden, und fahren auf diese Weise fort, wobei  $L_{n+1}$  die innere Kurve  $\gamma_n$  mit  $\gamma$  verbindet.



Wir betrachten die beiden einfachen geschlossenen Kurven  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ , die durch die Verkettung der Geradestrecke  $L_k$  oder  $L_k^{-1}$ , einer Stücke von  $\gamma$  und einer von  $\gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  definiert sind, so dass die Kurven im Gegenuhreigersinn verlaufen. Dann kann das Korollar des Satzes von Cauchy (Korollar 2.48) auf die Kurven  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  angewendet werden und jedes der Integrale verschwindet. Bei Anwendung von (KI2) und (KI3) erhalten wir, dass sich viele der Integrale aufheben und die Behauptung überprüft wird.  $\square$

## 2.5. Der Mittelwertsatz, das Maximum Prinzip und der Satz von Liouville

In diesem Abschnitt lernen wir verschieden Konsequenzen aus dem Satz von Cauchy kennen. Zuerst eine Variante der Integralformel:

**SATZ 2.53 (Cauchy'sche Integralformel).** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine einfach zusammenhängende offene Menge und  $z_0 \in U$ . Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U \setminus \{z_0\}$  eine Kurve, die  $z_0$  einmal im positiven Sinn umläuft. Dann gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$



BEWEIS. Da die Funktion  $f$  holomorph ist, ist sie insbesondere stetig. Daraus folgt, dass es für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

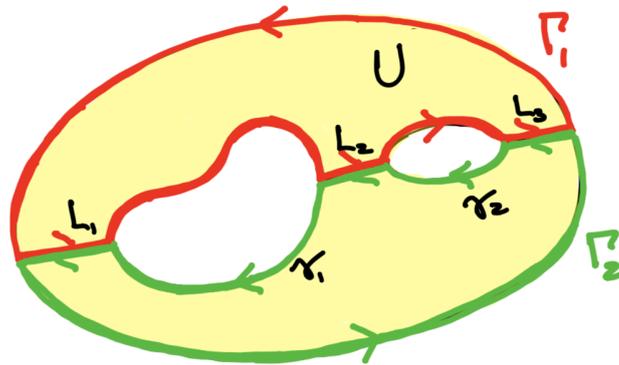
$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ für jedes } z \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Sei  $r > 0$  klein genug, so dass die Kurve  $\sigma [0, 1] \rightarrow U$ ,

$$\sigma(t) := z_0 + r \exp(2\pi i t)$$

in  $\gamma$  enthalten ist. Wir wählen auch  $r < \delta$ , so dass für jedes  $t \in [0, 1]$

$$(2.15) \quad |f(\sigma(t)) - f(z_0)| < \epsilon.$$



Da die Funktion  $\frac{f(z)}{z-z_0}$  auf dem grünen Gebiet holomorph ist, gilt aus (KI7)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Um den Satz zu beweisen, können wir deshalb das Integral auf  $\sigma$  berechnen. Wir schreiben

$$\int_{\sigma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \int_{\sigma} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz + \int_{\sigma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz$$

Wir werden zeigen, dass das erste Integral gleich  $2\pi i f(z_0)$  ist und das zweite gleich Null. Eigentlich gilt

$$\int_{\sigma} \frac{f(z_0)}{z-z_0} dz = f(z_0) \int_0^1 \frac{1}{z_0 + r \exp(2\pi i t) - z_0} 2\pi i r \exp(2\pi i t) dt = 2\pi i f(z_0).$$

Ausserdem

$$\left| \int_{\sigma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \int_{\sigma} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z-z_0|} dz \stackrel{(*)}{\leq} \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi \epsilon,$$

wobei wir in (\*) (2.15) und (KI6) benützt haben. Aber  $\epsilon$  ist beliebig, d.h. es kann so klein wie möglich gewählt sein. Daraus folgt, dass

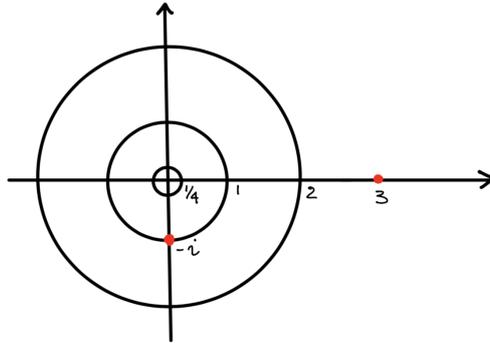
$$\left| \int_{\sigma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z-z_0} dz \right| = 0$$

und den Satz ist bewiesen.  $\square$

BEISPIEL 2.54. Seien  $\gamma(t) = 2 \exp(2\pi it)$ . Wir möchten

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz$$

berechnen.



Wegen des Satzes 2.53 mit

$$(2.16) \quad f(z) := \frac{z}{9 - z^2}$$

gilt

$$\int_{\gamma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \frac{-i}{9 - (-i)^2} = \frac{\pi}{5}.$$

Eine direkte Berechnung würde stattdessen

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - i} dz = \int_0^1 \frac{2 \exp(2\pi it)}{9 - 4 \exp(4\pi it)} \cdot \frac{2 \cdot 2\pi i \exp(2\pi it)}{2 \exp(2\pi it) - i} dt = \dots,$$

liefern. Wenn wir das Integral

$$\int_{\sigma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz$$

für  $\sigma(t) := \frac{1}{4} \exp(2\pi it)$  berechnen möchten, würde uns eine direkte Anwendung des Satzes von Cauchy geben, dass

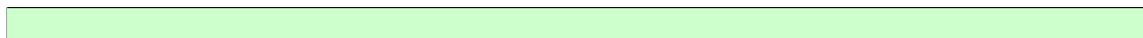
$$\int_{\sigma} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz = 0,$$

weil die Funktion in (2.16) innerhalb von  $\sigma$  holomorph ist. Auf der anderen Seite werden wir in § 3.2 sehen, wie man das Integral

$$\int_{\eta} \frac{z}{(9 - z^2)(z + i)} dz = 0$$

für  $\eta := 4 \exp(2\pi it)$  berechnen kann. □

Eine wichtige Konsequenz der Cauchy'sche Integralformel ist der folgende Satz:



SATZ 2.55. Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen, holomorph so ist  $f$  beliebig oft  $\mathbb{C}$ -differenzierbar und es gilt für  $z_0 \in U$  und  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  eine Kurve, die  $z_0$  einmal im Gegenuhrzeigersinn umrundet

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

BEWEIS. Den Satz kann durch Induktion bewiesen.

$\boxed{n=1}$  Da  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, existiert  $f'(z)$  in eine offene Menge um  $z$ . Wir möchten deshalb

$$(2.17) \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

beweisen, wobei  $\gamma \subset U$  eine geschlossene Kurve ist,  $\xi$  ist ein Parameter und  $z$  ist innerhalb von  $\gamma$ .

Mithilfe von Satz von Cauchy umformen wir die linke Seite von (2.17)

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{f(\xi)}{\xi - (z + \Delta z)} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right] \frac{d\xi}{\Delta z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cancel{\xi - z} - \cancel{\xi - z} + \cancel{z} + \Delta z}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)} \frac{f(\xi)}{\Delta z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) \cancel{\Delta z}}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z) \cancel{\Delta z}} d\xi. \end{aligned}$$

Wegen (2.18) ist (2.17) zu

$$(2.19) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{1}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right] f(\xi) d\xi = 0$$

äquivalent. Wir werden zeigen, dass

$$(2.20) \quad \left| \frac{1}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right| \leq C_1(\Delta z).$$

wobei

$$(2.21) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} C_1(\Delta z) = 0.$$

Nehmen wir an, dass wir (2.20) und (2.21) bewiesen haben und schauen wir am Ende des Beweises. Da  $f$  holomorph und deshalb stetig auf  $\gamma$  ist, ist  $f$  auf  $\gamma$  beschränkt. Anders gesagt gibt es ein  $M \geq 0$  mit  $|f(\xi)| \leq M$  für jedes  $\xi$  auf der Kurve  $\gamma$ . Sei  $L$  die Länge von

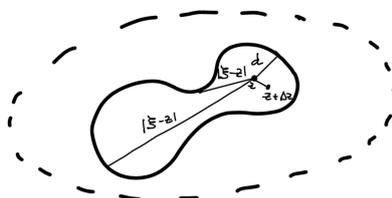
$\gamma$ . Aus (KI6), (2.20) und (2.21) wird (2.19)

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{1}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right] f(\xi) d\xi \right| \\ & \leq \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{1}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right| |f(\xi)| d\xi \\ & \leq \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} M \cdot L \cdot C_1(\Delta z) = 0, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Um den Beweis für  $n = 1$  abzuschliessen, müssen wir (2.20) und (2.21) beweisen. Sei

$$d := \min_{\xi \in \gamma} |\xi - z|,$$



so dass  $d \leq |\xi - z|$  und

$$(2.22) \quad \frac{1}{|\xi - z|} \leq \frac{1}{d}$$

für jedes  $\xi$  auf  $\gamma$ . Ausserdem folgt aus der Dreiecksungleichung

$$(2.23) \quad |a - b| \geq ||a| - |b||,$$

dass

$$|\xi - z - \Delta z| \geq ||\xi - z| - |\Delta z|| \geq |d - |\Delta z|| = d - |\Delta z|.$$

so dass

$$(2.24) \quad \frac{1}{|\xi - z - \Delta z|} \leq \frac{1}{d - |\Delta z|}.$$

Aus der linken Seite von (2.20) und mithilfe von (2.22) und (2.24) folgt, dass

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right| &= \left| \frac{\cancel{\xi} - \cancel{z} - (\cancel{\xi} - \cancel{z} - \Delta z)}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\Delta z}{(\xi - (z + \Delta z))(\xi - z)^2} \right| \\ &= \frac{|\Delta z|}{|(\xi - (z + \Delta z))| \cdot |(\xi - z)^2|} \\ &\leq \frac{|\Delta z|}{(d - |\Delta z|)d^2} =: C_1(\Delta z) \end{aligned}$$

Wir haben  $C_1(\Delta z)$  gefunden und es ist offensichtlich, dass (2.21) gilt.

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$  Wir werden nur die Teile des Beweises zeigen, die sich vom Fall  $n = 1$  unterscheiden. Die anderen bleiben dem Leser überlassen. Wegen der Induktionvoraussetzung wissen wir, dass

$$(2.25) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Wir möchten daher herleiten, dass

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi.$$

WARNUNG. Wir wissen auch, dass

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

aber der Versuch, Induktion aus dieser Formel zu verwenden, führt nirgendwo hin.

Da  $f^{(n)}: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, existiert  $f^{(n+1)}(z)$  in eine offene Menge um  $z$ . Mithilfe von (2.25) schreiben wir

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(z + \Delta z) - f^{(n)}(z)}{\Delta z} &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{f(\xi)}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1}} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right] \frac{d\xi}{\Delta z} \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\xi - z)^{n+1} - (\xi - (z + \Delta z))^{n+1}}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1}(\xi - z)^{n+1}} \frac{f(\xi)}{\Delta z} d\xi \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\xi - z)^{n+1} - \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n+1-j}}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1}(\xi - z)^{n+1}} \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n+1-j} f(\xi)}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1}(\xi - z)^{n+1} \Delta z} d\xi \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die Binomialformel

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}$$

benützt haben, die in diesem Fall wird

$$(2.26) \quad (\xi - z + \Delta z)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n+1-j}.$$

Ähnlich wie in (2.19) möchten wir

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n-j}}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1}(\xi - z)^{n+1}} - \frac{n+1}{(\xi - z)^{n+2}} \right] f(\xi) d\xi = 0$$

beweisen. Wir müssen nur überprüfen, dass die entsprechende zu (2.20) und (2.21) Formel gelten. Anders gesagt müssen wir schauen, dass

$$\left| \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n-j}}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1}(\xi - z)^{n+1}} - \frac{n+1}{(\xi - z)^{n+2}} \right| \leq C_n(\Delta z),$$

mit

$$(2.27) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} C_n(\Delta z) = 0.$$

Eigentlich gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n-j}}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1} (\xi - z)^{n+1}} - \frac{n+1}{(\xi - z)^{n+2}} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (\xi - z)^{j+1} \Delta z^{n-j} - (n+1)(\xi - z - \Delta z)^{n+1}}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1} (\xi - z)^{n+2}} \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} (\xi - z)^{j+1} \Delta z^{n-j} + \left[ \binom{n+1}{n} (\xi - z)^{(n+1)} - (n+1)(\xi - z - \Delta z)^{n+1} \right]}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1} (\xi - z)^{n+2}} \right| \\ &= \left| \frac{\Delta z \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} (\xi - z)^{j+1} \Delta z^{n-1-j} + \left[ \binom{n+1}{n} (\xi - z)^{(n+1)} - (n+1)(\xi - z - \Delta z)^{n+1} \right]}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1} (\xi - z)^{n+2}} \right| \\ &\leq \left| \Delta z \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} (\xi - z)^{j+1} \Delta z^{n-1-j}}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1} (\xi - z)^{n+2}} \right| + \left| \frac{\left[ \binom{n+1}{n} (\xi - z)^{(n+1)} - (n+1)(\xi - z - \Delta z)^{n+1} \right]}{(\xi - (z + \Delta z))^{n+1} (\xi - z)^{n+2}} \right| =: C_n(\Delta z). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist nicht so offensichtlich, dass (2.27) gilt. Wir wissen aber, dass

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\xi - (z + \Delta z))^{n+1} (\xi - z)^{n+2} = (\xi - z)^{2n+3}$$

und

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ \binom{n+1}{n} (\xi - z)^{(n+1)} - (n+1)(\xi - z - \Delta z)^{n+1} \right] \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[ (n+1)(\xi - z)^{(n+1)} - (n+1) \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n+1-j} \right] \\ &= - (n+1) \sum_{j=0}^n \binom{n+1}{j} (\xi - z)^j \Delta z^{n+1-j} \\ &= 0, \end{aligned}$$

weil der kleinste Exponent von  $\Delta z$  in der Formel beträgt 1. Daraus folgt, dass der rechte Term in der Definition von  $C_n$  nach 0 geht. Da

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} (\xi - z)^{j+1} \Delta z^{n-1-j}$$

beschränkt ist, geht nach 0 auch der linke Term in der Definition von  $C_n$  und (2.27) ist deshalb verifiziert.  $\square$

**KOROLLAR 2.56.** Sei  $f$  holomorph. Dann sind alle Ableitungen  $f^{(n)}$  auch holomorph. Falls  $u := \Re(f)$  und  $v := \Im(f)$ , besitzen auch  $u$  und  $v$  unendlich viele partielle Ableitungen.

BEISPIEL 2.57. Sie  $\gamma$  eine geschlossene Kurve, die den Ursprung einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft. Um das Integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$  zu berechnen, schreiben wir

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

wobei  $f(z) \equiv 1$ . Aus dem Satz 2.55 erhalten wir

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \begin{cases} 2\pi i & n = 0 \\ 0 & n \geq 1. \end{cases}$$

□

Wir betrachten noch einige weitere wichtige Konsequenzen:

SATZ 2.58 (Mittelwertsatz). Seien  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Menge und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Seien  $z_0 \in U$  und  $r > 0$  so dass  $\overline{B(z_0, r)} \subseteq U$ . Dann gilt

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + r \exp(2\pi i t)) dt,$$

d.h.  $f(z_0)$  ist der Mittelwert von  $f$  auf dem Kreis mit Zentrum  $z_0$  und Radius  $r$ .

BEWEIS. Nach dem Satz von Cauchy gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz,$$

wobei  $\gamma$  der Kreis mit Zentrum  $z_0$  und Radius  $r$  ist. Wir können  $\gamma$  als  $\gamma(t) = z_0 + r \exp(2\pi i t)$  parametrisieren. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(z_0 + r \exp(2\pi i t))}{z_0 + r \exp(2\pi i t) - z_0} r \cdot 2\pi i \exp(2\pi i t) dt \\ &= \int_0^1 f(z_0 + r \exp(2\pi i t)) dt. \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma ist der Baustein des Maximum Modulus Prinzips.

LEMMA 2.59. Sei  $f$  auf  $B(z_0, r)$  holomorph. Falls

$$(2.28) \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|$$

für jedes  $z \in B(z_0, r)$ , ist  $f(z)$  eine Konstante,

$$f(z) = f(z_0).$$

BEWEIS. Sei  $\rho < r$ . Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + \rho \exp(2\pi it)) dt$$

und deshalb

$$|f(z_0)| \leq \int_0^1 |f(z_0 + \rho \exp(2\pi it))| dt \stackrel{(*)}{\leq} \int_0^1 |f(z_0)| dt = |f(z_0)|,$$

wobei wir (2.28) in (\*) benützt haben. Daraus folgt, dass

$$(2.29) \quad 0 = \int_0^1 (|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho \exp(2\pi it))|) dt.$$

Aus (2.29) ist der Durchschnitt ihrer Werte auf dem Kreis vom Zentrum  $z_0$  und Radius  $\rho$  gleich 0. Aber da  $|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho \exp(2\pi it))| \geq 0$ , müssen alle Werte der Funktion  $|f(z)|$  auf diesem Kreis gleich  $|f(z_0)|$  sein. Da  $\rho$  beliebig mit  $\rho < r$  ist, gilt

$$|f(z)| = |f(z_0)|$$

für jedes  $z \in B(z_0, r)$ . Aus dem Korollar 2.28(2) folgt, dass  $f(z) = f(z_0)$  für jedes  $z \in B(z_0, r)$ .  $\square$

**SATZ 2.60 (Maximum Modulus Prinzip).** Sei  $f$  holomorph und nicht konstant auf einer wegzusammenhängenden Menge  $U$ . Dann besitzt  $|f(z)|$  kein Maximum auf  $U$ . Anders gesagt, gibt es keinen Punkt  $z_0 \in U$  mit  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ .

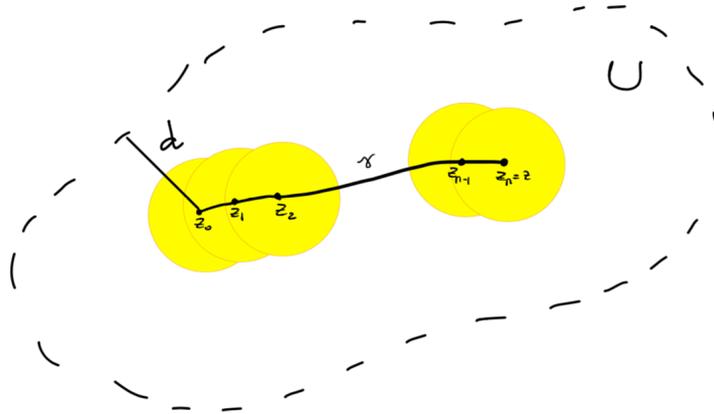
BEWEIS. Wir werden nur die Idee des Beweises geben. Der Beweis ist durch Widerspruch. Nehmen wir an, dass es einen Punkt  $z_0 \in U$  gibt, mit

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \text{für jedes } z \in U.$$

Sei  $z \in U$  ein beliebiger Punkt. Da  $U$  wegzusammenhängend ist, sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  eine Kurve mit  $\gamma(0) = z_0$  und  $\gamma(1) = z$ . Sei  $d$  das Minimum der Abstand zwischen einem Punkt auf  $\gamma$  und dem Rand von  $U$ . (Falls  $U$  unbeschränkt ist, kann  $d$  beliebig sein.) Wählen eine Folge von Punkten  $z_0, z_1, \dots, z_n = z$  auf  $\gamma$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $1 \leq j \leq n-1$

$$|z_j - z_{j-1}| < d$$

und betrachten eine Folge von Scheiben  $B(z_j, d)$ . Wir bemerken, dass diese Punkte sind alle in  $U$  enthalten und  $z_j \in B(z_{j-1}, d)$ .



Da  $|f(z_0)| \geq |f(z)|$  für jedes  $z \in B(z_0, d) \subset U$ , ist  $|f(z)|$  auf  $B(z_0, d)$  wegen des Lemmas 2.59 konstant. Da  $z_1 \in B(z_0, d)$  und

$$|f(z_1)| = |f(z_0)| \geq |f(z)|,$$

folgt noch einmal aus dem Lemma 2.59, dass  $|f(z)|$  auf  $B(z_1, d)$  konstant und gleich  $f(z_0)$  ist. Weiter mit dem gleichen Argument ist  $|f(z)|$  auf  $\cup_{j=0}^{n-1} B(z_j, d)$  konstant und gleich  $f(z_0)$ . Da der Punkt  $z$  beliebig ist, ist  $|f(z)|$ , und deshalb  $f(z)$ , konstant und dies ist ein Widerspruch.  $\square$

**KOROLLAR 2.61.** Sei  $f$  eine nicht konstante und stetige Funktion auf einer kompakten Menge  $K$ , die holomorph auf dem Innere<sup>a</sup> von  $K$  ist. Dann wird  $\max_{z \in K} |f(z)|$  auf dem Rand von  $K$  erreicht.

<sup>a</sup>Das Innere einer abgeschlossenen Menge  $K$  die Menge ohne den Rand.

**BEWEIS.** Da  $f$  stetig auf  $K$  ist, ist auch  $|f|$  auf  $K$  stetig. Dann existiert ein Maximum  $M$ , die auf  $K$  erreicht ist

$$M = |f(z_0)| = \max_{z \in K} |f(z)|.$$

Wegen des Maximum Modulus Prinzips liegt  $z_0$  nicht im Innere von  $K$ , so dass  $z_0$  muss auf dem Rand liegen.  $\square$

**BEISPIEL 2.62.** Sei  $f(z) = \sin z$  auf  $K = [0, \pi] \times [0, 1]$ . Dann ist

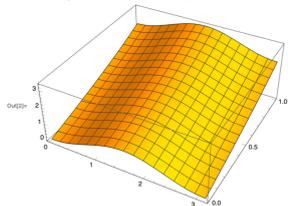
$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

und das Maximum von  $|\sin z|$  wird die Summe der Maxima der Funktionen  $\sin^2 x$  auf  $[0, \pi]$  und  $\sinh^2 y$  auf  $[0, 1]$ . Da  $\sinh^2 y$  steigend ist, gilt

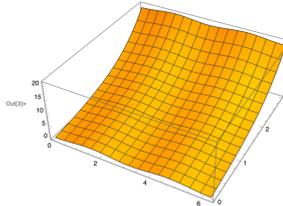
$$\sin^2 x \leq \sin^2 \frac{\pi}{2} \text{ und } \sinh^2 y \leq \sinh^2 1,$$

so dass  $\max |\sin z|$  auf  $K = [0, \pi] \times [0, 1]$  an der Stelle  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  erreicht wird. Falls wir eine andere Kompakte betrachten, zum Beispiel  $K = [0, 2\pi] \times [0, 3]$  ist das Maximum natürlich ein anderes, aber immer am Rand.

HEIN= Plot3D[(Sin[x])^2 + (Sinh[y])^2, {x, 0, π}, {y, 0, 1}]



HEIN= Plot3D[(Sin[x])^2 + (Sinh[y])^2, {x, 0, 2π}, {y, 0, 3}]



**SATZ 2.63 (Satz von Liouville).** Sei  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze Funktion. Falls  $|f(z)|$  beschränkt ist, ist  $f$  konstant.

Ganze Funktionen waren im Bemerkung 2.20 definiert. Sie sind Funktionen, die auf der ganzen komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  definiert und holomorph sein.

**BEMERKUNG 2.64.** Wir merken, dass dieser Satz für Funktionen einer reellen Variable nicht gilt. Zum Beispiel ist die Funktion  $f(x, y) := \cos x \sin y$  auf der ganzen reellen Ebene unendlich viel differenzierbar und beschränkt, aber sicher nicht konstant.

**BEWEIS.** Wir haben im Satz 2.55 bewiesen, dass für jedes  $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

gilt, wobei  $\gamma(t) = z_0 + r \exp(2\pi i t)$  mit  $r > 0$  genommen werden kann. Wegen der Voraussetzung ist  $|f(z)| \leq M$  für einen gewissen  $M$ . Daraus und aus (KI6) folgt, dass

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|(z - z_0)^{n+1}|} dz \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{2\pi r}{r^{n+1}} = \frac{n!M}{r^n}.$$

Insbesondere gilt

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Aber  $f$  ist eine ganze Funktion, d.h auf  $\mathbb{C}$  holomorph. Daraus folgt, dass wir  $r$  so gross wie möglich wählen können. Anders gesagt, muss  $|f'(z)| = 0$  sein und  $f(z)$  ist deshalb eine Konstante.  $\square$

### 2.5.1. Anwendung: Fundamentalsatz der Algebra.

**SATZ 2.65.** Jedes nicht-konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

**BEWEIS.** Die Aussage wird eine Konsequenz des Satzes von Liouville sein. Sei

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Wir werden den Beweis durch Widerspruch führen. Wir nehmen an,  $p$  hat keine Nullstelle. Dann ist

$$f(z) := \frac{1}{p(z)}$$

auf  $\mathbb{C}$  holomorph. Wir werden beweisen, dass  $f(z)$  auf  $\mathbb{C}$  beschränkt ist. In diesem Fall ist  $f(z)$  wegen des Satzes von Liouville konstant, und daraus folgen wird, dass  $p(z)$  auch konstant ist. Dies ist ein Widerspruch, weil  $p$  nicht konstant genommen wurde..

Da  $f$  holomorph ist, ist  $f$  auf einem Kreis des Radius  $R > 0$  beschränkt. Um den Beweis zum Ende zu führen, müssen wir deshalb beweisen, dass  $|f(z)|$  für  $|z| > R$  beschränkt ist. Zu diesem Zweck ist es genug zu beweisen, dass

$$(2.30) \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| > R \quad |p(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n|R^n$$

gilt, so dass

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|a_n|R^n}.$$

Wir werden jetzt (2.30) beweisen. Wir schreiben

$$p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = \left( \underbrace{\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}}_{:=w(z)} + a_n \right) z^n = (w(z) + a_n)z^n$$

Falls  $|z| > R$ , kann man  $R$  gross genug wählen, dass die letzte Ungleichheit in der folgenden Formel gilt

$$\left| \frac{a_j}{z^{n-j}} \right| \leq \frac{|a_j|}{R^{n-j}} < \frac{|a_n|}{2n}, \quad \text{für } j = 0, \dots, n-1.$$

So gilt für  $|z| > R$

$$(2.31) \quad \begin{aligned} |w(z)| &= \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_0}{z^n} \right| + \left| \frac{a_1}{z^{n-1}} \right| + \cdots + \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| \\ &\leq \frac{|a_n|}{2n} \cdot n \\ &= \frac{1}{2}|a_n|. \end{aligned}$$

Wir sind fast fertig. Falls  $|z| > R$  gilt

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |(a_n + w(z))z^n| = |a_n + w(z)| \cdot |z^n| > |a_n + w(z)| \cdot R^n \\ &\stackrel{(2.23)}{\geq} \left| |a_n| - |w(z)| \right| \cdot R^n \stackrel{(2.31)}{\geq} \left| |a_n| - \frac{1}{2}|a_n| \right| \cdot R^n = \frac{1}{2}|a_n|R^n. \end{aligned}$$

□

## Taylor- und Laurentreihen

### 3.1. Reihen Entwicklung

Falls eine reellwertige Funktion unendlich oft differenzierbar ist, besitzt die Funktion eine Taylor-Reihen Entwicklung. Dies gilt auch für komplexwertige Funktionen, falls sie holomorph sind.

**SATZ 3.1.** Sei  $f: B(z_0, R_0) \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion und  $R_0 > 0$ . Dann besitzt  $f(z)$  für jedes  $z \in B(z_0, R_0)$  eine Reihen Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n .$$

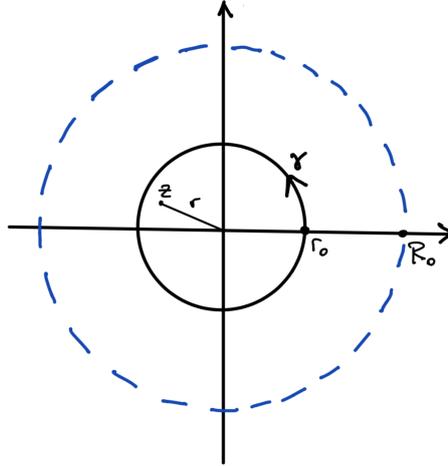
Anders gesagt, konvergiert absolut die Reihe für alle  $z \in B(z_0, R_0)$ .

**BEWEIS.** Wir führen den Beweis für  $z_0 = 0$ , der allgemeine Fall ist ähnlich. Wir möchten deshalb beweisen, dass für jedes  $z \in B(0, R_0)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n$$

gilt.

Sei  $z \in B(0, R_0)$  und sei  $\gamma(t) := r_0 \cdot e^{2\pi i t}$  ein Kreis mit Zentrum im Ursprung und Radius  $r_0$ , mit  $r_0 < R_0$ , so dass  $\gamma \subset B(0, R_0)$  und  $z \in B(0, r_0)$ .



Nach dem Satz vom Cauchy gilt für jedes  $z \in B(z_0, R_0)$

$$(3.1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Nun gilt für jedes  $w \neq 1$

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{N-1} w^n + \frac{w^N}{1-w},$$

so dass

$$(3.2) \quad \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi} \frac{1}{1 - z/\xi} = \frac{1}{\xi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{\xi^n} + \frac{1}{\xi} \left(\frac{z}{\xi}\right)^N = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\xi^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(\xi - z)\xi^N}.$$

Wir multiplizieren den ersten und den letzten Term von (3.2) mit  $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$  und integrieren nach  $\xi$  um  $\gamma$ , um

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right) z^n + z^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)\xi^N} d\xi$$

zu erhalten. Wegen des Satzes 2.55 und (3.1) erhalten wir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n + \rho_N(z),$$

wobei

$$\rho_N(z) = z^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)\xi^N} d\xi.$$

Falls wir zeigen, dass

$$(3.3) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0$$

wird der Beweis fertig.

Nehmen wir an, dass  $|z| = r$ . Falls  $\xi$  auf der Kurve  $\gamma$  liegt, gilt

$$|\xi - z| \geq ||\xi| - |z|| = r_0 - r > 0.$$

Falls  $|f(\xi)| \leq M$  für jedes  $\xi$  auf  $\gamma$ , gilt mithilfe von (KI6)

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \frac{M}{(r_0 - r)r_0^N} 2\pi r_0 = \frac{Mr_0}{r_0 - r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^N.$$

Da  $\frac{r}{r_0} < 1$ , ist (3.3) bewiesen. □

DEFINITION 3.2. Die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

heisst die *Taylor-Reihen Entwicklung* von  $f$  an der Stelle  $z_0$ . Falls  $z_0 = 0$  heisst die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n$$

die *Maclaurin-Reihen Entwicklung* von  $f$ .

BEISPIEL 3.3. Falls  $f(z) = z^2 \exp(2z)$ , können wir die Maclaurin-Reihen Entwicklung mithilfe unserer Definition der Exponentialfunktion finden. Eigentlich gilt für jedes  $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

so dass

$$\exp(3z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n!}$$

und

$$z^2 \exp(3z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n.$$

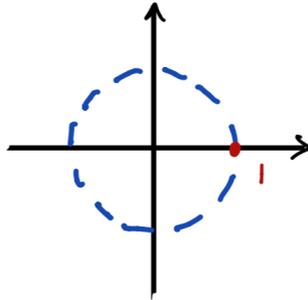
für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . □

BEISPIEL 3.4. Wir haben schon benutzt, dass für  $|z| < 1$

$$(3.4) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Aus dieser Formel erhalten wir zum Beispiel auch

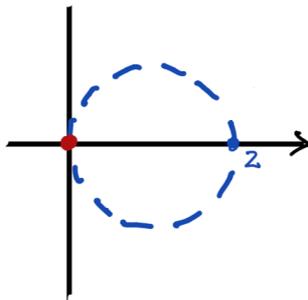
$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$



Falls wir  $z$  durch  $1 - z$  in (3.4) ersetzen, erhalten wir die Taylor-Reihen Entwicklung um  $z_0 = 1$  der Funktion  $\frac{1}{z}$

$$(3.5) \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{1 - (1 - z)} = \frac{1}{1 - (-(z - 1))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n.$$

Da (3.4) für  $|z| < 1$  gilt, gilt (3.5) für  $|z - 1| < 1$ , d.h. für alle  $z$  innerhalb eines Kreises der Zentrum  $z = 1$  und Radius 1.



□

BEISPIEL 3.5. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) := \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5} = \frac{1}{z^3} \frac{2(1 + z^2) - 1}{1 + z^2} = \frac{1}{z^3} \left( 2 - \frac{1}{1 + z^2} \right)$$

Wir benutzen die Reihen Entwicklung (3.4) mit  $z$  ersetzt durch  $-z^2$  und erhalten die folgende Reihen Entwicklung

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} \left( 2 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \right) \\ &= \frac{1}{z^3} (1 + z^2 - z^4 + z^6 - \dots) \\ &= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots \end{aligned}$$

In diesem Fall gibt es negative Potenzen von  $z$ . Wir werden im nächsten Satz sehen, dass der Grund mit der Singularität<sup>1</sup> der Funktion im Ursprung zu tun hat. □

<sup>1</sup>Der Begriff von *Singularität* wird im nächsten Abschnitt in Definition 3.13 gegeben.

SATZ 3.6. Sei  $f$  eine Funktion, die holomorph auf einem Kreisring  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  ist. Dann besitzt  $f$  für jedes  $z$  im Kreisring eine Reihenentwicklung

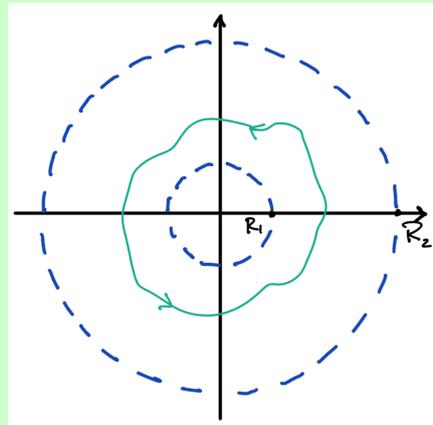
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n},$$

wobei

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz, \text{ für } n = 1, 2, \dots,$$

und  $\gamma$  ist eine geschlossene Kurve, die im Kreisring enthalten ist und die einmal im Gegenuhrzeigersinn  $z_0$  umläuft.



BEMERKUNG 3.7. (1) Man kann auch die Formel im Satz 3.6 in einer kompakteren Form schreiben. Nämlich

$$(3.6) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \text{ für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(2) Die Formel für  $b_n$  kann auch als

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz, \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

geschrieben werden. Falls  $f$  an der Stelle  $z_0$  holomorph ist, ist die Funktion  $f(z)(z - z_0)^{n-1}$  auch holomorph und  $b_n = 0$  für  $n = 1, 2, \dots$ . In diesem Fall

ist die Laurent-Reihen Entwicklung die Taylor-Reihen Entwicklung und

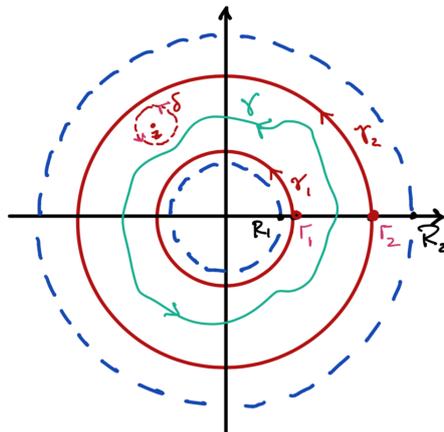
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

DEFINITION 3.8. Eine Funktion heisst *analytisch*, falls sie sich durch eine Potenzreihe darstellen lässt.

BEWEIS DES SATZES 3.6. Wir führen den Beweis für  $z_0 = 0$ , der allgemeine Fall ist ähnlich. Seien  $r_1, r_2$  so gewählt, dass  $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ , so dass:

- (1) der Kreissring  $r_1 \leq |z| \leq r_2$  ist im Kreisring  $R_1 \leq |z| \leq R_2$  enthalten, und
- (2) die Kurve  $\gamma$  liegt im Kreisring  $r_1 \leq |z| \leq r_2$ .

Sei  $\gamma_i(t) := r_i e^{2\pi i t}$ , für  $t \in [0, 1]$  und für  $i = 1, 2$ , und bemerken, dass  $f$  holomorph auch auf  $\gamma_i$  für  $i = 1$  und  $2$  ist.



Sei  $\delta(t)$  ein Kreis, der im Kreisring  $r_1 \leq |z| \leq r_2$  enthalten ist, und der  $z$  einmal im Gegenuhrzeigersinn umläuft. Wegen (KI7), gilt

$$\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\delta} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0.$$

Wegen des Satzes von Cauchy ist das dritte Integral gleich  $2\pi i f(z)$ . Die obige Formel wird deshalb

$$(3.7) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{z - \xi} d\xi.$$

Wie in (3.2) schreiben wir

$$\frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\xi^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(\xi - z)\xi^N}.$$

Dieser Ausdruck von  $\frac{1}{\xi-z}$  wird auf  $\gamma_2$  nützlich sein, da  $|z| < |\xi|$  für jedes  $\xi$  auf  $\gamma_2$  gilt. Auf  $\gamma_1$  benutzen wir die folgende ähnliche Formel

$$\frac{1}{z-\xi} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\xi^{-n}} \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{1}{z^N} \frac{\xi^N}{(z-\xi)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\xi^{-n+1}} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^N} \frac{\xi^N}{(z-\xi)}.$$

Wir ersetzen diese zwei Formel in (3.7) und wir erhalten

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \rho_N(z) + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{z^n} + \sigma_N(z),$$

wobei

$$(3.8) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi^{-n+1}} d\xi$$

und

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-z)\xi^N} d\xi, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi i z^N} \int_{\gamma_1} \frac{\xi^N f(\xi)}{\xi-z} d\xi.$$

Wie im Beweis des Satzes 3.1 ist es zu zeigen, dass

$$(3.9) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N(z) = 0,$$

und wir werden die gleiche Methode benutzen, Sei  $|z| = r$ , so dass  $r_1 < r < r_2$  und sei  $M = \max |f(z)|$  auf  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ . Falls  $\xi$  auf  $\gamma_2$  liegt, gilt

$$|\xi - z| \geq r_2 - r,$$

und falls  $\xi$  auf  $\gamma_1$  liegt, gilt

$$|\xi - z| \geq r - r_1.$$

Daraus folgt, dass

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{Mr_2}{r_2 - r} \left(\frac{r}{r_2}\right)^N \quad \text{und} \quad |\sigma_N(z)| \leq \frac{Mr_1}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^N.$$

Aus  $\frac{r}{r_2} < 1$  und  $\frac{r_1}{r} < 1$  folgt (3.9).

Um den Beweis zum Ende zu führen, müssen wir noch bemerken, dass die Integrale in (3.8) wegen (KI7) auf  $\gamma$  statt auf  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  berechnet werden können.  $\square$

**BEISPIEL 3.9.** Wie im obigen Beispiel versucht man die Laurent-Koeffizienten nicht durch Integration sondern mithilfe von algebraischen Manipulationen von bekannten Reihen zu erhalten. Zum Beispiel ist die Laurent-Reihen Entwicklung der Funktion  $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$  das folgende

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

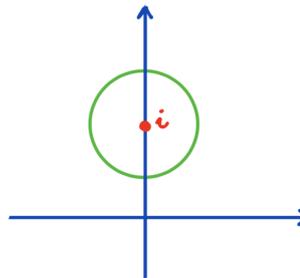
In diesem Fall verschwinden alle Koeffizienten der Terme mit positivem Exponenten.

BEISPIEL 3.10. Die Funktion  $f(z) := 1/(z - i)^2$  ist schon ihre Laurent-Reihen Entwicklung an der Stelle  $z_0 = i$ . Eigentlich gilt

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - i)^n, \quad \text{für } 0 < |z - i| < \infty,$$

wobei

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = -2 \\ 0 & \text{falls } n \neq -2. \end{cases}$$



Aus

der Formel (3.6) folgt, dass

$$2\pi i c_n = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - i)^{n+1}} dz = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z - i)^{n+3}} = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -2 \\ 0 & \text{falls } n \neq -2, \end{cases}$$

wobei  $\gamma$  ein im Gegenuhrzeigersinn umgelaufener Kreis um  $z = i$  ist.

BEISPIEL 3.11. Betrachte die Funktion  $z^2 \sin(\sin(\frac{1}{z}))$ . Wir wissen, dass  $\sin z$  holomorph auf ganz  $\mathbb{C}$  ist, aber hier ist  $\frac{1}{z}$  an der Stelle  $z = 0$  nicht holomorph. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots \\ \sin(\sin z) &= \left( z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots \right) - \frac{1}{3!} \left( z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots \right)^3 \\ &\quad + \frac{1}{5!} \left( z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \dots \right)^5 + \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} z^2 \sin\left(\sin\left(\frac{1}{z}\right)\right) &= z^2 \left( z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-3} + \frac{1}{10}z^{-5} + \dots \right) \\ &= z - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{10}z^{-3} + \dots \end{aligned}$$

In diesem Fall ist eine allgemeine Formel der Koeffizienten der Laurent-Reihen Entwicklung ein bisschen schwierig zu erhalten.

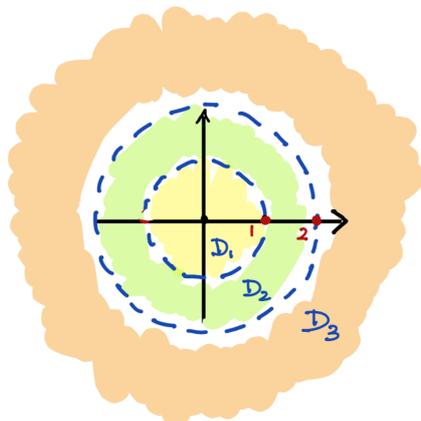
BEISPIEL 3.12. Betrachte die Funktion

$$f(z) = \frac{-1}{(z - 1)(z - 2)} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - 2},$$

die holomorph auf

$$\begin{aligned} D_1 &:= \{z : |z| < 1\} \\ D_2 &:= \{z : 1 < |z| < 2\} \\ D_3 &:= \{z : |z| > 2\} \end{aligned}$$

ist.



In jedem dieser drei Gebiete kann man  $f$  als Laurent-Reihe darstellen:

$D_1$ : Auf  $D_1$  gilt  $|z| < 1$  aber auch  $|\frac{z}{2}| < 1$ . Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n. \end{aligned}$$

$D_3$ : Auf  $D_3$  gilt  $2 < |z|$ , so dass  $|\frac{2}{z}| < 1$  aber auch  $|\frac{1}{z}| < 1$ . Daraus folgt, dass

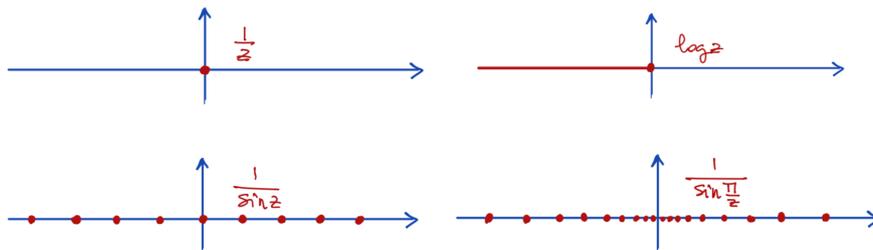
$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^{n+1}} - \frac{2^n}{z^{n+1}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^{n-1}}{z^n}. \end{aligned}$$

$D_2$ : Auf  $D_2$  gilt  $|\frac{1}{z}| < 1$  und  $|\frac{z}{2}| < 1$ . Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{2^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

**DEFINITION 3.13.** (1) Wenn eine Funktion im Punkt  $z_0$  nicht holomorph ist, sondern irgendwann in jeder Scheibe  $B(z_0, \epsilon)$  holomorph ist, wird  $z_0$  als *Singularität* bezeichnet.  
 (2) Eine Singularität (bzw. eine Nullstelle) einer Funktion heisst *isoliert*, falls es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $f(z)$  für jedes  $z \in B(z_0, \epsilon)$  holomorph ist (bzw.  $f(z) \neq 0$ ).

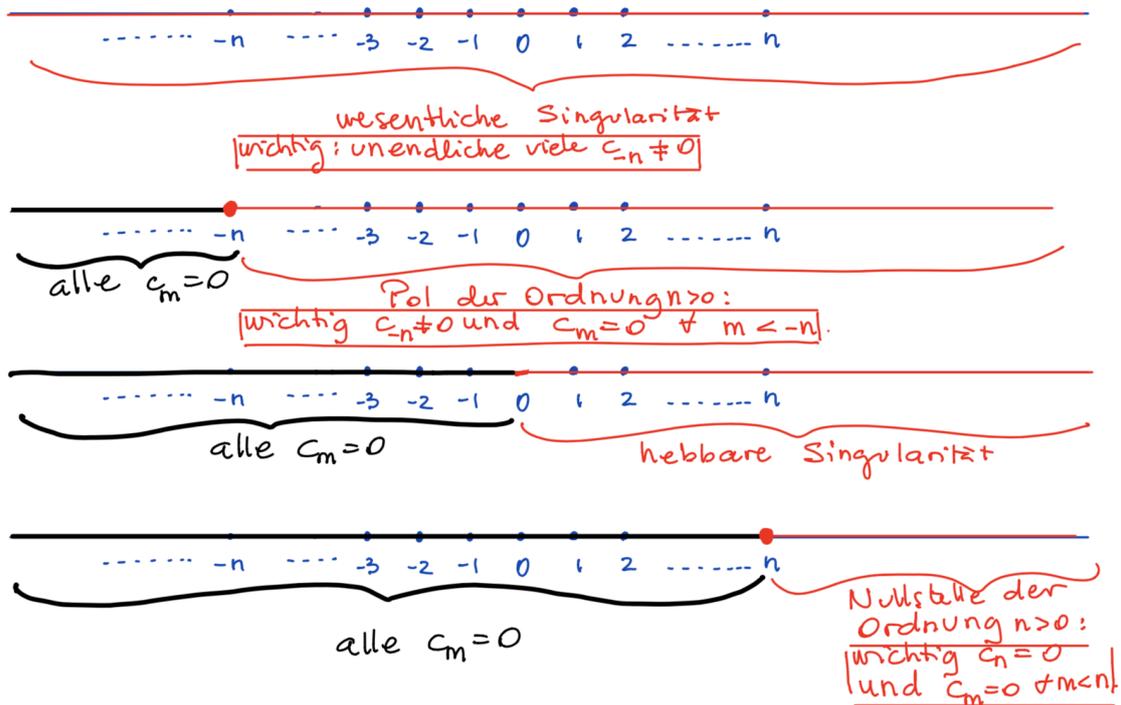
**BEISPIEL 3.14.** (1) Die Funktion  $f(z) = \frac{1}{z}$  besitzt im Ursprung eine isolierte Singularität.  
 (2) Alle Punkte  $z$  mit  $\Re(z) \leq 0$  sind Singularitäten der Funktion  $f(z) = \log z$  und sie sind nicht isolierte.  
 (3) Die Funktion  $\frac{1}{\sin z}$  besitzt an den Stellen  $z = k\frac{\pi}{2}$  für  $z \in \mathbb{Z}$  isolierte Singularitäten.  
 (4) Die Funktion  $\frac{1}{\sin(\pi/z)}$  besitzt an den Stellen  $z = 0$  und  $z = 1/n$ , für  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  Singularitäten. Alle Singularitäten ausser  $z = 0$  sind isolierte. Die Singularität  $z = 0$  ist nicht isolierte, weil jede Kreisscheibe  $B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$  andere Singularitäten der Funktion enthält.  
 (5) Die Funktion  $f(z) = |z|^2$  hat keine Singularitäten, weil sie nirgendwo holomorph ist.



In der nächsten Definition finde man eine Beschreibung (eigentlich eine Klassifikation) der isolierten Singularitäten einer Funktion.

**DEFINITION 3.15.** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $z_0 \in U$  und sei  $f$  holomorph auf  $U \setminus \{z_0\}$ . Schreiben wir  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  für jedes  $z \in B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$  für eine gewissen  $R > 0$ . So definiert man:

- (1)  $z_0$  ist eine *wesentliche Singularität* falls  $c_n \neq 0$  für unendlich viele negative  $n$ .  
 (2)  $z_0$  ist ein *Pol der Ordnung  $m \geq 1$*  falls  $c_{-m} \neq 0$  und  $c_n = 0$  für alle  $n < -m$ .  
 Falls  $m = 1$ , heisst  $z_0$  ein *einfacher Pol*.  
 (3)  $z_0$  ist eine *hebbare Singularität* falls  $c_n = 0$  für alle  $n < 0$ .  
 (4)  $z_0$  ist eine *Nullstelle der Ordnung  $m \geq 0$*  falls  $c_m \neq 0$  und  $c_n = 0$  für alle  $n < m$ .



- BEISPIELE 3.16. (1) Im Beispiele 3.9 und 3.11 ist  $z_0 = 0$  eine wesentliche Singularität.  
 (2) Im Beispiele 3.10 ist  $z_0 = i$  ein Pol der Ordnung 2.  
 (3) Sei  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$f(z) := \frac{\cos(z) - 1}{z^2}$$

definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos(z) - 1}{z^2} \\ &= \frac{1}{z^2} \left( \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{z^2} \left( \left( 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Der Punkt  $z_0 = 0$  ist deshalb eine hebbaren Singularität und die Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{\cos(z)-1}{z^2} & \text{falls } z \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

ist eine ganze Funktion.

(4) Sei  $f(z) := z^2 \exp(z)$ . Dann gilt

$$f(z) = z^2 \exp z = z^2 \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \right) = z^2 + z^3 + \frac{z^4}{2!} + \dots$$

d.h.  $z_0 = 0$  ist eine Nullstelle der Ordnung 2.

**BEMERKUNGEN 3.17.** Wie im Beispiel 3.12(3) illustriert war, ist  $z_0$  eine hebbare Singularität, so kann man  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  holomorph fortsetzen.

**DEFINITION 3.18.** Eine holomorphe Funktion auf  $U \setminus \{z_0, \dots, z_N\}$  heisst *meromorph* auf  $U$ , falls  $z_0, \dots, z_N$  Pole oder hebbare Singularitäten sind.

### 3.2. Der Residuensatz

Sei  $f: U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, so dass man  $f$  als

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

auf einer Scheibe einer gewissen Radius (ausser  $z_0$ ) schreiben kann, wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

mit  $\gamma \subset U$  eine positiv orientierte geschlossene Kurve, die einmal  $z_0$  umrundet. Insbesondere gilt für  $n = 1$

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi.$$

**DEFINITION 3.19.** Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität von  $f$ . Man nennt den Koeffizient  $c_{-1}$  von  $\frac{1}{z-z_0}$  in der Laurent-Reihe von  $f$ , das *Residuum von  $f$  an der Stelle  $z_0$*  und schreibe  $\text{Res}(f, z_0)$ .

**BEMERKUNG 3.20.** Der grosse Vorteil von Residuen ist, dass man oft komplexe Integralen viel schneller mithilfe der Residuen ausrechnen kann: statt zu integrieren reicht es einen Koeffizient aus der Laurent-Reihen Entwicklung "abzulesen".

BEISPIEL 3.21. Wir möchten das Integral

$$(3.10) \quad \int_{\gamma} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$$

zu berechnen, wobei  $\gamma(t) = r \exp(2\pi it)$  für  $r > 0$ . Der Ursprung ist die einzige Singularität und sie ist isolierte. Wir können deshalb das Integral so berechnen

$$\int_{\gamma} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Da

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

ist

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}.$$

Da  $c_{-1} = 0$ , verschwindet das Integral (3.10).

Wenn wir stattdessen das Integral von

$$f(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

berechnen wollten, wäre

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

die entsprechende Laurent-Reihen Entwicklung gewesen, und wir hätten

$$\int_{\gamma} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \frac{1}{1!} = 2\pi i.$$

erhalten.

BEISPIEL 3.22. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z},$$

die holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist. Sei  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ , für  $t \in [0, 1]$ . Da

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ist

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Daraus folgt, dass

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n-1}}.$$

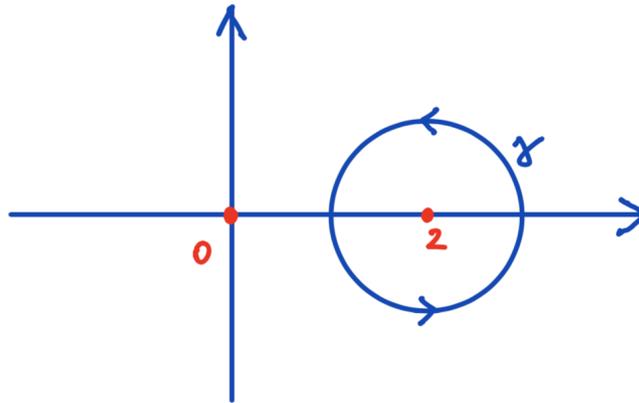
Wir suchen den Koeffizienten von  $\frac{1}{z}$ . Aus  $2n - 1 = 1$  folgt, dass  $n = 1$  sein muss. Das heißt,  $c_{-1} = (-1)^1 \frac{1}{(2 \cdot 1 + 1)!} = -\frac{1}{3!}$  und daraus folgt,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \left( \frac{-1}{3!} \right) = \frac{-\pi i}{3}. \quad \square$$

BEISPIEL 3.23. Wir möchten jetzt das Integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-2)^4}$$

auf der Kurve  $\gamma(t) = 2 + e^{2\pi i t}$ ,  $t \in [0, 1]$ , berechnen.



Man kann die Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z(z-2)^4}$$

auf dem Kreisring  $0 < |z-2| < 2$  als Laurent-Reihen entwickeln. Wir suchen den Koeffizienten  $c_{-1}$  der Laurent-Reihenentwicklung von  $f$  um die Stelle  $z = 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z-2)^4} &= \frac{1}{(z-2)^4} \frac{1}{z} \\ &= \frac{1}{(z-2)^4} \frac{1}{2 - (-(z-2))} \\ &= \frac{1}{(z-2)^4} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-2}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{(z-2)^4} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^n} \\ &= \frac{1}{(z-2)^4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^{n-4}}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Aus  $n - 4 = -1$  folgt, dass  $n = 3$  sein muss. Anders gesagt, ist  $c_{-1} = (-1)^3 \frac{1}{2^3+1} = \frac{1}{16}$  der gesuchte Koeffizient. Daraus folgt, dass

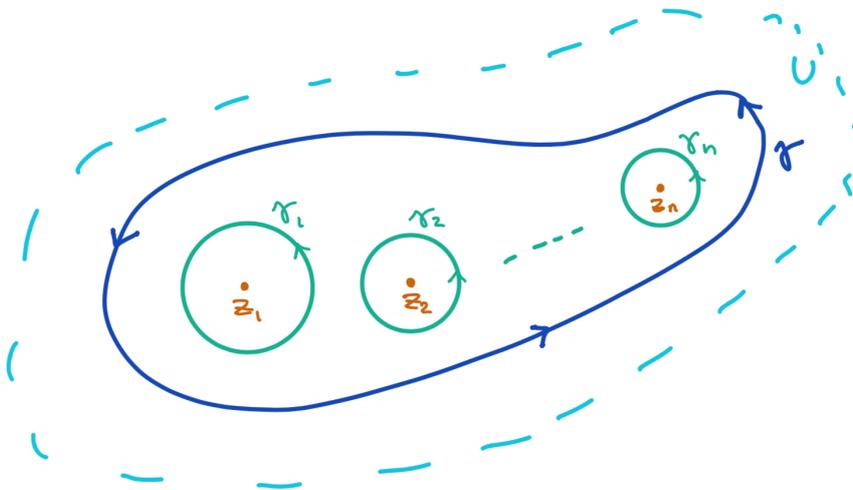
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i \frac{-1}{16} = \frac{-\pi i}{8}. \quad \square$$

Die Frage sich stellt, was passiert falls die Kurve  $\gamma$ , auf der das Kurvenintegral berechnet werden sollte, mehr als eine Singularität enthält.

**SATZ 3.24 (Residuensatz).** Sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  eine offene wegzusammenhängende Teilmenge und sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$  eine positiv orientierte einfache geschlossene Kurve. Seien  $z_1, \dots, z_n$  im Innere von  $\gamma$  entalten und sei  $f : U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j).$$

**BEWEIS.** Sei  $\gamma_j$  eine einfache positiv orientierte Kurve, die den Punkt  $z_j$  enthält. Sei  $j = 1, \dots, n$ .



Dann gilt

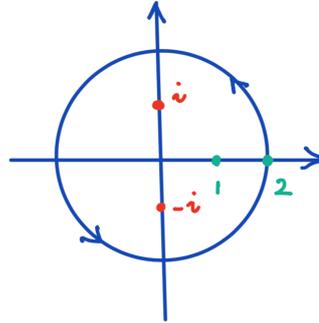
$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{KI6}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz \stackrel{\text{Satz 3.24}}{=} \sum_{j=1}^n 2\pi i \text{Res}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j).$$

□

**BEISPIEL 3.25.** Wir möchten das Integral der Funktion

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{z}{(z - i)(z + i)}$$

auf der Kurve  $\gamma(t) = 2e^{2\pi it}$ , für  $t \in [0, 1]$  berechnen. Die Funktion besitzt zwei Singularitäten  $z_1 = i$  und  $z_2 = -i$ , sie sind beide einfache Pole und sie liegen innerhalb von  $\gamma$ . Wir müssen deshalb  $\text{Res}(f, i)$  und  $\text{Res}(f, -i)$  berechnen.



Das Residuum  $\text{Res}(f, i)$  ist der Koeffizient von  $(z-i)^{-1}$  in der Laurent-Reihe um  $z_1 = i$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z}{(z-i)(z+i)} \\
 &= \frac{z}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i} \\
 &= \frac{z-i+i}{z-i} \cdot \frac{1}{2i+z-i} \\
 &= \left(1 + \frac{i}{z-i}\right) \cdot \frac{1}{2i(1 + \frac{z-i}{2i})} \\
 (3.11) \quad &= \left(1 + \frac{i}{z-i}\right) \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{(1 - (-\frac{z-i}{2i}))} \\
 &= \left(1 + \frac{i}{z-i}\right) \cdot \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-i}{2i}\right)^k \\
 &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-i}{2i}\right)^k + \frac{i}{z-i} \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n \\
 &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-i}{2i}\right)^k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}i^n} \left(\frac{z-i}{2i}\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

falls  $\left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1$ , d.h. falls  $|z-i| < 2$ . Daraus folgt, dass  $\text{Res}(f, i)$  gleich dem Koeffizient mit  $n = 0$ , d.h.

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2}.$$

Auf der anderen Seite ist  $\text{Res}(f, -\iota)$  der Koeffizient von  $(z + \iota)^{-1}$  in der Laurent-Reihe um  $z_1 = -\iota$ . Ganz analog zu (3.11) gilt für jedes  $z$  mit  $0 < |z + \iota| < 2$ ,

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z}{(z - \iota)(z + \iota)} \\
 &= \frac{z}{z + \iota} \frac{1}{-2\iota + z + \iota} \\
 &= \left(1 - \frac{\iota}{z + \iota}\right) \frac{-1}{2\iota - (z + \iota)} \\
 &= \left(1 - \frac{\iota}{z + \iota}\right) \frac{-1}{2\iota} \frac{1}{\left(1 - \frac{z + \iota}{2\iota}\right)} \\
 &= \left(1 - \frac{\iota}{z + \iota}\right) \frac{-1}{2\iota} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\iota)^k} (z + \iota)^k \\
 &= \frac{-1}{2\iota} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\iota)^k} (z + \iota)^k + \frac{1}{2} \frac{1}{z + \iota} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\iota)^n} (z + \iota)^n \\
 &= \frac{-1}{2\iota} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\iota)^k} (z + \iota)^k + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}\iota^n} (z + \iota)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Residuum  $\text{Res}(f, -\iota)$  gleich dem Koeffizient mit  $n = 0$  ist, d.h.

$$\text{Res}(f, -\iota) = \frac{1}{2}$$

und deshalb

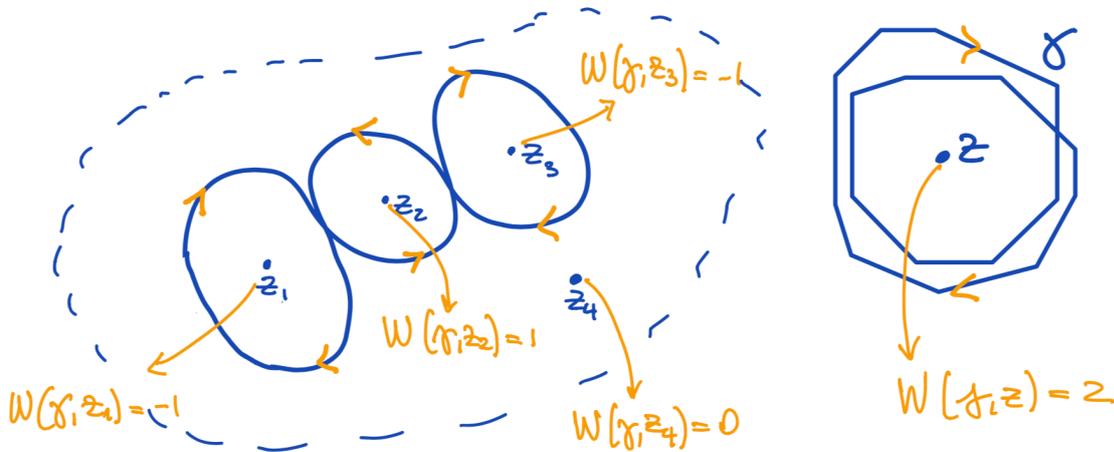
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi\iota (\text{Res}(f, \iota) + \text{Res}(f, -\iota)) = 2\pi\iota \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi\iota.$$

Falls  $\gamma$  ein beliebiger geschlossener Pfad ist, so gibt es eine alternative Formulierung des Residuensatzes. Dazu brauchen wir aber den Begriff vom Windungszahl.

**DEFINITION 3.26.** Der *Windungszahl*  $W(\gamma, z)$  einer Kurve  $\gamma$  um einen Punkt  $z$  ist wie oft dreht  $\gamma$  um  $z$  im Gegenuhrzeigersinn. Dann ist

$W(\gamma, z) = 1$  genau dann, wenn  $\gamma$  um  $z$  im Gegenuhrzeigersinn einmal dreht  
und

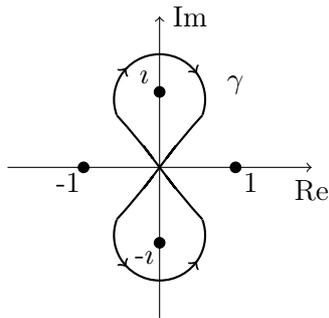
$W(\gamma, z) = -1$  genau dann, wenn  $\gamma$  um  $z$  im Uhrzeigersinn einmal dreht



SATZ 3.27. Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene wegzusammenhängende Menge,  $\gamma \subset U$  eine Kurve und  $z_1, \dots, z_N \in U$ . Sei  $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Dann gilt:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N W(\gamma, z_k) \cdot \text{Res}(f, z_k)$$

BEISPIEL 3.28. Sei  $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^4 - 1}$ . Wir möchten jetzt das Integral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  bestimmen, wobei  $\gamma$  wie im Bild ist.



Wir schreiben

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z + 1)(z - 1)(z - i)(z + i)$$

und bemerken, dass die vier Nullstellen von  $z^4 - 1$  Pole von  $f(z)$  sind (siehe Lemma 3.29). Nur  $z_0 = i$  und  $z_1 = -i$  liegen innerhalb von  $\gamma$  und wir nehmen an, dass

$$\text{Res}(f, i) = \frac{i \cos i}{4} \quad \text{und} \quad \text{Res}(f, -i) = -\frac{i \cos i}{4}.$$

Die Residuen werden im Beispiel 3.34 mithilfe vom Korollar 3.30 berechnet werden. Es gilt

$$W(\gamma, i) = -1 \quad \text{und} \quad W(\gamma, -i) = 1,$$

so dass

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= 2\pi i (W(\gamma, i) \cdot \text{Res}(f, i) + W(\gamma, -i) \cdot \text{Res}(f, -i)) \\ &= 2\pi i \left( (-1) \frac{i \cos(i)}{4} + (+1) \frac{-i \cos(i)}{4} \right) = \pi \cos(i). \quad \square \end{aligned}$$

**3.2.1. Residuen bei hebbare Singularitäten und bei Nullstellen.** Für eine hebbare Singularität oder eine Nullstelle  $z_0$  gilt  $c_n = 0$  für jedes  $n < 0$ , insbesondere  $c_{-1} = 0$ . Daraus folgt, dass für  $z_0$  eine hebbare Singularität oder eine Nullstelle  $\text{Res}(f, z_0) = 0$  gilt.

**3.2.2. Residuen an Polstellen.** Wir fangen mit dem folgenden Lemma an.

LEMMA 3.29. Sei  $z_0$  eine isolierte Singularität der Funktion  $f$ . Die Stelle  $z = z_0$  ist ein Pol der Ordnung  $m \geq 1$  genau dann, wenn es eine holomorphe an der Stelle  $z_0$  Funktion  $\phi$  gibt, mit

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

und  $\phi(z_0) \neq 0$ .

KOROLLAR 3.30. Falls  $z_0$  ein Pol der Ordnung  $m$  der Funktion  $f$  ist, gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

BEMERKUNGEN 3.31. Wenn  $m = 1$  gilt nach dem Korollar

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\phi(z_0)}{0!} = \phi(z_0),$$

wobei  $f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_0}$ , was genau stimmt mit der Definition eines Residuums. Insbesondere gibt das Korollar für einen einfacher Pol

$$\text{Res}(f, z_0) = \phi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

BEWEIS DES LEMMA 3.29. Beide Richtungen benutzen, dass eine holomorphe an der Stelle  $z_0$  Funktion eine Reihen Entwicklung in  $z - z_0$  auf der Scheibe  $B(z_0, \epsilon)$  für ein  $\epsilon > 0$  besitzt.

( $\Leftarrow$ ) Nehmen wir an, dass es eine solche Funktion gibt. Da  $\phi$  an der Stelle  $z_0$  holomorph ist, besitzt  $\phi$  eine Taylor-Reihenentwicklung für jedes  $z \in B(z_0, \epsilon)$  für ein  $\epsilon > 0$ . Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{\phi^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Da  $\phi(z_0) \neq 0$ , ist  $z_0$  ein Pol der Ordnung  $m$ . Falls  $n = -1$ , so ist der Koeffizient des Terms  $1/(z - z_0)$  ist  $\phi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$ .

( $\Rightarrow$ ) Sei  $z_0$  ein Pol der Ordnung  $m$ . Es gibt ein  $\epsilon > 0$ , so dass für jedes  $z \in B(z_0, \epsilon) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit  $c_{-m} \neq 0$ . Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{-m} \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} \\ &= (z - z_0)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

gilt. Wir definieren

$$\phi(z) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n & \text{falls } z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-m} (z - z_0)^n = c_{-m} & \text{falls } z = z_0. \end{cases}$$

Dann ist  $\phi$  holomorph auf  $B(z_0, \epsilon)$  und  $\phi(z_0) = c_{-m} \neq 0$ .  $\square$

**BEMERKUNG 3.32.** (1) Sei  $z_0$  ein Pol der Ordnung  $m \geq 1$  der Funktion  $f(z)$ . Aus dem Lemma 3.29 folgt, dass

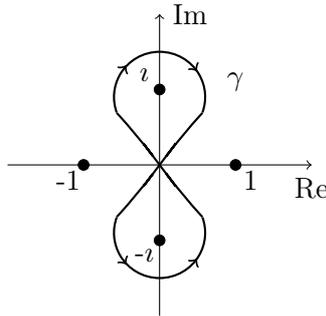
$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} = \infty,$$

da  $\phi(z_0) \neq 0$ .

(2) Das Verhalten einer Funktion  $f$  in der Nähe einer wesentlichen Singularität ist ganz anders und sehr überraschend:

**SATZ 3.33 (Satz von Picard).** Sei  $z_0$  eine wesentliche Singularität der Funktion  $f$ . Für jedes  $\epsilon > 0$  nimmt die Funktion  $f(z)$  auf  $B(z_0, \epsilon) \setminus z_0$  alle endliche Werte ausser vielleicht ein unendlich oft.

**BEISPIEL 3.34.** Wir bestimmen hier die Residuen an den Stellen  $z = i$  und  $z = -i$  der Funktion  $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^4 - 1}$  im Beispiel 3.28.



Da

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z + 1)(z - 1)(z - i)(z + i),$$

sind beide Pole einfach. Tatsächlich können wir

$$f(z) = \frac{\phi_i(z)}{z - i} \quad \text{oder} \quad f(z) = \frac{\phi_{-i}(z)}{z + i}$$

schreiben, wobei

$$\phi_i(z) = \frac{\cos(z)}{(z^2 - 1)(z + i)} \quad \text{und} \quad \phi_{-i}(z) = \frac{\cos(z)}{(z^2 - 1)(z - i)}$$

holomorph sind,  $\phi_i(i) \neq 0$  und  $\phi_{-i}(-i) \neq 0$ . Daraus folgt, dass

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{\cos(z)}{(z^2 - 1)(z + i)} = \frac{\cos(i)}{-4i} = \frac{i \cos(i)}{4}$$

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{\cos(z)}{(z^2 - 1)(z - i)} = \frac{\cos(-i)}{4i} = -\frac{i \cos(i)}{4}. \quad \square$$

**BEISPIEL 3.35.** Bestimme  $\text{Res}(f, i)$  für  $f(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z - i)^3}$ . Der Punkt  $z_0 = i$  ist ein Pol der Ordnung 3. Wegen des Lemmas 3.29 schreiben wir

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z}{(z - i)^3} = \frac{\phi(z)}{(z - i)^3},$$

wobei  $\phi(z) = z^3 + 2z$ ,  $\phi(i) \neq 0$  und  $\phi$  ist holomorph um  $z_0 = i$ . Da  $\phi'(z) = 3z^2 + 2$  und  $\phi''(z) = 6z$ , gilt

$$\text{Res}(f, i) = \frac{\phi^{(2)}(i)}{2!} = \frac{6i}{2!} = 3i. \quad \square$$

BEISPIEL 3.36. Bestimme  $\text{Res}(f, 0)$  für  $f(z) = \frac{\sinh(z)}{z^4}$ . Da  $\phi(0) = \sinh(0) = 0$  kann man das Lemma 3.29 hier nicht anwenden. Eigentlich kann man auch nicht sagen, dass  $z_0 = 0$  ein Pol der Ordnung 4 ist. Man muss also mit der Laurent-Reihen Entwicklung von  $\sinh z$  arbeiten. Um sie zu erhalten, können wir eine von dieser zwei Methoden benutzen:

- (1)  $\sinh z = \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}$  und  $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ , oder  
 (2)  $\sinh z = i \sin(iz)$  und  $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ .

Mit der einen oder anderen Methode erhalten wir

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!}.$$

Aus  $2n - 3 = -1$  folgt, dass  $n = 1$ , so dass

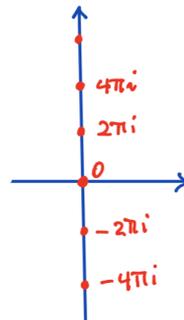
$$\text{Res}(f, 0) = \frac{1}{(2 \cdot 1 + 1)!} = \frac{1}{3!}.$$

Wir bemerken, dass der erste nicht verschwindende Koeffizient der Laurent-Reihen Entwicklung von  $f$  ist der Koeffizient mit  $n = 0$ , d.h. der Koeffizient von  $z^{2 \cdot 0 - 3} = \frac{1}{z^3}$ . Daraus folgt, dass  $z_0 = 0$  ein Pol der Ordnung 3 ist.  $\square$

BEISPIEL 3.37. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(\exp(z) - 1)}.$$

Da  $z(\exp(z) - 1)$  eine ganze Funktion ist, sind die Singularitäten von  $f$  an den Nullstellen von  $z(\exp(z) - 1)$ , d.h. an  $z = 2\pi k i$ , für  $k \in \mathbb{Z}$ . Jeder von diesen Punkten ist eine isolierte Nullstelle von  $z(\exp(z) - 1)$ , d.h. eine isolierte Singularität von  $f(z)$ . Wir betrachten nur  $z_0 = 0$ .



Es

gilt

$$\exp(z) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

so dass

$$z(\exp(z) - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

und

$$f(z) = \frac{1}{z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}} = \frac{1}{z^2} \phi(z),$$

wobei

$$\phi(z) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}}.$$

Da  $\phi$  holomorph in der Nähe von  $z_0 = 0$  und  $\phi(0) = 1 \neq 0$ , ist  $z_0 = 0$  ein Pol der Ordnung 2. So ist

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \phi'(0) = \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{(n+1)!}}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}\right)^2} \Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

LEMMA 3.38. Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph an der Stelle  $z_0 \in U$ . Die Funktion  $f$  hat an der Stelle  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  genau dann, wenn es ein  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph gibt, mit  $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$  und  $g(z_0) \neq 0$ .

BEWEIS. Der Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis von Lemma 3.29.

( $\Leftarrow$ ) Wir nehmen an, dass

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

mit einer holomorphen Funktion  $g(z)$  mit  $g(z_0) \neq 0$ . Wir schreiben

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

auf  $B(z_0, \epsilon)$  für ein gewisses  $\epsilon > 0$ . Daraus folgt, dass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n+m},$$

mit

$$f^{(0)}(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(m)}(z_0) = m!g(z_0) \neq 0.$$

( $\Rightarrow$ ) Da  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  ist, gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m} \\ &= (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

mit  $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ . Da die Reihe von  $f$  auf  $B(z_0, \epsilon)$  konvergiert, ist

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+m)}(z_0)}{(n+m)!} (z - z_0)^n$$

holomorph. Weiter ist und

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0,$$

wegen der Voraussetzung, dass  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  für  $f$  war.  $\square$

**KOROLLAR 3.39.** Seien  $p, q$  holomorph an der Stelle  $z_0$  mit  $p(z_0) \neq 0$  und sei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  für  $q$ . Dann ist  $z_0$  ein Pol der Ordnung  $m$  für  $\frac{p(z)}{q(z)}$ .

### 3.3. Anwendung: Bedingungen, unter denen $f(z) \equiv 0$

Die Tatsache, dass holomorphe Funktionen analytisch sind hat ein Paar wichtige Konsequenzen.

**LEMMA 3.40.** Sei  $f: B(z_0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und sei  $f(z_0) = 0$ . Entweder ist  $f(z) \equiv 0$  auf  $B(z_0, \epsilon)$  oder  $z_0$  ist eine isolierte Nullstelle von  $f$ .

**BEWEIS.** Sei  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $m$  in  $z_0$ . Falls  $m = \infty$  ist

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \equiv 0$$

in  $B(z_0, \epsilon)$ . Nehmen wir deshalb an, dass  $m < \infty$  und schreiben wir wegen des Lemmas 3.38

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

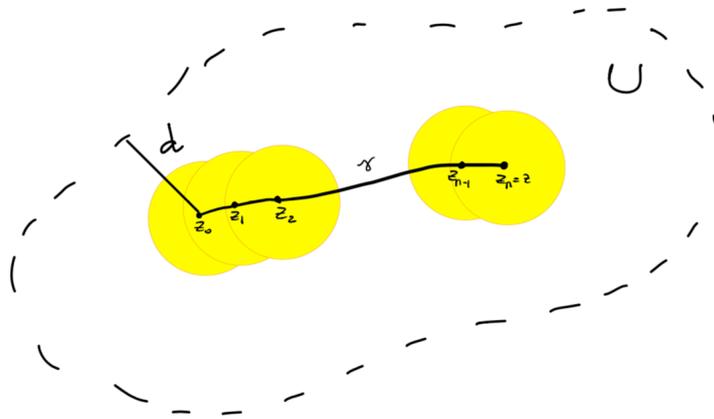
mit  $g(z_0) \neq 0$  und  $g$  holomorph. Da  $g$  insbesondere stetig ist, gibt es  $\eta > 0$  mit  $g(z) \neq 0$  auf  $B(z_0, \eta)$ . Daraus folgt, dass  $f(z) \neq 0$  für jedes  $z \in B(z_0, \eta) \setminus \{z_0\}$  und ist deshalb eine isolierte Nullstelle.  $\square$

**SATZ 3.41.** Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $U$  wegzusammenhängend. Falls  $f(z) \equiv 0$  auf einer offenen Menge oder auf einer Geradestrecke, ist  $f \equiv 0$  auf  $U$ .

**BEWEIS.** Der Beweis ist genau wie der Beweis des Maximum Modulus Prinzipes (Satz 2.60). Wir benutzen auch das gleiches Bild. Sei  $V \subset U$  eine Menge (entweder offen oder eine Geradestrecke), wo  $f(z) = 0$  für jedes  $z \in V$ . Sei  $z_0 \in V$ , sei  $z \in U$  ein beliebiger Punkt und sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$  eine Kurve von  $z_0$  bis  $z$ . Sei  $d := \min |\gamma(t) - w|$ , wobei  $t \in [0, 1]$  und  $w$  ist auf dem Rand von  $U$ . Seien  $z_0, z_1, \dots, z_n = z$  Punkte auf der Kurve  $\gamma$  mit der Eigenschaft, dass

$$|z_j - z_{j-1}| < d \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Decke die Kurve  $\gamma$  mit Scheiben  $B(z_j, d)$ , für  $j = 1, \dots, n$ , so dass  $z_{j-1}, z_{j+1} \in B(z_j, d)$ .



Da  $f(z_0) = 0$  und  $z_0$  ist keine isolierte Nullstelle, ist  $f(z) \equiv 0$  für jedes  $z \in B(z_0, d)$ , insbesondere für  $z_1$ . Daraus folgt, dass  $f(z_1) = 0$  und  $z_1$  ist keine isolierte Nullstelle, so dass  $f(z) \equiv 0$  auch für jedes  $z \in B(z_1, d)$ . Wir gehen weiter. Da  $z = z_n \in B(z_n, d)$  ist  $f(z) = 0$ . Da  $z$  ein beliebiger Punkt in  $U$  war, ist  $f(z) \equiv 0$  für jedes  $z \in U$ .  $\square$

**KOROLLAR 3.42** (Identitätsprinzip für holomorphe Funktionen). Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen,  $f, g: U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Falls  $f(z) = g(z)$  auf einer offenen Menge oder auf einer Geradestrecke in  $U$ , dann gilt:

$$f(z) \equiv g(z)$$

Holomorphe Funktionen sind also eindeutig definiert wenn man sie in einer Teilmenge kennt.

**BEISPIEL 3.43.** Wir wissen, dass  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ . Daraus folgt, dass die Funktion  $f(z) := \sin^2 z + \cos^2 z - 1$  die Eigenschaft hat, dass  $f \equiv 0$  auf der reellen Achse. Wegen des Korollars 3.42 ist  $f(z) \equiv 0$  für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . Man beweist so die Identität

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \quad \text{für jedes } z \in \mathbb{C}.$$

beweisen. Ausserdem  $\sin z$  (bzw.  $\cos z$ ) ist die einzige holomorphe Funktion, die die Werte  $\sin x$  (bzw.  $\cos x$ ) auf der  $x$ -Ache nimmt.

**PICTURE (and comment) of how this is false in R**

### 3.4. Anwendung des Residuensatzes auf reelle Integrale

**3.4.1. Eigentliche integrale mit Sinus und Cosinus.** Wir betrachten hier Integrale der Art

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt \quad \text{oder} \quad \int_0^1 F(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) dt.$$

Die allgemeine Strategie ist die Definition von  $\cos z$  und  $\sin z$  zu betrachten, um die obige Integrale als komplexe Integrale darzustellen. Wir können es machen, weil  $\cos t$  und  $\sin t$  für  $t \in [0, 2\pi]$  einen Kreis beschreiben. Anders gesagt, haben wir in der Definition eines Kurvenintegrals eine Parametrisierung der Kurve benutzt, um das Kurvenintegral als ein reelles Integral darzustellen. Hier gehen wir in die entgegengesetzte Richtung: wir fangen mit einem reellen Integral ab und wir erhalten ein komplexes Integral. Dies ist natürlich nur möglich, weil wir inzwischen andere Methode zur Berechnung komplexer Integrale entwickelt haben.

Wir betrachten das Integral

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt$$

und wir erinnern uns daran, dass

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Wir benutzen jetzt die Parametrisierung  $\gamma(t) = e^{it}$ , für  $t \in [0, 2\pi]$ , so dass  $\gamma'(t) = ie^{it} dt$ . Mit der Schreibweise  $z = e^{it}$  auf  $\gamma$  erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t)) dt = \int_{\gamma} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$$

Nach diesem Umformen, können wir das Integral an der rechten Seite mithilfe des Residuensatzes berechnen.

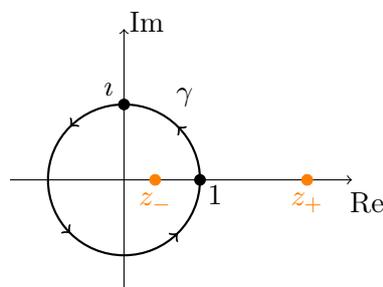
**BEISPIEL 3.44.** Wir wenden diese Methode an, um das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos(t)} dt$$

zu berechnen. Mit  $\gamma(t)$  wie oben erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos(t)} dt &= \int_{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})} \cdot \frac{1}{iz} dz \\ &= \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{1}{-\frac{1}{2}z^2 + \sqrt{2}z - \frac{1}{2}} dz \\ &= 2i \int_{\gamma} \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} dz \end{aligned}$$

Die Funktion  $F(z) = \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}$  besitzt zwei einfache Pole. Sie sind die Nullstellen von  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 1$ , d.h.  $z_{\pm} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2-1} = \sqrt{2} \pm 1$ .



Der Pol  $z_- = \sqrt{2} - 1$  ist der einzige innerhalb von  $\gamma$  und seines Residuum ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(F, z_-) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}-1} (z - (\sqrt{2} - 1)) \cdot F(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{2}-1} \frac{1}{z - (\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1 - (\sqrt{2} + 1)} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also gilt

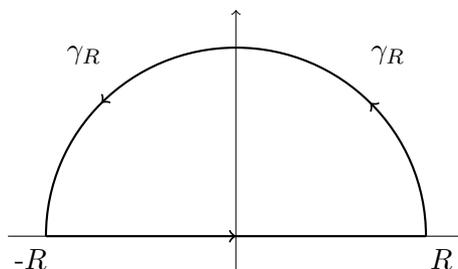
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos(t)} dt = 2i \int \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} dz = 2i \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(F, z_-) = 2\pi. \quad \square$$

**3.4.2. Uneigentliche Integrale.** In diesem Abschnitt werden wir Integrale der Art

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

betrachten.

Die Idee dieser Methode ist die folgende: wir betrachten den Pfad  $\gamma_R$ , d.h. den Halbkreis mit Radius  $R$  im ersten und zweiten Quadranten, im Gegenuhrzeigersinn orientiert.



Die Kurve  $\gamma_R * [-R, R]$  ist eine geschlossene Kurve und wir können deshalb den Residuensatz anwenden, um das Integral

$$\int_{\gamma_R * [-R, R]} f(x) dx$$

zu berechnen. Daraus folgt, dass

$$\int_{\gamma_R * [-R, R]} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n_R} \operatorname{Res}(f, z_j),$$

wobei  $z_1, \dots, z_{n_R}$  die Pole innerhalb der Kurve  $\gamma_R * [-R, R]$  sind. Aus (KI3) auf der linken Seite angewendet erhalten wir

$$\int_{\gamma_R} f(x) dx + \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n_R} \operatorname{Res}(f, z_j),$$

Wir nehmen jetzt den Limes für  $R \rightarrow \infty$ . Falls

$$(3.12) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0,$$

erhalten wir

$$(3.13) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f, z_j),$$

wobei die Summe ist jetzt über alle Pole  $z_1, \dots, z_n$  mit  $\Im(z_j) > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

DEFINITION 3.45. Der Limes

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz$$

wird als *Cauchy-Hauptwert* des Integrals  $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$  bezeichnet<sup>a</sup>

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz.$$

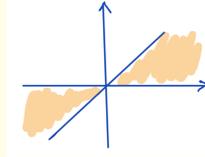
<sup>a</sup>P.V.=Principal Value

BEMERKUNG 3.46. Wir erinnern uns daran, dass die Definition vom uneigentlichen Integral lautet

$$(3.14) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx,$$

falls beide Integrale an der rechten Seite existieren. Falls beide Integrale an der rechten Seite von (3.14) existieren, existiert auch  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$ . Die Umkehrung dieser Aussage ist aber nicht wahr, wie das Beispiel von  $f(x) = x$  zeigt. D.h.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

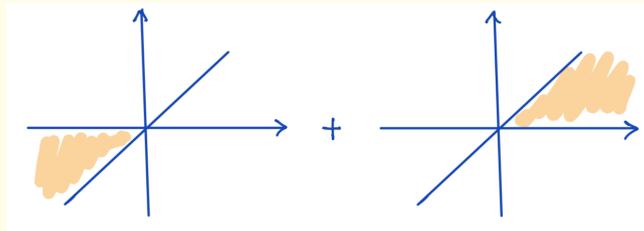


wäh-

rend

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 x \, dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x \, dx = -\infty + \infty!$$

unbestimmt ist.



An der anderen Seite, falls die Funktion  $f$  gerade ist, d.h.  $f(x) = f(-x)$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , sind beide Aussagen äquivalent. Eigentlich gilt für eine gerade Funktion

$$\int_0^R f(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(x) \, dx = \int_{-R}^0 f(x) \, dx,$$

so dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) \, dx \text{ existiert} \Leftrightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(x) \, dx \text{ existiert} \Leftrightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) \, dx$$

und

$$\boxed{P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \, dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \, dz \quad \text{für } f \text{ gerade} .}$$

Wir gehen zurück zur (3.13), die für eine allgemeine nicht unbedingt gerade Funktion  $f$  wird

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j),$$

falls (3.12) gilt. Die Frage stellt sich, ob es allgemeine Bedingungen gibt, so dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) \, dz = 0,$$

Dazu brauchen wir folgendes Lemma:

LEMMA 3.47. Sei  $\gamma_R(t) := Re^{it}$  für  $t \in [0, \pi]$ . Seien  $p$  und  $q$  Polynome mit der folgenden Eigenschaften:

$$(1) \deg(p) \leq \deg(q) - 2;$$

(2)  $q(x)$  besitzt keine Nullstellen auf der  $x$ -Achse.

Sei

$$f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} h(z).$$

wobei  $|h(z)|$  auf der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$  beschränkt ist. Dann gilt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

**BEMERKUNG 3.48.** Es gibt auch eine Version des Lemmas in den III und IV Quadranten. In diesem Fall ist  $\gamma_R(t) := \exp(it)$  für  $t \in [\pi, 2\pi]$ , und dann soll  $|h(z)|$  auf der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \leq 0\}$  beschränkt sein. (Sehen Beispiel 3.52.)

**BEWEIS.** Setze  $\deg(p) = n$ ,  $\deg(q) = m$  und sei für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\Im(z) > 0$

$$|h(z)| \leq M,$$

wobei  $M \in \mathbb{R}$  und  $M > 0$ . Dann gilt für  $z$  auf  $\gamma_R$ ,  $|z| = R$  und

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{p(z)}{q(z)} h(z) \right| = \left| \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0} h(z) \right| \\ &= \left| \frac{z^n}{z^m} \right| \cdot \left| \frac{a_n + \dots + a_0 z^{-n}}{b_m + \dots + b_0 z^{-m}} \right| \cdot |h(z)| \\ &\leq R^{n-m} \cdot C \cdot M \\ &\leq \frac{C \cdot M}{R^2}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(R, e^{it}) R i e^{it}| dt \\ &\leq \int_0^\pi \frac{C}{R^2} R dt \\ &= \pi \frac{C M}{R} \end{aligned}$$

und somit  $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| = 0$ . □

**KOROLLAR 3.49.** Sei  $\gamma_R(t) := R e^{it}$  für  $t \in [0, \pi]$ . Seien  $p$  und  $q$  Polynome mit der folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$ ;
- (2)  $q(x)$  besitzt keine Nullstellen auf der  $x$ -Achse.

Sei

$$f(z) := \frac{p(z)}{q(z)} h(z).$$

wobei  $|h(z)|$  auf der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$  beschränkt ist. Dann gilt

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} h(x) dx = 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)} h(z), z_j \right)$$

wobei  $z_j$  die Pole in der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geq 0\}$  enthalten sind.

BEISPIEL 3.50. Bestimme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

In diesem Fall sind  $p(z) = 1$ ,  $q(z) = (1+z^2)^2$  mit  $q(x) > 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , und  $h(z) = 1$ . Hier ist die Funktion  $f(z)$  gerade und dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(1+z^2)^2}, z_j \right)$$

Die Pole vom Integrand sind deshalb die Nullstellen von  $q$ , d.h.  $z_{\pm} = \pm i$  und  $z_- = i$  ist der einzige Pol, der innerhalb von  $\gamma_R * [-R, R]$  mit  $\gamma_R(t) := e^{it}$ , für  $t \in [0, \pi]$  enthalten ist. Ausserdem ist  $z_- = i$  ein Pol der Ordnung 2. Um  $\operatorname{Res} \left( \frac{1}{(1+z^2)^2}, i \right)$  zu berechnen schreiben wir

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{\phi(z)}{(z-i)^2},$$

wobei  $\phi(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ ,  $\phi$  ist holomorph um  $z = i$  und  $\phi(i) \neq 0$ . Aus dem Korollar 3.30 folgt, dass

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{\phi'(i)}{1!} = -\frac{2}{(i+i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{-i}{4}.$$

Wegen des Lemmas 3.47 schliessen wir daraus, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{1}{(1+x^2)^2}, i \right) = 2\pi i \frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \square$$

**3.4.3. Uneigentliche Integrale mit Sinus und Cosinus.** In diesem Abschnitt berechnen wir Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(\alpha t) dt \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(\alpha t) dt$$

für  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine Konstante. Der Vereinfachung halber nehmen wir an, dass  $\alpha > 0$ .

Die Methode ist ungefähr gleich wie im § 3.4.2. Wir betrachten eine geschlossene Kurve, auf der wir das Integral mithilfe des Residuensatzes berechnen werden. Als die Kurve grösser geht, wird uns ein Teil des Integrals das gesuchte Integral geben und der andere sollte nach Null gehen. Aber wegen des Lemmas 3.47 ist es klar, dass um (3.13) zu gelten,

müssen wir eine gewisse Kontrolle über das Wachstum der Funktion zu haben. Das Problem mit diesem Integral ist, dass  $|\cos(\alpha z)|$  und  $|\sin(\alpha z)|$  ein exponentielles Wachstum wie  $\sinh(\alpha y)$  oder  $e^{\alpha y}$  für  $y \rightarrow \infty$  haben, wobei  $z = x + iy$ . Die Idee ist deshalb die folgende. Wir betrachten die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cos(\alpha t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \sin(\alpha t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\alpha t} dt$$

Dies ist sehr nützlich, weil

$$\begin{aligned} e^{i\alpha z} &= \left| e^{i\alpha(x+iy)} \right| \\ &= \left| e^{i\alpha x} e^{-\alpha y} \right| \\ &= |e^{i\alpha x}| \cdot |e^{-\alpha y}| \\ &= e^{-\alpha y} < 1, \end{aligned} \tag{3.15}$$

falls  $y > 0$ . Wenn  $f(t) = \frac{p(t)}{q(t)}h(t)$  wie vorher ist, so kann man mit ähnlichen Rechnungen und mit dem Lemma 3.47 gleich vorgehen.

BEISPIEL 3.51. Bestimme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2} dt$$

für  $\alpha > 0$ .

Wir berechnen zuerst

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt \tag{3.16}$$

und dann wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2} dt = \Re \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt \right).$$

Wir bemerken, dass (3.16) gilt, weil

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt. \tag{3.17}$$

Da

$$\begin{aligned} \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \left| \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} \right| dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \left| \frac{1}{1+t^2} \right| dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan t \Big|_{-R}^0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2},$$

existieren beide Integrale an der rechten Seite von (3.16) und deshalb gilt (3.16).

Mit  $\gamma_R(t) = e^{it}$  für  $t \in [0, \pi]$  ist  $z = i$  der einzige Pol innerhalb  $\gamma_R * [-R, R]$  und er ist ein einfacher Pol.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{i\alpha z}}{z+i} = \frac{e^{-\alpha}}{2i}.$$

Aus dem Korollar 3.49 und (3.15) herleiten wir, dass

$$(3.18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \frac{e^{-\alpha}}{2i} = \pi e^{-\alpha}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2} dt = \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt\right) = \pi e^{-\alpha}$$

Wir bemerken, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{1+t^2} dt = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2} dt\right) = 0.$$

Tatsächlich mussten wir keine Berechnung durchführen, um dieses letzte Integral zu bestimmen, da der Integrand eine ungerade Funktion ist.

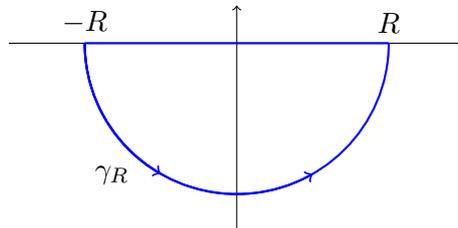
BEISPIEL 3.52. Bestimme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2} dt,$$

wobei jetzt  $\alpha < 0$  ist. Die Berechnung ist genau gleich, mit dem einzigen Unterschied, dass wir eine leicht modifizierte Version vom Lemma 3.47 und Korollar 3.49 anwenden müssen. (See Bemerkung 3.48.) Der Grund ist, dass (3.15) nicht mehr gilt. Andres gesagt, gilt noch

$$\begin{aligned} e^{i\alpha z} &= |e^{i\alpha x + iy}| \\ &= |e^{i\alpha x} e^{i\alpha y}| \\ &= |e^{i\alpha x}| \cdot |e^{-\alpha y}| \\ &= e^{-\alpha y} \end{aligned}$$

aber  $e^{-\alpha y} < 1$  mit  $\alpha < 0$  genau dann, wenn  $y < 0$ . Daher dürfen wir die Kurve  $\gamma_R(t) = e^{it}$  für  $t \in [0, \pi]$  nicht mehr verwenden, sondern müssen wir stattdessen  $\gamma_R(t) = e^{it}$  für  $t \in [\pi, 2\pi]$  verwenden.



Mit dieser Änderung gilt die Folgerung im Korollar 3.49 und erhält man

$$(3.19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2} dt = \pi e^{\alpha}.$$

Wenn wir die Notwendigkeit dieser Änderung nicht erkannt hätten, hätten wir das folgende Ergebnis gefunden

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2} dt = \pi e^{-\alpha},$$

die mit der richtigen Ergebnis (3.19) nicht übereinstimmt. Das Problem ist das folgende: wir haben Korollar 3.49 aus dem Lemma 3.47 herleitet. In diesem Fall ist aber die Funktion  $h(z) = e^{i\alpha z}$  auf der Menge  $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$  nicht beschränkt und daher geht das Integral  $\int_{\gamma_R} \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2} dz$  nicht nach 0 als  $R \rightarrow \infty$ .  $\square$

**3.4.4. Eingerückte Pfade (uneigentliche Integrale einer Funktion mit reellen Singularitäten).** Sei  $f(z)$  eine holomorphe Funktion mit einem Pol auf der reellen Achse. Wir möchten jetzt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

berechnen, falls das Integral existiert.

BEISPIEL 3.53. Wir möchten zeigen, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

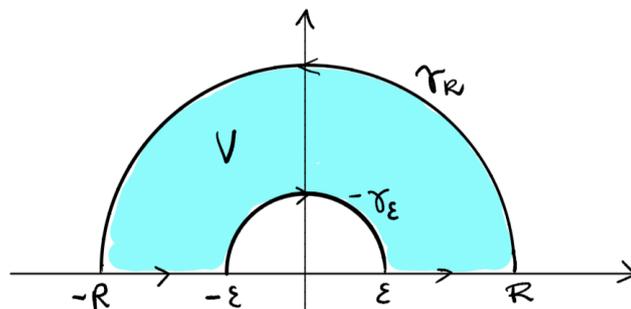
Das ist das sogenannte *Integral von Dirichlet*, das wichtig in der angewandte Mathematik und insbesondere in der Fourier-Analyse wichtig ist. Wir bemerken, dass  $\frac{\sin x}{x}$  eine gerade Funktion ist, so dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Wie im § 3.4.3 berechnen wir das gewünschten Integral als

$$(3.20) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \Im \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt \right).$$

Das Problem ist, dass die Funktion  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$  einen einfachen Pol an der Stelle  $x_0 = 0$  besitzt. Es ist klar, dass wir irgendwie den Punkt  $x_0 = 0$  "vermeiden" müssen. Zu diesem Zweck betrachten wir das folgende Gebiet  $V$



mit Rand  $\partial V$ . Da die Funktion  $f$  auf  $V$  holomorph ist, gilt wegen des Satzes von Cauchy

$$\int_{\partial V} f(z) dz = 0.$$

Aber

$$\int_{\partial V} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^{-\epsilon} f(z) dz + \int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz + \int_\epsilon^R f(z) dz,$$

wobei  $\gamma_R(t) = Re^{it}$  und  $\gamma_\epsilon(t) = \epsilon e^{it}$  beide für  $t \in [0, \pi]$ . Wir nehmen jetzt die Limes für  $\epsilon \rightarrow 0$  und  $R \rightarrow \infty$  und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{\partial V} f(z) dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{-R}^{-\epsilon} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_\epsilon^R f(z) dz, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} (3.21) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz &:= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{-R}^{-\epsilon} f(z) dz + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_\epsilon^R f(z) dz \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz. \end{aligned}$$

Das Ziel ist jetzt, diese zwei Terme

- (1)  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz$ , und
- (2)  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz$ ,

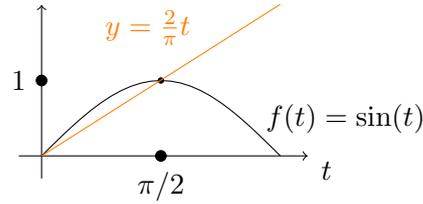
zu berechnen. Wir fangen mit dem Integral auf  $\gamma_R$  an. Mit der Parametrisierung  $\gamma_R(t) = Re^{it}$  für  $t \in [0, \pi]$  erhalten wir

$$\begin{aligned} (3.22) \quad \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} \cdot iR e^{it} dt \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| e^{iR(\cos(t)+i\sin(t))} \right| dt \\ &= \int_0^\pi \left| e^{iR\cos(t)} \cdot e^{-R\sin(t)} \right| dt \\ &= \int_0^\pi e^{-R\sin(t)} dt \end{aligned}$$

Um dieses Integral zu schätzen, wir bemerken, dass die Ungleichung

$$(3.23) \quad \sin t \geq \frac{2t}{\pi}$$

für jedes  $t \in [0, \pi/2]$  gilt.



Aus (3.22) und (3.23) folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi e^{-R \sin(t)} dt \\
 &= 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin(t)} dt \\
 (3.24) \quad &\leq 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-R \frac{2t}{\pi}} dt \\
 &= 2 \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2Rt}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}) = 0.
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung des zweiten Integrals brauchen wir das folgende Lemma 3.54, aus dem folgt, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, 0).$$

Wir nehmen diese Ergebnis an, und führen den Beweis zum Ende. Da  $e^{iz}$  eine ganze Funktion ist, ist  $z = 0$  ein einfacher Pol von  $\frac{e^{iz}}{z}$ . Da

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^{iz} = 1,$$

folgt aus (3.21) und (3.24), dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i.$$

Wegen (3.20) gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \Im \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{t} dt \right) = \pi,$$

so dass

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Bevor wir zum Lemma übergehen, möchten wir darauf hinweisen, dass man die Versuchung für die Berechnung des Integrals in (1) haben könnte, eine Schätzung zu verwenden, die der in § 3.4.2 und § 3.4.3 ähnlich ist. Aber

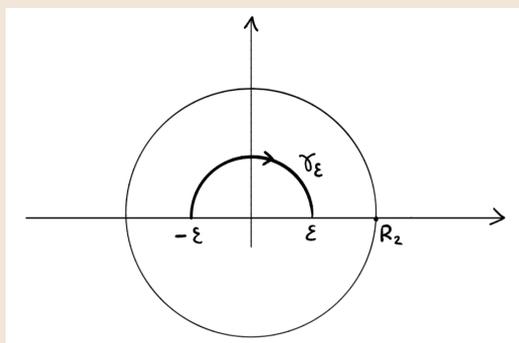
$$\left| e^{iR e^{it}} \right| = \left| e^{iR(\cos(t) + i \sin(t))} \right| = \left| e^{iR \cos(t) - R \sin(t)} \right| = \left| e^{iR \cos(t)} \right| \cdot \left| e^{-R \sin(t)} \right| = e^{-R \sin(t)} \leq 1,$$

so dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\pi \left| \frac{e^{iz}}{z} \right| dt \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \pi R = \pi \neq 0.$$

Diese Methode funktioniert hier nicht, weil  $p(z) = 1$ ,  $q(z) = z$  und  $\deg(q) = \deg(p) + 1$  anstatt  $\deg(q) = \deg(p) + 2$ .  $\square$

LEMMA 3.54. Sei  $f$  eine holomorphe Funktion auf  $B(x_0, R_2) \setminus \{x_0\}$ , wobei  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $R_2 > 0$ . Nehmen wir an, dass  $x_0$  ein einfacher Pol von  $f$  ist. Sei  $\gamma_\epsilon$  ein im Gegenurhzeigersinn durchgelaufener Halbkreis um  $x_0$  mit  $\Im(\gamma_\epsilon) > 0$  und  $\epsilon < R_2$ .



Dann

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

BEWEIS. Da die Funktion  $f$  auf  $B(x_0, R_2) \setminus \{x_0\}$  holomorph ist, besitzt  $f$  dort eine Laurent-Reihenentwicklung

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - x_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - x_0)^n,$$

wobei die Reihe an der rechten Seite eine stetige Funktion

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - x_0)^n$$

darstellt. Daraus folgt, dass es eine Konstante  $C$  mit

$$\max\{|g(z)| : |z - x_0| \leq \epsilon\} =: C < \infty.$$

gibt, so dass aus (KI6)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz \right| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C \cdot \pi \epsilon = 0.$$

An der anderen Seite, sei  $\gamma_\epsilon(t) := x_0 + \epsilon e^{it}$ , für  $t \in [0, \pi]$  eine Parametrisierung von  $\gamma_\epsilon$ . Dann

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{c_{-1}}{z - x_0} dz = c_{-1} \int_0^\pi \frac{i\epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}} dt = \pi i \operatorname{Res}(f, x_0).$$

□

BEMERKUNG 3.55. In diesem Fall bestimmen wir wirklich das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$$

und nicht nur

$$(3.25) \quad P.V. \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz,$$

auch wenn die Funktion nicht gerade ist. Man könnte diese Methode auch in § 3.4.2 und § 3.4.3 verwenden, um das uneigentliche Integral zu berechnen (und nicht nur seinen P.V.). Andererseits wäre es aufgrund des Pols auf der  $x$ -Achse nicht möglich, Methoden wie in § 3.4.2 und § 3.4.3 anzuwenden, um (3.25) für Funktionen wie in § 3.4.4 zu berechnen.

## Fourier Analysis

### 4.1. Fourier-Reihen

Die Fourierreihen werden sich als mächtiges Hilfsmittel in vielen verschiedenen Fächer erweisen: signal processing, approximation theory, control theory, usw. Zum Beispiel, wie verschickt man Audio-Recording über das Internet? Die ganze Datei ist enorm gross. Die Lösung ist, Fourier Reihen und Transformationen zu benützen. Jedes Signal kann in eine Summe von Wellen (Sinuskurven) zerlegt werden. Da die Fourier Reihen und Transformierte “schnell” konvergieren, reicht es nur die ersten paar Koeffizienten, d.h. die “wichtigen” Frequenzen, zu übermitteln, weil die Anderen nicht so viel Einfluss haben. Wir werden bald ein Beispiel sehen.

Fourier-Reihen bezieht sich auf Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Definitionsbereich translationssymmetrisch ist.

DEFINITION 4.1. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Falls es  $p \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$f(t+p) = f(t) \text{ für jedes } t \in \mathbb{R},$$

heisst  $f$  *periodisch* und  $p$  heisst die *Periode* von  $f$ . Die *Frequenz* von  $f$  ist

$$f = \frac{1}{p}.$$

Die kleinste Periode (falls sie existiert) heisst die *Fundamentalperiode*.

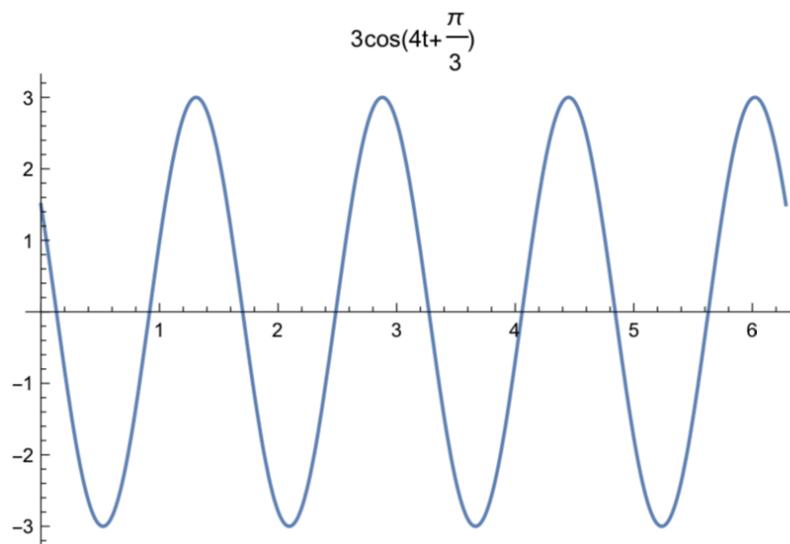
Die Frequenz ist wie oft ein Phänomen in einer bestimmten Periode auftritt und die Periode ist der Abstand zwischen dem Auftreten zweier gleichen Phänomene.

BEISPIELE 4.2. (1) Die Funktionen  $\cos t$  und  $\sin t$  sind periodisch mit Fundamentalperiode  $2\pi$ . Alle ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi$  sind auch Perioden. Die Funktionen  $\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$  und  $\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$  sind periodisch mit Fundamentalperiode  $\frac{2L}{n}$  (und insbesondere mit Fundamentalperiode  $2L$  falls  $n = 1$ ). Eigentlich gilt

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}\left(t + \frac{2L}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}t + \frac{2\pi nL}{nL}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}t + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$$

- (2) Die Funktion  $e^{mnt}$ , für  $n \in \mathbb{Z}$  ist periodisch mit Periode  $2\pi$ .  
 (3)  $f(t) = c$  mit  $c \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist auch periodisch, aber sie hat keine Fundamentalperiode.

- (4) Der Wechselstrom  $w(t) = A \cos(\omega t + \alpha)$  mit Kreisfrequenz  $\omega$ , Amplitude  $A$  und Nullphasenwinkel<sup>1</sup> $\alpha$  hat Periode  $\frac{2\pi}{\omega}$ .



$$\cos\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \alpha\right) = \cos((\omega t + 2\pi) + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha)$$

Die Funktionen in (1) und (2) sind die einfachsten Beispiele periodischer Funktionen, aber auch die wichtigsten, weil jede  $2\pi$ -periodische Funktion eine Reihenentwicklung mit  $\cos t$  und  $\sin t$  oder mit  $e^{it}$  hat.

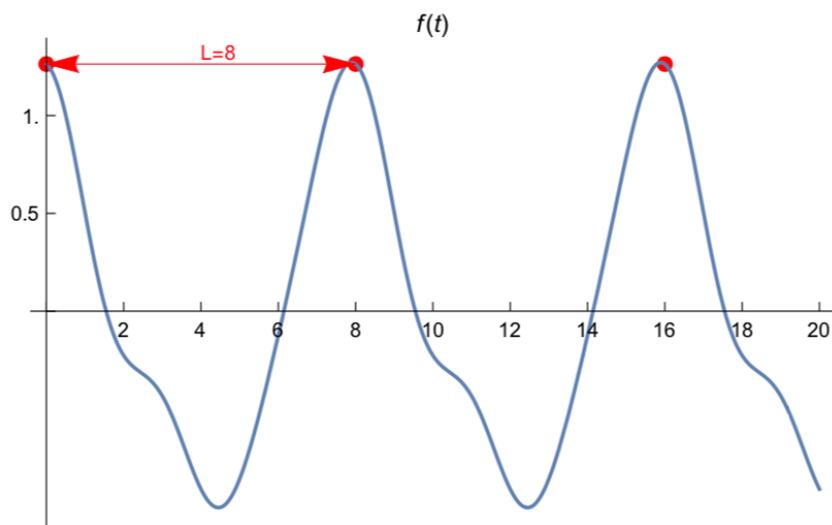
**BEMERKUNG 4.3.** Die Summe periodischer Funktionen ist immer dann periodisch, wenn die Perioden aller Summanden ein gemeinsames Vielfaches haben. In diesem Fall ist die Periode das (kleinste) gemeinsame Vielfache. Gleichermassen für das Produkt aus periodischen Funktionen.

**BEISPIEL 4.4.** Wir betrachten die Funktion

$$f(t) := \cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + \frac{1}{4}\cos\left(2\frac{2\pi}{L}t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{10}\cos\left(3\frac{2\pi}{L}t - \frac{\pi}{6}\right),$$

die drei Cosinusschwingungen zusammensetzt. Die erste hat Periode  $L_1 = L$ , die zweite  $L_2 = \frac{L}{2}$  und die dritte  $L_3 = \frac{L}{3}$ . Die Periode der Summe ist die des Cosinus mit der grössten Periode,  $L=L$ .

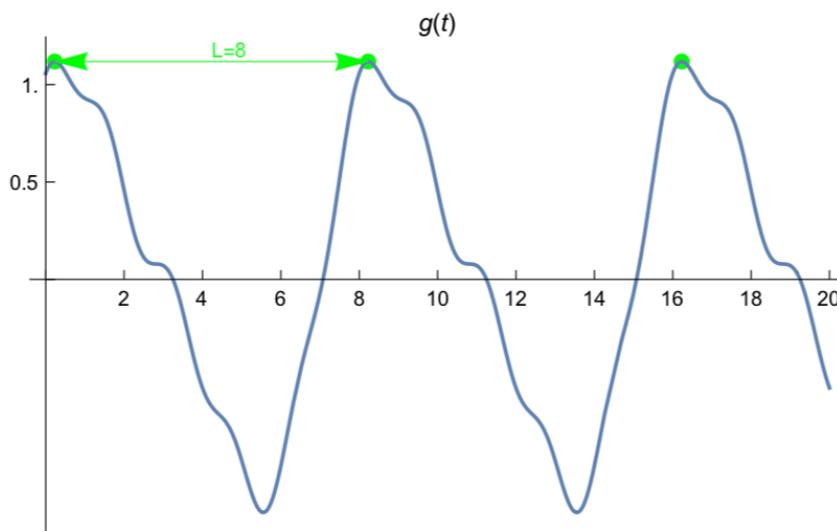
<sup>1</sup>Der Phasenwinkel ist  $\omega t + \alpha$  und der Nullphasenwinkel ist der Phasenwinkel zum Zeitpunkt  $t = 0$ .



Die Cosinusschwingung  $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$  heisst die *Grundschiwingung*. Jede Schwingung ist auch *Harmonische* genannt (Definition 4.10).

Falls wir die Amplituden und die Nullphasenwinkel der einzelnen Harmonischen verändern, bleibt das Resultat eine periodische Funktion mit Periode  $L = L_1$ , die Form der Funktion verändert sich jedoch. Hier ist zum Beispiel der Graph der Funktion

$$g(t) := \cos\left(\frac{2\pi}{L}t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(2\frac{2\pi}{L}t\right) + \frac{1}{10}\cos\left(5\frac{2\pi}{L}t\right),$$

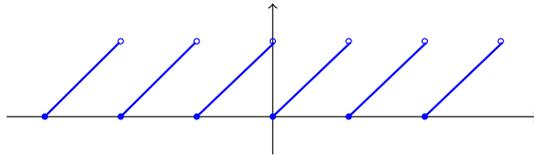


Wir können auch weiteren Harmonische mit Frequenz noch grösseres ganzzahligen Vielfachen von  $f_1 = \frac{1}{L_1}$  hinzufügen und die Periode der Funktion würde sich nicht verändern.

Das Zusammensetzen von Harmonischen in einer periodischen Funktion heisst *Fouriersynthese*. Um ein periodisches Signal zu beschreiben, ist es genug, wenn man die Perioden  $L_k$ , die Amplitude und die Nullphasenwinkel für jede Harmonische gibt.

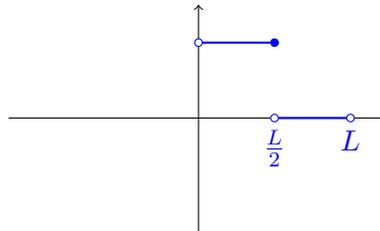
Es gibt auch die umgekehrte Aufgabe zur Fouriersynthese, die *Fourieranalyse* oder *Fourierzerlegung* genannt wird. Zum Beispiel kann ein Ausschnitt aus dem Klang der schwingenden Saite eines Saiteninstruments mit einem Klanganalysator aufgezeichnet und analysiert werden. Der Klanganalysator liefert das sogenannte *Amplitudenspektrum*, d.h. die Frequenz und die Amplitude jeder Harmonischen. Um Audio-Recording über das Internet zu verschicken, können wir einfach das Amplitudenspektrum verschicken.  $\square$

Sei  $f$  eine Funktion, die auf einem endlichen Intervall definiert ist. Dann kann man  $f$  periodisch fortsetzen. Zum Beispiel kann  $f(t) = t$ , für  $t \in [0, 1)$  fortgesetzt werden, um zu  $F(t) := \{t\}$  zu erhalten, wobei  $\{t\}$  die Nachkommaanteil von  $t$  bezeichnet.

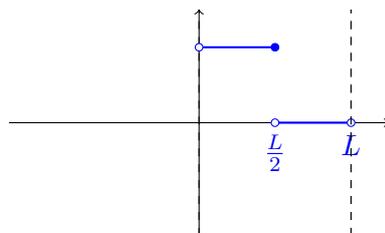


BEISPIEL 4.5. Wir betrachten die Funktion  $f : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}$  so definiert

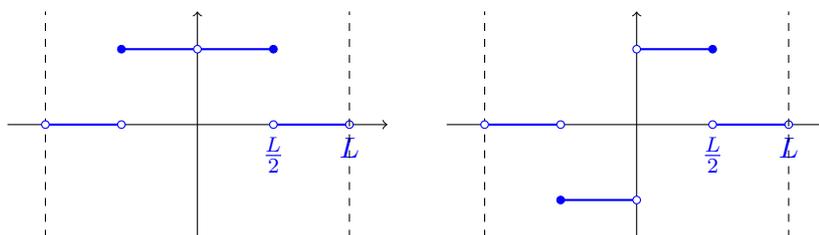
$$f(t) := \begin{cases} 1 & t \in (0, \frac{L}{2}] \\ 0 & t \in (\frac{L}{2}, L) \end{cases} .$$



Man kann  $f(t)$  auf der ganzen reellen Achse als eine periodische Funktion fortsetzen. Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, um es zu machen. Die erste ist als eine Fortsetzung eine  $L$ -periodische Funktion



und die anderen zwei als eine  $2L$ -periodische Funktion.



Wir werden sehen, dass die Möglichkeit eine auf einem beschränkten Intervall definierte Funktion fortzusetzen, sehr wichtig ist.

DEFINITION 4.6. Ein *trigonometrisches Polynom*  $N$ -ten Grades ist eine endliche Linearkombination

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right)$$

von Funktionen in der Menge

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right), \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\},$$

wobei  $a_N \neq 0$  oder  $b_N \neq 0$ , oder, äquivalent, eine endliche Linearkombination

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

von Funktionen in der Menge

$$\left\{ e^{i\frac{n\pi}{L}t} : n \in \mathbb{Z} \right\},$$

wobei  $c_N \neq 0$ . Eine formelle Reihe

$$(4.1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right)$$

oder

$$(4.2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

heißt eine *trigonometrische Reihe*.

In diesem Kapitel geht es darum,  $2L$ -periodische Funktionen, durch trigonometrische Polynome zu approximieren oder durch eine trigonometrische Reihe darzustellen. Präziser ausgedrückt stellen sich folgende Fragen:

- (1) Welche  $2L$ -Periodischen Funktionen können durch trigonometrische Reihen dargestellt werden? Und im welchen Sinn sollten wir "darstellen" verstehen? Zum

Beispiel möchten wir schreiben

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} t} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{n\pi}{L} t},$$

aber was ist die Bedeutung der linken Gleichung, falls  $f$  Sprungstellen hat? Die Funktionen auf der rechten Seite sind alle stetig! Solange wir diese Beziehung nicht erklärt haben, schreiben wir

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} t}$$

- (2) Falls  $f$  eine Fourier-Reihe Entwicklung der Art (4.2) (bzw. (4.1)) besitzt, wie kann man die Koeffizienten  $c_n$  (bzw.  $a_k$  und  $b_k$ ) bestimmen?

Die Antwort zur zweiten Frage ist einfach zu finden. Wir müssen zuerst das folgende Lemma zeigen:

LEMMA 4.7 (Orthogonalitätsrelationen für  $e^{i \frac{n\pi}{L} t}$ ). Seien  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i \frac{n\pi}{L} t} e^{-i \frac{m\pi}{L} t} dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

BEWEIS. Falls  $n = m$  gilt

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i \frac{n\pi}{L} t} e^{-i \frac{n\pi}{L} t} dt = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L 1 dt = 1.$$

Andererseits gilt falls  $n \neq m$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i \frac{n\pi}{L} t} e^{-i \frac{m\pi}{L} t} dt &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} t} dt \\ &= \frac{1}{2L} \frac{L}{i(n-m)\pi} e^{i \frac{(n-m)\pi}{L} t} \Big|_{-L}^L \\ &= \frac{1}{2\pi(n-m)} \left( e^{i(n-m)\pi} - e^{-i(n-m)\pi} \right) \\ &= \frac{i}{\pi(n-m)} \sin((n-m)\pi) = 0. \end{aligned}$$

□

Das entsprechende Lemma für  $\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$  und  $\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$  ist ein bisschen nervtötend.

LEMMA 4.8 (Orthogonalitätsrelationen für  $\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$  und  $\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$ ). Seien  $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Dann gilt

(1)

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}t\right) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0 \\ 2L & n = m = 0. \end{cases}$$

(2)

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}t\right) dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ L & n = m \neq 0. \end{cases}$$

(3)

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}t\right) dt = 0, \text{ für jedes } n, m.$$

BEWEIS. Der Einfachheit halber, betrachten wir den Fall  $2L = 2\pi$ . Falls  $n = m = 0$ , dann gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Mithilfe der trigonometrischen Identitäten

$$\begin{aligned} \cos nt \cos mt &= \frac{1}{2} \cos((n+m)t) + \frac{1}{2} \cos((n-m)t) \\ \sin nt \sin mt &= \frac{1}{2} \cos((n-m)t) - \frac{1}{2} \cos((n+m)t) \\ \sin nt \cos mt &= \frac{1}{2} \sin((n+m)t) + \frac{1}{2} \sin((n-m)t), \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t) dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t) dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n+m} \sin((n+m)t) + \frac{1}{n-m} \sin((n-m)t) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} & n \neq m \\ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt & n = m \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} 0 = 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ähnlich gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)t) dt - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)t) dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} 0 = 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \neq 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)t) \, dt + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-m)t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{m+n} \cos((m+n)t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{-1}{m-n} \cos((m-n)t) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Für theoretische Betrachtungen ist die komplexe Schreibweise unbedingt vorzuziehen. In konkrete Beispielen jedoch geht es meistens um reellwertige Funktionen, und die reelle Schreibweise kann besser die vorhandenen Symmetrien reproduzieren: Ist  $f$  reellwertig, so sind auch alle  $a_k$  und alle  $b_k$  reell; ist  $f$  gerade, so treten nur Cosinusterme auf, und ist  $f$  ungerade, so treten nur Sinusterme auf (§ 4.1.3). Zum Glück sind die zwei Schreibweisen (4.1) und (4.2) äquivalent. Um es zu sehen, setzen wir der Einfachheit halber

$$\frac{n\pi}{L}t =: t_n$$

für  $n > 0$ . Mithilfe der Euler'schen Formel

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

oder

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{und} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

schreiben wir für  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n \cos t_n + b_n \sin t_n &= a_n \frac{e^{it_n} + e^{-it_n}}{2} + b_n \frac{e^{it_n} - e^{-it_n}}{2i} \\ &= e^{it_n} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n - ib_n)}_{=: c_n} + e^{-it_n} \underbrace{\frac{1}{2}(a_n + ib_n)}_{=: k_n} \\ &= c_n e^{it_n} + k_n e^{-it_n}. \end{aligned}$$

Wir setzen auch  $c_0 := \frac{a_0}{2}$ ,  $c_{-n} = k_n$  und  $b_0 = 0$ . Wir können deshalb die Beziehung zwischen den  $a_n$ ,  $b_n$  und  $c_n$  für  $n \neq 0$  so zusammenfassen:

$$(4.3) \quad \boxed{\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \\ a_n &= c_n + c_{-n} & b_n &= i(c_n - c_{-n}). \end{aligned}}$$

**SATZ 4.9.** Sei  $f$  eine  $2L$ -Periodische Funktion, die durch eine trigonometrische Reihe

$$(4.4) \quad \boxed{f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right)}$$

oder

$$(4.5) \quad f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} t}.$$

dargestellt werden kann. Dann gilt

$$(4.6) \quad a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{m\pi}{L} t\right) dt, \text{ falls } m \geq 0$$

$$(4.7) \quad b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{m\pi}{L} t\right) dt, \text{ falls } m > 0$$

und

$$(4.8) \quad c_m = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i \frac{m\pi}{L} t} dt, \text{ falls } m \in \mathbb{Z}.$$

DEFINITION 4.10.

$\frac{a_0}{2}$  ist der Mittelwert von  $f$  auf einer Periode  
 $a_1 \cos\left(\frac{\pi}{L} t\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi}{L} t\right)$  ist die 1. Harmonische oder Grundschiwingung  
 $a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right)$  ist die  $n$ . Harmonische oder  $(n-1)$ . Oberschiwingung

BEWEIS. Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Wir multiplizieren (4.5) mit  $e^{i \frac{m\pi}{L} t}$  und integrieren auf dem Intervall  $[-L, L]$  (oder auf einem beliebigen Intervall der Länge  $2L$ ) und erhalten mithilfe der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-L}^L f(t) e^{i \frac{m\pi}{L} t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-L}^L e^{i \frac{m\pi}{L} t} e^{i \frac{n\pi}{L} t} dt = \begin{cases} 2L c_m & n = m \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

Um (4.6) und (4.7) zu erhalten können wir ein ähnliches Argument wie oben führen oder (4.3) benutzen. Mithilfe von (4.3) für  $m \geq 0$  und die gerade bewiesene (4.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a_m - i b_m) &= c_m \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i \frac{m\pi}{L} t} dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \left( \cos\left(-\frac{m\pi}{L} t\right) + i \sin\left(-\frac{m\pi}{L} t\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{m\pi}{L} t\right) dt - i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{m\pi}{L} t\right) dt, \end{aligned}$$

woraus (4.6) und (4.7) folgen, indem wir den Real- und Imaginärteil nehmen.  $\square$

**4.1.1. Ein bisschen Theorie.** Die stückweise stetigen,  $\mathbb{C}$ -wertigen,  $2L$ -periodischen Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  bilden einen unendlich dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Wir nennen ihn  $\mathcal{V}$ . Wir haben sogar noch mehr Struktur, anhand derer wir unsere bisherigen und künftigen Ergebnisse interpretieren können:

DEFINITION 4.11. Für  $f, g \in \mathcal{V}$  definieren wir das *Skalarprodukt*

$$(4.9) \quad \langle f, g \rangle := \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Wir nennen  $f$  und  $g$  *orthogonal* falls  $\langle f, g \rangle = 0$ . Die Formel

$$(4.10) \quad \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

definiert eine *Norm* auf  $\mathcal{V}$ .

Wir erinnern uns an der Definition von einem komplexen Skalarprodukt und einer Norm und wir überlassen es dem Leser zu überprüfen, ob die in (4.9) und (4.10) definierten Funktionen diese Eigenschaften erfüllen:

DEFINITION 4.12. Sei  $V$  ein beliebiger komplexer Vektorraum.

- (1) Ein komplexes Skalarprodukt ist eine Funktion  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} \langle \lambda f, g \rangle &= \lambda \langle f, g \rangle \quad \text{und} \quad \langle f, \lambda g \rangle = \overline{\lambda} \langle f, g \rangle \\ \langle f, g \rangle &= \overline{\langle g, f \rangle} \\ \langle f_1 + f_2, g \rangle &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle \\ \langle f, f \rangle &\geq 0 \\ \langle f, f \rangle &= 0 \text{ und } f \text{ stetig} \Leftrightarrow f = 0 \end{aligned}$$

- (2) Eine Norm auf  $V$  ist eine Funktion  $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{aligned} \|\lambda f\| &= |\lambda| \cdot \|f\| \\ \|f + g\| &\leq \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Das Lemma 4.7 sagt dann, dass die Menge der Funktionen

$$\left\{ \mathbf{e}_{n,L} := e^{i \frac{n\pi}{L} t} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

eine *orthonormierte* Menge ist, d.h. die Funktionen sind orthogonal zu einander

$$(4.11) \quad \langle \mathbf{e}_{n,L}, \mathbf{e}_{m,L} \rangle = 0 \text{ falls } n \neq m$$

und ihre Norm ist eins

$$(4.12) \quad \|\mathbf{e}_{n,L}\| = 1.$$

Laut des Satzes 4.9 bilden die  $\mathbf{e}_{n,L}$ 's eine *Hilbert Basis* von  $\mathcal{V}$  und

$$c_n = \langle f, \mathbf{e}_{n,L} \rangle$$

ist die Projektion von  $f$  auf den  $n$ -ten Basisvektor. Die Fourier-Reihe ist also nichts anderes als die Darstellung von  $f$  in dieser Basis.

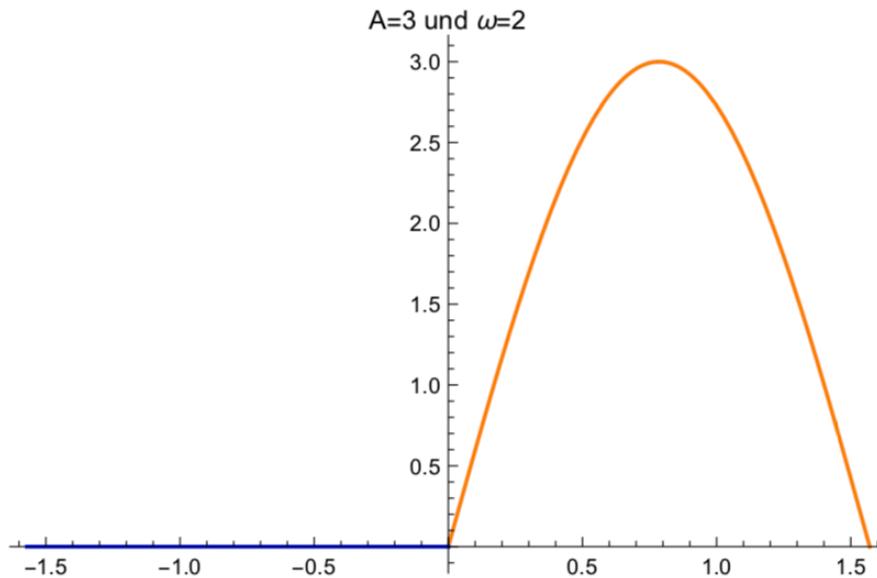
#### 4.1.2. Beispiele.

BEISPIEL 4.13. Sei

$$f(t) := \begin{cases} A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ 0 & t \in [-\frac{\pi}{\omega}, 0] \end{cases}$$

die Funktion, die einen Wechselstrom mit Kreisfrequenz  $\omega$  und Nullphasenwinkel  $\frac{\pi}{2}$  beschreibt. Wir möchten die Fourier-Reihe von  $f$  finden, falls sie existiert. Wir bemerken, dass die Funktion  $\cos t$  gerade ist, aber die Funktion  $f$  nicht. Dies ist aus zwei verschiedenen Gründen: die Funktion  $\cos t$  ist verschoben, so dass  $\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$  nicht mehr gerade ist, und die Funktion ist gleich null auf einem Teil des Definitionsbereich. Hier ist die Periode  $2L = \frac{2\pi}{\omega}$ , so dass  $L = \frac{\pi}{\omega}$  und

$$\frac{\pi k}{L} = \frac{k\pi\omega}{\pi} = k\omega.$$



Auf dem Intervall  $[0, \frac{\pi}{\omega}]$  gilt

$$f(t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A \sin(\omega t),$$

so dass

$$f(t) = \begin{cases} A \sin(\omega t) & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}] \\ 0 & t \in [-\frac{\pi}{\omega}, 0] \end{cases}$$

Jetzt ist  $\sin(\omega t)$  ungerade, aber der zweite Grund bleibt noch. Wegen des Satzes 4.17 (2), besitzt  $f$  die Fourier-Reihe

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)),$$

wobei

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} A \sin(\omega t) \cos(k\omega t) dt$$

und

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} A \sin(\omega t) \sin(k\omega t) dt.$$

$k = 0$

$$a_0 = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t) dt = \frac{A\cancel{\omega} - 1}{2\pi \cancel{\omega}} \cos(\omega t) \Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{2A}{\pi}.$$

Um die Koeffizienten zu berechnen, bemerken wir, dass

$$\sin(\omega t) \cos(k\omega t) = \frac{1}{2} [\sin((1+k)\omega t) + \sin((1-k)\omega t)],$$

so dass

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} A \sin(\omega t) \cos(k\omega t) dt = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin((1+k)\omega t) + \sin((1-k)\omega t)] dt$$

$k = 0$

$$a_0 = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t) dt = \frac{A\cancel{\omega} - 1}{2\pi \cancel{\omega}} \cos(\omega t) \Big|_0^{\pi/\omega} = \frac{2A}{\pi}.$$

$k = 1$

$$a_1 = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} \sin(2\omega t) dt = \frac{A\omega}{2\pi} \frac{1}{2\omega} \cos(2\omega t) \Big|_0^{\pi/\omega} = 0.$$

$k \geq 2$ 

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin((1+k)\omega t) + \sin((1-k)\omega t)] dt \\
&= \frac{A\omega}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+k)\omega} \cos((1+k)\omega t) \Big|_{\pi/\omega}^0 + \frac{1}{(1-k)\omega} \cos((1-k)\omega t) \Big|_{\pi/\omega}^0 \right] \\
&= \frac{A\omega}{2\pi} \left[ \frac{1 - \cos((1+k)t)}{(1+k)\omega} + \frac{1 - \cos((1-k)t)}{(1-k)\omega} \right] \\
&= \frac{A}{2\pi} \frac{(1 - k - \cos((1+k)\pi) + k \cos((1+k)\pi) + 1 + k - \cos((1-k)\pi) - k \cos((1-k)\pi))}{(1+k)(1-k)} \\
&= \frac{A}{2\pi} \frac{2 + k[\cos((1+k)\pi) - \cos((1-k)\pi)] - \cos((1+k)\pi) - \cos((1-k)\pi)}{(1+k)(1-k)} \\
&= \frac{A}{2\pi} \frac{2 - \cos((1+k)\pi) - \cos((1-k)\pi)}{(1+k)(1-k)} \\
&= \begin{cases} \frac{A}{2\pi} \frac{2-1-1}{(1+k)(1-k)} = 0 & k \text{ ungerade} \\ \frac{A}{2\pi} \frac{2-(-1)-(-1)}{(1+k)(1-k)} = \frac{2A}{\pi(1+k)(1-k)} & k \text{ gerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir  $b_k$  berechnen. Wir bemerken, dass

$$\sin(\omega t) \sin(k\omega t) = \frac{1}{2} [-\cos((1+k)\omega t) + \cos(1-k)\omega t],$$

so dass

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} A \sin(\omega t) \sin(k\omega t) dt = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [-\cos((1+k)\omega t) + \cos(1-k)\omega t] dt.$$

 $k = 1$ 

$$b_1 = \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [-\cos(2\omega t) + 1] dt = \frac{A\omega}{2\pi} \frac{\pi}{\omega} = \frac{A}{2}.$$

 $k \geq 1$ 

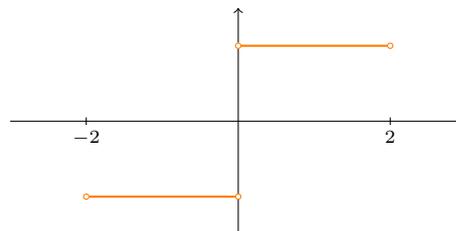
$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{A\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [-\cos((1+k)\omega t) + \cos(1-k)\omega t] dt \\
&= \frac{A\omega}{2\pi} \left[ \frac{1}{(1+k)\omega} \sin((1+k)\omega t) \Big|_{\pi/\omega}^0 + \frac{1}{(1-k)\omega} \sin((1-k)\omega t) \Big|_0^{\pi/\omega} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Fourier-Reihen Entwicklung von  $f$  ist

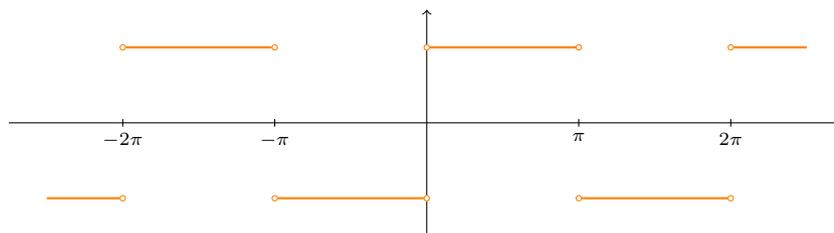
$$f(t) \sim \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin(\omega t) + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{(1+2k)(1-2k)}. \quad \square$$

BEISPIEL 4.14. Wir möchten die Fourier-Reihe vom "Rechtecksignal"

$$f(t) := \begin{cases} -k & -\pi < x < 0 \\ k & 0 < x < \pi, \end{cases}$$



berechnen, falls  $f$  fortgesetzt wird, um eine Funktion mit Periode  $2\pi$  zu haben.



In diesem Fall gilt  $a_0 = 0$ , da  $f$  ungerade ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \\ &= \frac{k}{\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 \cos mx \, dx + \int_0^{\pi} \cos mx \, dx \right) dx \\ &= \frac{k}{m\pi} \left( - \sin mx \Big|_{-\pi}^0 + \sin mx \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{k}{m\pi} (\sin(m(-\pi)) + \sin(m\pi)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Gleichermassen gilt

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \\ &= \frac{k}{\pi} \left( - \int_{-\pi}^0 \sin mx \, dx + \int_0^{\pi} \sin mx \, dx \right) dx \\ &= \frac{k}{m\pi} \left( \cos mx \Big|_{-\pi}^0 - \cos mx \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{k}{m\pi} (1 - \cos(-m\pi) - \cos(m\pi) + 1) \\ &= \frac{2k}{m\pi} (1 - \cos m\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{4k}{m\pi} & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

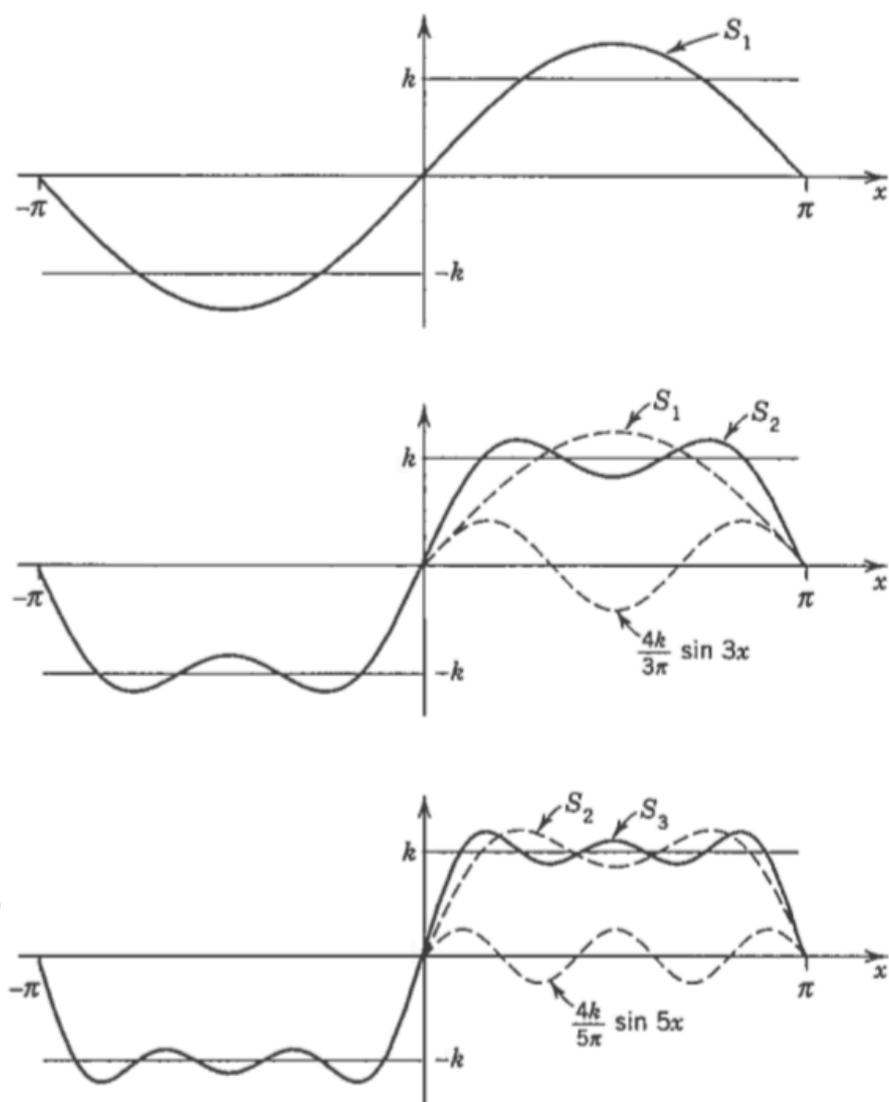


ABBILDUNG 1. Die erste drei Partialsummen der Fourier-Reihe der Funktion in Beispiel 4.14

Die Fourier-Reihe Entwicklung der Funktion  $f$  ist

$$\frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right)$$

und man kann die erste drei Partialsummen in Abb. 1 sehen. □

**4.1.3. Die Fourier-Reihen Entwicklung einer geraden oder ungeraden Funktion.** Es ist nicht überraschend, dass die Fourier-Reihen Entwicklung einer ungerade Funktion nur die Terme mit  $\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$  enthält.

Wir erinnern uns an der folgenden Definition und Eigenschaften.

DEFINITION 4.15. Eine Funktion  $f$  heisst:

- (1) *gerade* falls  $f(t) = f(-t)$
- (2) *ungerade* falls  $f(t) = -f(-t)$

für jedes  $t$  im Definitionsbereich.

BEMERKUNG 4.16. (1) Der Definitionsbereich einer gerade oder ungerade Funktion muss unbedingt ein symmetrisches bezüglich des Ursprungs Intervall sein.

- (2) Der Graph einer geraden Funktion (z.B.  $\cos t$ ) ist symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse und der Graph einer ungeraden Funktion (z.B.  $\sin t$ ) ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs.
- (3) Das Produkt zweier geraden oder zweier ungeraden Funktionen ist gerade, und das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.
- (4) Falls  $g$  gerade ist, gilt

$$\int_{-L}^L g(t) dt = 2 \int_0^L g(t) dt .$$

- (5) Falls  $g$  ungerade ist, gilt

$$\int_{-L}^L g(t) dt = 0 .$$

SATZ 4.17. Sei  $f$  eine  $2L$ -periodische Funktion mit Fourier-Reihen Entwicklung (4.4).

- (1) Falls  $f$  gerade ist, sind alle  $b_n = 0$  und

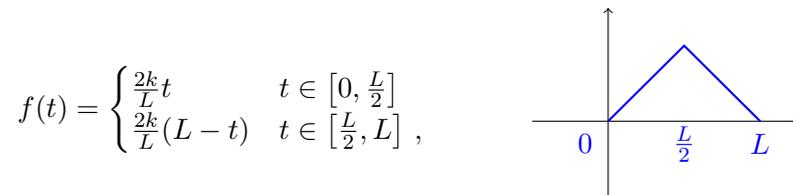
$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \text{ für } n \geq 0 .$$

- (2) Falls  $f$  ungerade ist, sind alle  $a_n = 0$  und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \text{ für } n \geq 1 .$$

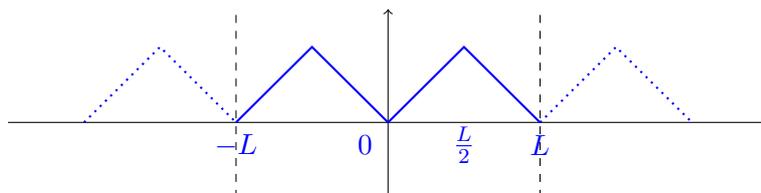
Manchmal haben wir eine Funktion, die auf einem Intervall definiert ist. Wir können also die Funktion auf der ganzen reellen Achse fortsetzen.

BEISPIEL 4.18. Wir berechnen die Fourier-Reihen Entwicklung der Funktion



- (1) als eine gerade periodische Funktion mit Periode  $2L$ , und
- (2) als eine ungerade periodische Funktion auch mit Periode  $2L$ .

*Fortsetzung als eine gerade periodische Funktion.* Wir setzen  $f(t) = f(-t)$  für  $t \in [-L, 0]$ . Dann gilt  $f(t + 2L) = f(t)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Wir bemerken, dass  $2L$  keine Fundamentalperiode ist, weil die Funktion auch  $L$ -periodisch ist.



Aus dem Satz 4.17 (1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 b_n &= 0 \\
 a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} \frac{2k}{L} t dt + \frac{1}{L} \int_{L/2}^L \frac{2k}{L} (L-t) dt \\
 &= \frac{2k}{L^2} \frac{1}{2} \frac{L^2}{4} - \frac{2k}{L^2} \frac{1}{2} (L-t)^2 \Big|_{L/2}^L = \frac{k}{4} + \frac{k}{L^2} \frac{L^2}{4} = \frac{1}{2} k, \\
 a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt \\
 &= \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{2k}{L} t \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt + \frac{2}{L} \int_{L/2}^L \frac{2k}{L} (L-t) \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{4k}{L^2} \left( \frac{L}{n\pi} t \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \right) \Big|_0^{L/2} + \frac{4k}{L} \int_{L/2}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt \\
 &\quad - \frac{4k}{L^2} \left( \frac{L}{n\pi} t \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) \right) \Big|_{L/2}^L \\
 &= \frac{2k}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4k}{n^2\pi^2} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4k}{n^2\pi^2} \\
 &\quad + \frac{4k}{n\pi} \sin n\pi - \frac{4k}{n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \\
 &\quad - \frac{4k}{L^2} \left( \frac{L^2}{n\pi} \sin n\pi - \frac{L^2}{2n\pi} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left( \cos n\pi - \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \underbrace{\left( \frac{2k}{n\pi} - \frac{4k}{n\pi} + \frac{2k}{n\pi} \right)}_{=0} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) + \underbrace{\left( \frac{4k}{n^2\pi^2} + \frac{4k}{n^2\pi^2} \right)}_{=\frac{8k}{n^2\pi^2}} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) \\
 &\quad + \underbrace{\left( \frac{4k}{n\pi} - \frac{4k}{n\pi} \right)}_{=0} \sin n\pi - \frac{4k}{n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{4k}{n^2\pi^2} \\
 &= \frac{8k}{n^2\pi^2} \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \frac{4k}{n^2\pi^2} \cos n\pi - \frac{4k}{n^2\pi^2} \\
 &= \frac{4k}{n^2\pi^2} \left( 2 \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \cos n\pi - 1 \right),
 \end{aligned}$$

wo wir in (\*) die folgende Integration

$$\begin{aligned}
 \int t \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt &= \frac{L}{n\pi} t \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) - \frac{L}{n\pi} \int \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt \\
 &= \frac{L}{n\pi} t \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi}{L} t\right) + C,
 \end{aligned}$$

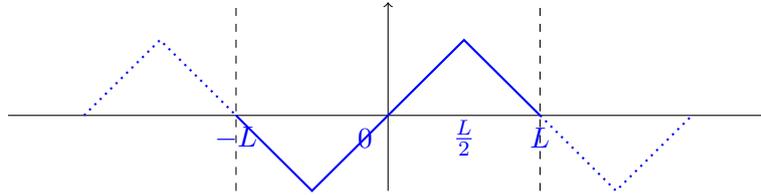
benutzt haben. Da  $\cos n\pi = (-1)^n$  und  $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2j + 1 \\ (-1)^j & n = 2j \end{cases}$ , gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4k}{n^2\pi^2} \left( 2 \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \cos n\pi - 1 \right) \\ &= \begin{cases} \frac{4k}{n^2\pi^2} (2 \cdot 0 - (-1)^{2j+1} - 1) & n = 2j + 1 \\ \frac{4k}{n^2\pi^2} (2(-1)^j - (-1)^{2j} - 1) & n = 2j \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4k}{n^2\pi^2} ((-1)^{2j} - 1) & n = 2j + 1 \\ \frac{4k}{n^2\pi^2} (2(-1)^j - 2) & n = 2j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & n = 2j + 1 \\ 0 & n = 2j, \text{ mit } j \text{ gerade, d.h. } j = 2m \\ \frac{4k}{n^2\pi^2} (-4) = -\frac{16k}{n^2\pi^2} & n = 2j, \text{ mit } j \text{ ungerade, d.h. } j = 2m + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left( \frac{1}{2^2} \cos\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + \frac{1}{6^2} \cos\left(\frac{6\pi}{L}t\right) + \dots \right) \\ &= \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2(2m+1))^2} \cos\left(\frac{2(2m+1)\pi}{L}t\right). \end{aligned}$$

*Fortsetzung als eine ungerade periodische Funktion.* Die Berechnung ist ähnlich. Wir setzen  $f(t) = -f(-t)$  für  $t \in [-L, 0]$ , so dass  $f(t + 2L) = f(t)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ ,



und wir erhalten

$$a_n = 0 \text{ for all } n \text{ und } b_n = \frac{8k}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{8k(-1)^j}{n^2\pi^2} & n = 2j + 1, \end{cases}$$

so dass

$$(4.13) \quad f(t) = \frac{8k}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^2} \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{L}t\right).$$

□

**BEMERKUNG 4.19.** Manchmal wird es besser sein, eine gerade (bzw. ungerade) Fortsetzung zu haben, d.h. eine Fourier-Reihe Entwicklung mit  $b_k = 0$  (bzw.  $a_k = 0$ ) für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Wenn man beispielsweise nach einer Lösung einer partiellen Differentialgleichung sucht, hängt die bessere Fortsetzung von der Randbedingung der partiellen Differentialgleichung ab.

Bevor wir weitergehen, sehen wir jetzt eine Anwendung der Fourier-Reihe.

BEISPIEL 4.20 (Das Basel Problem). Wir möchten beweisen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Idee ist, dass wir manchmal Fourier-Reihen Entwicklung anwenden können, um verschiedene Resultate zu erhalten. In diesem Fall wenden wir eine Fourier-Reihe Entwicklung an, um die Summe einer Reihe zu berechnen.

Sei  $f(t) = (t-\pi)^2$ . Die Funktion ist auf  $\mathbb{R}$  definiert und nicht periodisch, aber wir wollen sie nur auf  $[0, 2\pi]$  betrachten und dann auf  $\mathbb{R}$  als eine  $2\pi$ -periodische Funktion fortsetzen. Wir werden deshalb eine Fourier-Reihe erhalten, die nur die  $\cos nt$  für bestimmte  $n$  erhält.

$n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t-\pi)^2 dt = \frac{2}{3\pi} (t-\pi)^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2.$$

$n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (t-\pi)^2 \cos nt dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{-2}{\pi n} (t-\pi)^2 \underbrace{\sin nt \Big|_0^{\pi}}_{=0} + \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} (t-\pi) \sin nt dt \\ &= \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} (t-\pi) \sin nt dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{4}{n\pi} \frac{t-\pi}{n} \cos nt \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nt dt}_{=0} = \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) partielle Integration benutzen haben. Daraus folgt, dass

$$(t-\pi)^2 \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nt.$$

Falls  $t = 0$  erhalten wir

$$\pi^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2},$$

oder

$$\frac{\pi^2}{6} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Wegen des Satzes 4.21 werden wir sehen, dass wir

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

schreiben können.

**4.1.4. Die Konvergenz einer Fourier-Reihe: der Satz von Dirichlet und das Gibbs Phänomen.** Jetzt beantworten wir die erste Frage: "Welche  $2\pi$ -periodischen Funktionen lassen sich durch eine trigonometrische Reihe darstellen?" Die Antwort zu dieser Frage liegt im folgenden Satz, den wir nicht beweisen werden.

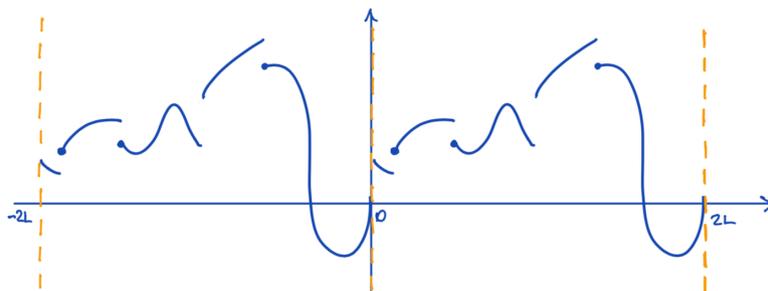
**SATZ 4.21.** Sei  $f$  eine  $2L$ -periodische Funktion auf  $[-L, L]$ , die stückweise stetig ist und die eine linke und rechte Ableitung an jedem Punkt in  $[-L, L]$  besitzt. Dann ist die Fourier-Reihe Entwicklung von  $f$  auf  $[-L, L]$  konvergent. An jedem Punkt  $t \in [-L, L]$ , wo  $f$  stetig ist, ist die Summe der Fourier-Reihe gleich  $f(t)$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) = f(t),$$

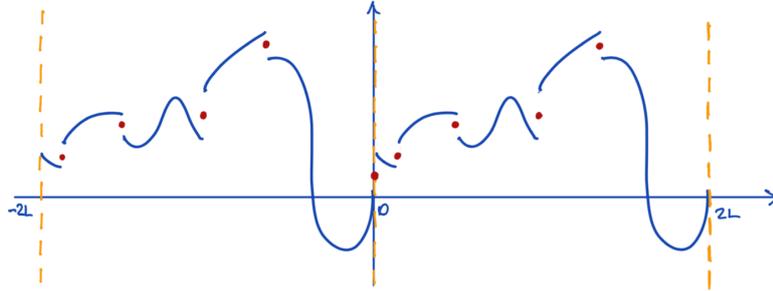
und an einer Sprungstelle  $t_0 \in [-L, L]$  gilt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \right).$$

Der Satz ist einfach zu verstehen. Betrachten wir die Funktion deren Graph in der folgenden Abbildung dargestellt ist.



Für jede Periode gibt es endliche viele Unstetigkeiten und die Funktion ist sonst stetig. Gemäss dem Satz von Dirichlet besitzt diese Funktion  $f(t)$  eine Fourier-Reihe Entwicklung, die nicht perfekt mit der Funktion übereinstimmt. Der Unterschied liegt in der Unstetigkeiten. Unabhängig von der Definition der Funktion in diesen Stellen, ist der Wert der Fourier-Reihe an jeder von diesen Stellen der Mittelwert der Werte der Funktion von links und von rechts. Der Graph der Fourier-Reihe ist hier dargestellt.



BEISPIEL 4.22. Wir haben im Beispiel 4.14 gesehen, dass die Fourier-Reihe Entwicklung der Rechtecksignal

$$f(t) := \begin{cases} -k & -2 < t < 0 \\ k & 0 < t < 2, \end{cases}$$

gleich

$$\frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right)$$

ist. Bis jetzt konnten wir nur

$$\frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right) \sim f(t)$$

schreiben. Nach dem Satz 4.21 wissen wir, dass

$$(4.14) \quad \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}t\right) = \begin{cases} f(t) & t \in (-2, 0) \cup (0, 2) \\ 0 & t = 0 \text{ oder } t = 2. \end{cases}$$

Eigentlich kann man direkt sehen, dass

$$\frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}0\right) = 0$$

und auch

$$\frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}2\right) = 0$$

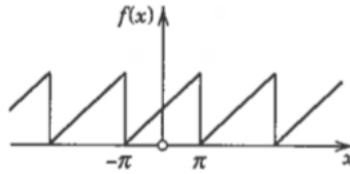
□

Man kann sich frage, ob wir wirklich einen Satz brauchen, um zum Beispiel (4.14) zu rechtfertigen. Wir werden mit dem Gibbs-Phänomen sehen, dass die Fourier-Reihe ein sehr seltsames Verhalten haben kann.

BEISPIEL 4.23. Wir werden die Fourier Reihe der ‘‘Sägezahnfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x + \pi & x \in (-\pi, \pi) \\ f(x + 2\pi) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

berechnen.



Zu diesem Zweck schreiben wir

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

wobei  $f_1(x) = x$  und  $f_2(x) = \pi$ . Wegen der Linearität des Integrals, sind die Fourier Koeffizienten von  $f$  die Summe der Fourier Koeffizienten von  $f_1$  und von  $f_2$ . Weiter ist  $f_2$  ihre eigene Fourier-Reihe. Man kann sich davon überzeugen, indem man beobachtet, dass die Funktion gerade ist und die  $a_n = 0$  für  $n \geq 1$  überprüft.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \, dt = \pi \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos nx \, dx = 2 \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{2}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

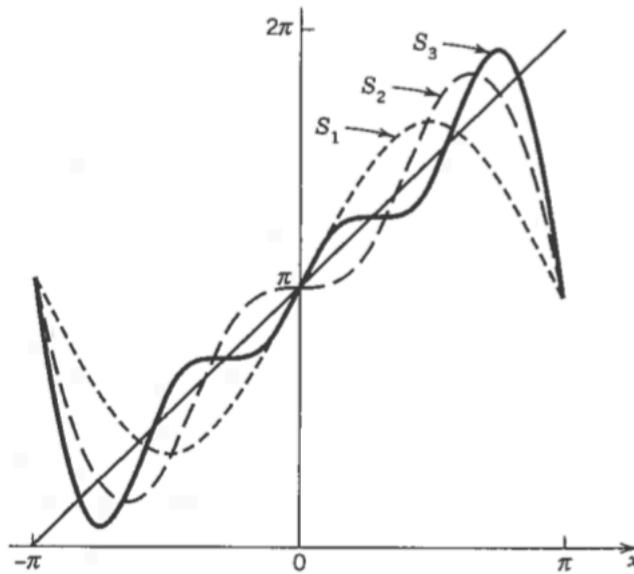
Da  $f_1$  ungerade ist, brauchen wir nur die Koeffizienten  $b_n$  zu berechnen. Aus (4.7) erhalten wir mithilfe von partieller Integration

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi n} \left( -\pi \cos n\pi + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$f(x) = \pi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx.$$

Die Fourier Koeffizienten  $b_n$  nehmen sehr langsam mit  $n \rightarrow \infty$  ab. Eigentlich ist die Fourier-Reihe nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe  $\sum \frac{1}{n}$  divergiert.



**4.1.5. Eindeutigkeit der Fourier-Reihe Entwicklung.** Die Fourier-Reihen haben die wichtige Eigenschaft, dass es zu einer gegebenen periodischen Funktion  $f(t)$  nicht mehrere Reihen Entwicklungen gibt.

**SATZ 4.24.** Sei  $f$  eine  $2\pi$ -periodische Funktion auf  $[-L, L]$ , die stückweise stetig ist und die die linke und rechte Ableitung an jedem Punkt in  $[-L, L]$  hat. Dann besitzt  $f$  genau eine Fourier-Reihe, durch welche sie für alle  $f \in \mathbb{R}$  dargestellt wird.

Der Grund ist, dass wir die Koeffiziente eindeutig bestimmt haben. Wir haben gesehen in dem Satz von Dirichlet, dass die Fourier-Reihe von  $f$  nach  $f$  konvergiert, aber ist die Konvergenz "gut"? Was bedeutet "gut"?

**4.1.6. Gibbsches Phänomen.** Eigentlich kann die Konvergenz sehr schlecht sein, und in der Nähe der Sprungstellen tritt auch ein besonders Effekt auf, der *Gibbsches Phänomen* genannt ist.

Sei

$$s_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{k\pi}{L} t}$$

die  $N$ -te Partialsumme der Fourier-Reihe von  $f$ . Bei der Approximation von  $f$  durch  $s_N$  in einer Sprungstelle tritt der sogenannte *Gibbs tower* auf. Er verschwindet nicht, wenn man mehrere Terme in der Fourier-Reihe nimmt. Er wird kleiner, aber die Höhe des Gibbs-tower beträgt immer etwa 18% der Sprunghälfte, d.h. im Fall  $f$  nur eine Sprunghälfte in  $t_0$  hat, gilt

$$\sup_{t \in [-L, L]} |f(t) - s_N(t)| \sim .18 \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \right).$$

Informell spiegelt das Gibbs-Phänomen die Schwierigkeit wider, eine nicht stetige Funktion durch eine *endliche* Reihe von der stetigen Funktionen Sinus und Cosinus zu approximieren. Es ist wichtig, das Wort endlich zu betonen, denn obwohl jede Teilsumme der Fourier-Reihe die Funktion überschreitet, die sie annähert, hat die Reihe der Funktion kein Überschwingen. Der Wert von  $t$ , bei dem das maximale Überschwingen erreicht wird, rückt mit zunehmender Anzahl der summierten Terme immer näher an die Sprungstellen heran, so dass, wiederum informell, eine Konvergenz bei diesem Wert von  $t$  möglich ist, sobald das Überschwingen an einem bestimmten  $t$  vorbeigegangen ist.

Wir betonen, dass das Überschwingen nicht nach null geht, aber die Grenze der Folge von Teilsummen (das ist die Fourier-Reihe) kein Überschwingen hat. Darin besteht kein Widerspruch, da sich der Punkt, an dem das Überschwingen auftritt, in Richtung des Sprunges bewegt. Wir haben punktweise Konvergenz, aber keine gleichmässige Konvergenz.

Das Gibbs-Phänomen hängt auch eng mit dem Prinzip zusammen, dass der Abfall der Fourier-Koeffizienten einer Funktion im Unendlichen mit  $n \rightarrow \infty$  von der Differenzierbarkeit der Funktion abhängt: je differenzierbarer eine Funktion ist, desto schneller nehmen mit  $n \rightarrow \infty$  ihre Fourier-Koeffizienten ab, was zu einer schnellen Konvergenz der Fourier-Reihe führt. Andererseits haben unstetige Funktionen sehr langsam abfallende Fourier-Koeffizienten, was dazu führt, dass die Fourier-Reihe sehr langsam konvergiert. Man beachte zum Beispiel, dass die Fourier-Koeffizienten  $1, -1/3, 1/5, \dots$  der Rechteckwelle nur so schnell abfallen wie die harmonische Reihe, die nicht absolut konvergent ist.

**4.1.7. Approximation durch ein trigonometrisches Polynom.** Es gibt eine andere Art der Messung der Konvergenz einer Fourier-Reihe. Man kann eigentlich sehen, dass  $s_N$  die beste Approximation von  $f$  in folgenden Sinn ist. Sei

$$p_N(t) := \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{int}$$

ein trigonometrisches Polynom des Grades  $N$  und sei

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

die Fourier-Reihe Entwicklung einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$ . (Der Fall von  $f$  ein  $2L$ -periodische Funktion ist gleich.) Wir betrachten den *quadratischen Fehler*

$$E(f, p_N) := \|f - p_N\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p_N(t)|^2 dt,$$

der den Abstand zwischen  $f$  und  $p_N$  in einem gewissen Sinn abschätzt. Mit dieser Art der Messung ist der Gibbs Tower nicht so schlecht, weil sein Wert über dem Intervall gemittelt wird. Wir möchten die Koeffizienten von  $p_N$  finden, so dass  $E$  so klein wie möglich ist.

$$\begin{aligned}
E(f, p_N) &= \|f - p_N\|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p_N(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - p_N(t)) \overline{(f(t) - p_N(t))} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{p_N(t)} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_N(t) \overline{f(t)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_N \overline{p_N(t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{2\pi} 2\Re \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{p_N(t)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_N \overline{p_N(t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{\pi} \Re \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \right) \left( \sum_{m=-N}^N \gamma_m e^{-imt} \right) dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=-N}^N \gamma_n e^{int} \right) \left( \sum_{m=-N}^N \gamma_m e^{-imt} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \Re \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-N}^N c_n \bar{\gamma}_m \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\pi} e^{-im\pi} dt \\
&\quad + \sum_{n, m=-N}^N \gamma_n \bar{\gamma}_m \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\pi} e^{-im\pi} dt \\
&\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - 2\Re \sum_{n=-N}^N c_n \bar{\gamma}_n + \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2
\end{aligned}$$

wobei wir in (\*) (4.11) und (4.12) angewendet haben. Wir behaupten, dass  $E$  am kleinsten ist, falls

$$\gamma_n = c_n.$$

Anders gesagt, sei

$$(4.15) \quad \boxed{E_N^*(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.}$$

Wir behaupten, dass

$$E(f, p_N) - E_N^*(f) \geq 0.$$

Eigentlich gilt

$$\begin{aligned}
 E(f, p_N) - E_N^*(f) &= \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^N |\gamma_n|^2 - 2\Re \sum_{n=-N}^N c_n \bar{\gamma}_n \\
 &= \sum_{n=-N}^N (|c_n|^2 - 2\Re c_n \bar{\gamma}_n + |\gamma_n|^2) \\
 &= \sum_{n=-N}^N (c_n - \gamma_n)(\bar{c}_n - \bar{\gamma}_n) \\
 &= \sum_{n=-N}^N |c_n - \gamma_n|^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

weil  $E(f, p_N) - E_N^*(f)$  eine Summe von Quadrate ist.

Wir haben deshalb den folgenden Satz bewiesen:

SATZ 4.25. Das trigonometrische Polynom des Grades  $N$ , das am besten eine  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  approximiert (d.h. das trigonometrische Polynom des Grades  $N$  mit dem kleinsten quadratischen Fehler) ist die partielle Summe  $s_N$  der Fourier-Reihen Entwicklung der Funktion  $f$ . Der kleinste Wert  $E_N^*(f)$  von dem quadratischen Fehler ist

$$E_N^*(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2$$

und  $E_N^*(f)$  ist monoton abnehmend mit zunehmendem  $N$ .

Da (4.15) gilt für jedes  $N \in \mathbb{N}$ , erhalten wir die *Bessel'sche Ungleichung*

$$(4.16) \quad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt,}$$

die für jede Funktion  $f$  gilt, die eine Fourier-Reihe Entwicklung besitzt, wobei die  $c_n$  die Fourier Koeffizienten von  $f$  sind.

Man kann aber auch weiter gehen, und die *Parseval'sche Identität* mit ein bisschen mehr Aufwand beweisen:

$$(4.17) \quad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt,}$$

Mithilfe von (4.3) ist es einfach zu sehen, dass die entsprechenden Formel für die reelle Fourier-Reihe Entwicklung sind

$$(4.18) \quad \boxed{E_N^*(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right)},$$

$$(4.19) \quad \boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt},$$

und

$$(4.20) \quad \boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt}.$$

BEISPIEL 4.26. Wir berechnen den quadratischen Fehler  $E_3^*(f)$  der Funktion  $f$  im Beispiel 4.23. Dort haben wir die Koeffizienten der Fourier-Reihe berechnet

$$a_0 = 2\pi, \quad a_n = 0 \text{ für } n \geq 1 \text{ und } b_n = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}.$$

Daraus folgt, dass das trigonometrische Polynom des Grades  $N = 3$ , das am besten  $f$  auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  approximiert ist

$$s_3(t) = \pi + 2 \sin t - \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t)$$

und

$$\begin{aligned} E_3^*(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)^2 dt - \frac{1}{2} \left( 2\pi^2 + 4 + 1 + \frac{4}{9} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} (x + \pi)^3 \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2} \left( 2\pi^2 + \frac{49}{9} \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 - \frac{49}{18} \sim 0.567. \end{aligned}$$

Während

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - s_3(t)| = .18 \cdot \pi \sim 0.565$$

auch wenn  $n$  zunimmt, ergibt die Teilsumme  $s_3(t)$  bereits eine gute Annäherung, die mit zunehmendem  $n$  immer besser wird. Zum Beispiel gilt

$$\begin{aligned} E_4^*(f) &= E_3^*(f) - \frac{1}{2} b_4^2 = \frac{2}{3} \pi^2 - \frac{49}{18} - \frac{1}{4} \sim 0.317 \\ E_5^*(f) &= E_4^*(f) - \frac{1}{2} b_5^2 = \frac{2}{3} \pi^2 - \frac{49}{18} - \frac{1}{4} - \frac{2}{25} \sim 0.237 \end{aligned}$$

und

$$\sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - s_3(t)| = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - s_4(t)| = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t) - s_5(t)| = \dots = .18 \cdot 2\pi.$$

□

**4.1.8. Amplituden- und Phasenspektrum.** Wie wir am Anfang dieses Kapitels gesagt haben, falls man ein Audio-Recording über das Internet verschicken muss, sollte man die einzelnen Harmonischen verschicken. Anders gesagt, um die Information über eine  $2L$ -periodische Funktion  $f$  zu übermitteln, können wir die Fourier-Reihe der Funktion finden und es ist genug die Koeffizientenfolge

$$\{a_0, \{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \{a_3, b_3\}, \dots\}$$

zu schicken. Mit diesen Informationen kann man aber auch die Fourier-Reihe durch Überlagern der beiden harmonischen Funktionen gleicher Frequenz  $a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$  und  $b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$  in eine einzige Harmonische auf eine etwas einfachere, nützlicher und kompaktere Form bringen. Sei  $\omega = \frac{\pi}{L}$  die Kreisfrequenz der Funktion  $f$ . Wir schreiben

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = A_n \cos(n\omega t + \phi_n),$$

wobei für  $n \geq 0$

$$(4.21) \quad A_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

die *Amplitude* ist, und

$$(4.22) \quad \phi_n := -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) + \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ \pi & a_n < 0 \end{cases}$$

ist die *Phase* (wobei wir angenommen haben, dass  $\arctan x \in [-\pi/2, \pi/2]$ ). Eigentlich kann man diese Formel aus der Kosinusadditionsformel

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

leicht herleiten. Mit (4.21) und (4.22) erhalten wir die folgende Schreibweise der Fourier-Reihe von  $f$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \phi_n).$$

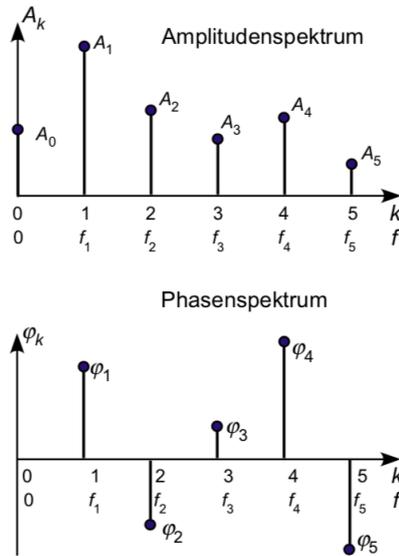
Die periodische Funktion  $f(t)$  kann also in eine unendliche Summe von harmonischen Funktionen mit den Kreisfrequenzen  $\omega_n := n\omega$ , den Amplituden  $A_n$  und den Phasen  $\phi_n$  aufgespalten werden. Wiederum ist der gesamte Informationsgehalt der Funktion  $f(t)$  in der Periode  $2L$  und der Amplituden- und Phasenfolge

$$\{A_0, \{A_1, \phi_1\}, \{A_2, \phi_2\}, \{A_3, \phi_3\}, \dots\}$$

erfasst. Wir nennen die Zahlenfolgen

$$\{A_0, A_1, A_2, \dots\} \quad \text{bzw.} \quad \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\}$$

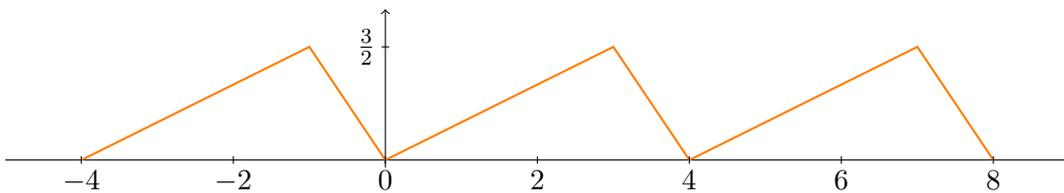
das *Amplitudenspektrum* bzw. das *Phasenspektrum* der periodischen Funktion  $f(t)$ . In der Praxis sieht man hinter den Begriffen Amplituden- und Phasenspektrum meistens nicht die beiden gemäss Definition dahinterstehenden Zahlenfolgen, sondern die dazugehörigen anschaulichen Graphen. Man spricht in diesem Zusammenhang oft von der Darstellung einer periodischen Funktion im *Spektralbereich*. Gemeint ist bei beiden Darstellungen natürlich dasselbe, einmal mathematisch exakt und für die Rechnung geeignet, das andere dagegen anschaulich und intuitiv für physikalische Überlegungen prädestiniert.



BEISPIEL 4.27. Man betrachte die Funktion

$$u(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}t & 0 \leq t \leq 3 \\ -\frac{3}{2}(t-4) & 3 \leq t \leq 4, \end{cases}$$

die eine asymmetrische Dreiecksspannung beschreibt.



Wir berechnen die Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \int_0^4 u(t) \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) dt = \dots = \begin{cases} \frac{3}{2} & k = 0 \\ \frac{4}{k^2\pi^2} [\cos(k\frac{3\pi}{2}) - 1] & k \geq 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2} & k = 0 \\ -\frac{4}{k^2\pi^2} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k = 4k \\ -\frac{8}{(4k+2)^2\pi^2} & k = 4k + 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

und

$$b_k = \frac{1}{2} \int_0^4 u(t) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) dt = \dots = \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\left(k\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{2j+1} (-1)^{j+1} & k = 2j + 1 \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}.$$

Mithilfe von (4.21) und (4.22) erhalten wir

$$A_k = \begin{cases} \frac{3}{2} & k = 0 \\ \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1}{k^2} + 1} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k = 4j \\ \frac{8}{(4j+2)^2 \pi^2} & k = 4j + 2, \end{cases}$$

sodass die Amplitudenspektrum ist

$$\{A_k\}_{k \geq 0} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}, \frac{8}{4\pi^2}, \frac{4\sqrt{2}}{9\pi^2}, 0, \frac{4\sqrt{2}}{25\pi^2}, \frac{8}{36\pi^2}, \frac{4\sqrt{2}}{49\pi^2}, 0, \frac{4\sqrt{2}}{81\pi^2}, \dots \right\}.$$

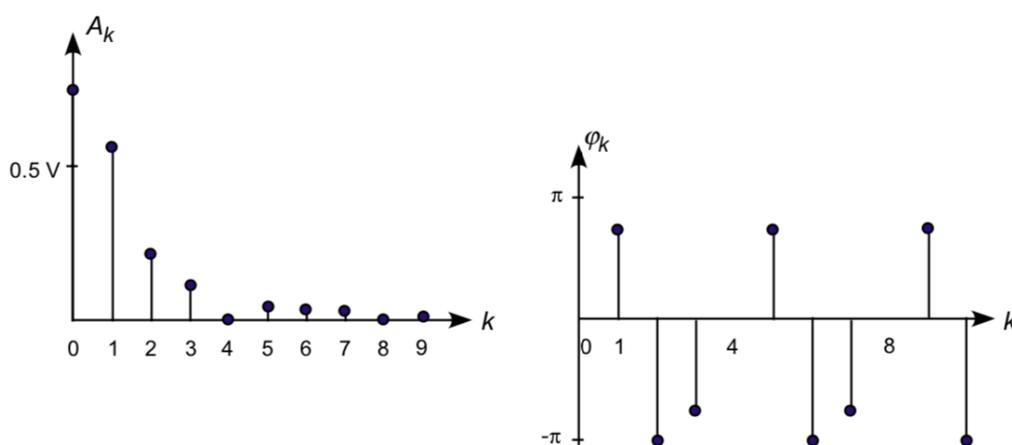
Die Phasenwinkeln erhalten wir aus

$$\begin{aligned} \phi_k &= -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \\ &= -\operatorname{Arg}(a_k + ib_k) \\ &= -\operatorname{Arg}\left[\cos\left(k\frac{3\pi}{2}\right) - 1 + i\sin\left(k\frac{3\pi}{2}\right)\right] \\ &= -\operatorname{Arg}\left(e^{ik\frac{3\pi}{2}} - 1\right), \end{aligned}$$

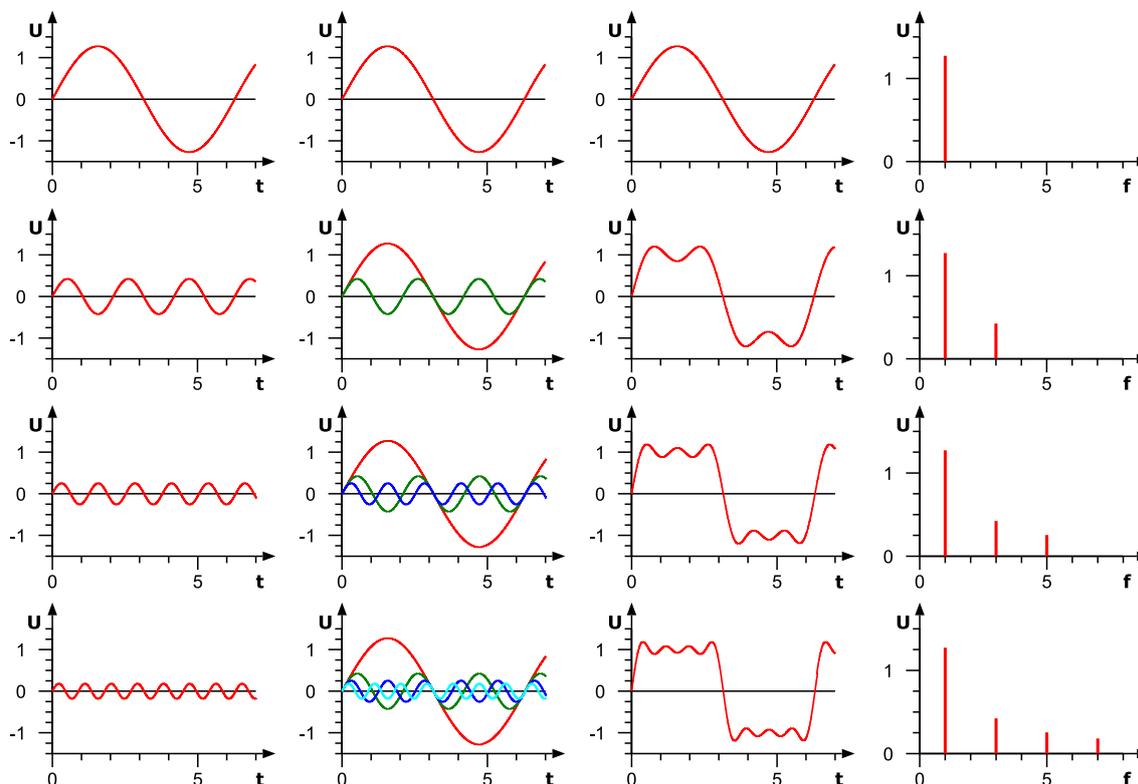
sodass

$$\{\phi_k\}_{k \geq 1} = \left\{ \frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{3\pi}{4}, -\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0, \frac{3\pi}{4}, -\pi, \dots \right\}.$$

Wir bemerken, dass falls  $k = 4j$  sind  $a_k = b_k = 0$ , sodass  $\phi_k$  nicht definiert ist. Wegen  $A_{4j} = 0$  darf aber für die Phase ein beliebiger Winkel in der Fourier-Reihe gesetzt werden. In diesem Fall nehmen wir  $\phi_k = 0$ . Die graphische Darstellung des Amplituden- und Phasenspektrums ist die folgende



Das folgende Bild zeigt die Fourier-Synthese eines Rechtecksignals (aus Wikipedia)



#### 4.1.9. Zweiseitiges Linien- und Phasenspektrum. Mit der Formel (4.3) und

$$c_k = |c_k| e^{i\psi_k},$$

wobei  $\psi_k$  das Argument von  $c_k$  bezeichnet, können wir auch eine Graphische Darstellung der komplexen Fourier-Reihen erhalten. In diesem Fall nennt man

$$\{|c_k|\}_{k \in \mathbb{Z}} := \{\dots, |c_{-2}|, |c_{-1}|, |c_0|, |c_1|, |c_2|, \dots\}$$

das *zweiseitige Linienspektrum* und

$$\{\psi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} := \{\dots, \psi_{-2}, \psi_{-1}, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$$

das *zweiseitige Phasenspektrum*.

## 4.2. Fourier-Transformation

Falls  $f$  eine  $2L$ -periodische Funktion ist, haben wir im letzten Kapitel ihre Fourier-Reihe studiert. Man kann die Fourier-Koeffizienten von  $f$  als eine Funktion

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \hat{f}: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ n &\mapsto \hat{f}(n) := \langle f, \mathbf{e}_{n,L} \rangle = c_n \end{aligned}$$

auffassen. Die Funktion  $\hat{f}$  wird die *Fourier-Transformation* von  $f$  genannt. Wir betrachten jetzt Funktionen, die nicht periodisch sind und nicht periodisch fortgesetzt werden können. Sie sind *Zeitsignalen*, d.h. Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die gewissen Zusatzbedingungen

genügen. Wie wir im vorangehenden Kapitel gemacht haben, möchten wir diese Zeitsignale in ihre harmonischen Anteile zerlegen. Wir werden sehen, dass wir auf natürlich Weise zum Begriff des *Fourier-Integral* gelangen. Wir werden sehen, dass die Fourier-Koeffizienten (bzw. die komplexe Fourier-Reihen Entwicklung) einer periodischen Funktion entsprechen der Fourier-Transformation (bzw. dem Fourier-Integral) eines Zeitsignals.

Das folgende Argument ist heuristisch und wir werden keinen formellen Beweis geben, es wird aber genug sein, um uns zur Fourier-Transformation zu führen. Sei  $f_L(t)$  eine  $2L$ -periodische Funktion und sei

$$(4.24) \quad f_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}$$

ihre Fourier-Reihen Entwicklung, wobei  $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$  wie im Beispiel 4.1.2 und § 4.1.8 und

$$(4.25) \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) e^{-i\omega_n v} dv$$

für  $n \geq 0$ . Wir werden sehen, was passiert falls  $L \rightarrow \infty$ . Wir ersetzen (4.25) in (4.24) und erhalten

$$(4.26) \quad f_L(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) e^{-i\omega_n v} dv \right) e^{i\omega_n t}.$$

Sei

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L},$$

sodass  $\frac{1}{L} = \frac{1}{\pi} \Delta\omega$ . Dann wird die rechte Seite von (4.26)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \left( \int_{-L}^L f_L(v) e^{-i\omega_n v} dv \right) e^{i\omega_n t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f_L(v) \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n(v-t)} \Delta\omega \right) dv$$

Falls  $L \rightarrow \infty$ , geht  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , sodass wir die Reihe an der rechten Seite der obigen Formel als eine Riemannsche Summe interpretieren können. Anders gesagt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n(v-t)} \Delta\omega = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n(v-t)} \Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(v-t)} d\omega$$

Wir definieren auch

$$f(x) := \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(t),$$

sodass (4.26) wird

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_L(v) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(v-t)} d\omega \right) dv \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv \right) e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Das ist die Darstellung von  $f$  durch ein *Fourier-Integral*. Ähnlich zu dem Fall der Fourier-Reihen ist die Variable  $\omega$  die Frequenzvariable.

Wir haben die Schreibweise  $\sim$  statt  $=$  benutzt, weil dies ein heuristisch Argument ist und weil wir Konvergenzfragen nicht berücksichtigt haben. Aber wie im Fall einer periodischen Funktion gilt der Satz von Dirichlet.

DEFINITION 4.28. Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heisst *absolut integrierbar*, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

SATZ 4.29. [Satz von Dirichlet für die Fourier-Transformation] Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stückweis stetig absolut integrierbar Funktion, die eine linke und rechte Ableitung an jedem Punkt hat. An jedem Punkt wo  $f$  stetig ist, gilt

$$(4.27) \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv \right) e^{i\omega t} d\omega.$$

Falls  $f$  an der Stelle  $t_0 \in \mathbb{R}$  nicht stetig ist, gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i\omega v} dv \right) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) \right)$$

Wie wir bereits angedeutet haben, spielt das innere Integral in (4.27) die Rolle der Fourier-Koeffizienten. Wie am Anfang dieses Abschnitt können wir die folgende Definition geben.

DEFINITION 4.30. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine absolut integrierbar Funktion. Die *Fourier-Transformation*  $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$(4.28) \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Eine alternative Schreibweise von  $\hat{f}$  ist  $\mathcal{F}(f)$  und manchmal spricht man auch von der *Spektralfunktion*.

Aus (4.28) und  $|e^{-i\omega t}| = 1$  folgt, dass  $\hat{f}$  wohldefiniert ist. Weiter gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0 = \lim_{\omega \rightarrow -\infty} \hat{f}(\omega).$$

In der Fourier-Reihen Entwicklung einer periodischen Funktion zeigt die Grösse eines Koeffizienten der Einfluss der entsprechenden Frequenz in der Funktion. Gleichermassen gibt  $|\hat{f}(\omega)|$  die "Gesamtenergie" die Frequenz  $\omega$  im Zeitsignal  $f$ .

DEFINITION 4.31. Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine absolut integrierbar Funktion, deren Fourier-Transformation  $\hat{f}$  auch absolut integrierbar ist. Die *inverse Fourier-Transformation*

von  $\hat{f}$  ist

$$(4.29) \quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Dier Satz von Dirichlet sagt, dass es möglich ist, die Funktion  $f$  aus ihrer Fourier-Transformation zurück zu erhalten, d.h.

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}),$$

falls die Funktion der Voraussetzungen des Satzes von Dirichlet genügt.

**BEMERKUNG 4.32.** Die Definition 4.31 ist ein wenig seltsam. Es sieht so aus, als ob man die inverse Fourier-Transformation nur für Funktionen definieren kann, die absolut integrierbar und Fourier-Transformation einer absolut integrierbaren Funktion sind. Es ist nicht so, aber um die richtige Definition zu geben, sollte man den *Schwartz-Raum*  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  definieren. Das ist ein Raum von Funktionen, deren Ableitungen "schnell genug im Unendlich abnehmen". Dieses Vorgehen würde aber den Rahmen dieses Kurses sprengen. Es genügt zu sagen, dass  $\mathcal{F}^{-1}$  für jeder Funktion  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  definiert werden kann und  $\mathcal{F}^{-1}(g)$  würde absolut integrierbar sein.

**BEISPIEL 4.33.** Sei  $a > 0$ . Wir betrachten die Rechteckfunktion  $\chi_{[-a,a]}(t)$ , wobei

$$\chi_{[-a,a]} := \begin{cases} 1 & t \in [-a, a] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist auch die sogenannte *charakteristische Funktion* des Intervalls  $[-a, a]$  und kann für jedes Menge definiert werden. Falls  $\omega \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^a \cos \omega t dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\pi}} \sin \omega t \Big|_0^a \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\omega\sqrt{\pi}} \sin \omega a. \end{aligned}$$

Da

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega}{\omega} = 1,$$

ist die Funktion

$$\text{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

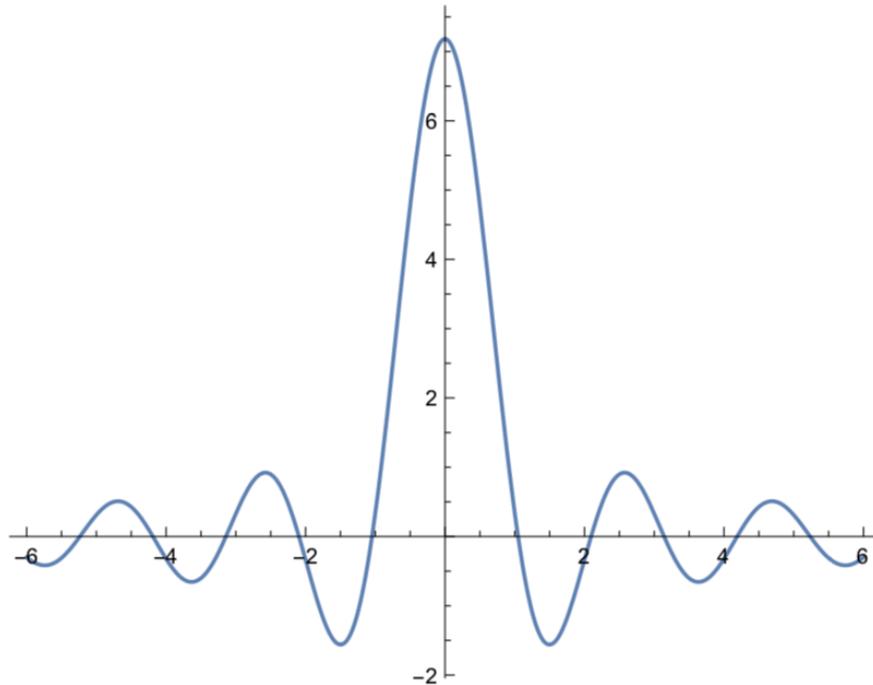


ABBILDUNG 2. Der Graph der Funktion  $\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \operatorname{sinc} a\omega$  für  $a = 3$ .

stetig und

$$\hat{\chi}_{[-a,a]}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \operatorname{sinc} a\omega.$$

Die sogenannte Sinc-Funktion spielt übrigens eine wichtige Rolle in der Theorie der Signalverarbeitung. In Fig. 2 findet man den Graph von  $(\chi_{[-a,a]})^\wedge(\omega)$

Wir bemerken, dass

$$\lim_{\pm\omega \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\chi_{[-a,a]})(\omega) = 0,$$

die Funktion ist aber nicht absolut integrierbar. Dies ist auf die Sprungstellen der Funktion in  $a$  und  $-a$  zurückzuführen. Wir haben ein ähnliches Verhalten auch für Fourier-Reihen gesehen.  $\square$

BEISPIEL 4.34. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{bt} & t < 0, \end{cases}$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $b > 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(b-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-a(i+\omega)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{b-i\omega} e^{(b-i\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{a+i\omega} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right).\end{aligned}$$

Es ist einfach zu sehen, dass  $\hat{f}$  absolut integrierbar ist. Wegen des Satzes 4.29 können deshalb wir das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right) e^{i\omega t} d\omega \right)$$

berechnen, um  $f$  zurückzuerhalten, und zu diesem Zweck werden wir die Methode in § 3.4.2 anwenden. Insbesondere schreiben wir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{b-i\omega + a+i\omega}{(a+i\omega)(b-i\omega)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{b+a}{(a+i\omega)(b-i\omega)} \right)$$

und wir möchten das Lemma 3.47 mit

$$\begin{aligned}p(\omega) &= \frac{a+b}{\sqrt{2\pi}} \\ q(\omega) &= (a+i\omega)(b-i\omega) \\ h(\omega) &= e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

benutzen. Wir müssen aber verifizieren, dass  $|h(\omega)|$  beschränkt ist. Mit der Schreibweise von Lemma 3.47 gilt auf  $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}|e^{i\omega t}| &= \left| e^{Re^{i\theta} t} \right| \\ &= \left| e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)t} \right| \\ &= \left| e^{iRt\cos\theta} \right| \left| e^{-Rt\sin\theta} \right| \\ &= e^{-Rt\sin\theta}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $|h(\omega)|$  beschränkt ist, falls

$$t \sin\theta > 0.$$

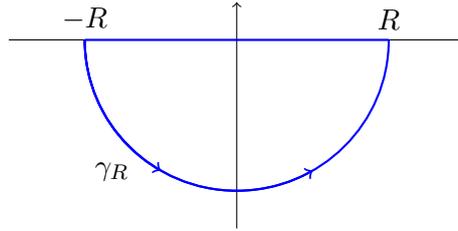
Das passiert, falls

$$\begin{aligned}t > 0 \text{ und } \sin\theta > 0, \text{ d.h. } \theta \in [0, \pi] \text{ oder} \\ t < 0 \text{ und } \sin\theta < 0, \text{ d.h. } \theta \in [\pi, 2\pi].\end{aligned}$$

Wir schliessen darauf, dass wir zwei Fällen mit verschiedenen Pfaden betrachten müssen:

$$\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta} \text{ mit } \begin{cases} t \in [0, \pi], & \text{um } f(t) \text{ für } t > 0 \text{ zu erhalten, und} \\ t \in [\pi, 2\pi], & \text{um } f(t) \text{ für } t < 0 \text{ zu erhalten.} \end{cases}$$

Wir werden nur den zweiten Fall berechnen, der erste ist ähnlich. Wir betrachten die Kurve  $[-R, R] * \gamma_R^{-1}(t)$ , wobei  $\gamma_R(t) = Re^{i\theta}$  für  $\theta \in [\pi, 2\pi]$ .



Wegen des Korollars 3.49 und der Bemerkung 3.48 gilt

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\omega)}{q(\omega)} h(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{z_j} \text{Res} \left( \frac{p(z)}{q(z)} h(z), z_j \right),$$

wobei die  $z_j$  die Pole von  $\frac{p(z)}{q(z)} h(z)$  innerhalb des Pfades  $[-R, R] * \gamma_R^{-1}(t)$  sind. Der einzige Pol innerhalb von  $[-R, R] * \gamma_R^{-1}(t)$  für  $R$  gross genug ist  $\omega = -ib$ . Daraus folgt, dass

$$(4.30) \quad \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{b+a}{(a+i\omega)(b-i\omega)} \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= -2\pi i \text{Res} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b+a}{(a+i\omega)(b-i\omega)} e^{i\omega t}, -ib \right) \end{aligned}$$

Bevor wir weitergehen, sind zwei Bemerkungen in Ordnung zu machen. Die erste ist, dass wir in (4.30) das Cauchy Hauptwert nicht nehmen mussten. Der Grund ist, dass  $\hat{f}$  absolut integrierbar ist, sodass wir aus (4.30) das gewünschte Integral erhalten (Bemerkung 3.48). Die zweite ist, dass wir in (4.30) das Vorzeichen  $-$  genommen haben, weil die Kurve  $[-R, R] * \gamma_R^{-1}(t)$  im Uhrzeigersinn durchgelaufen ist.

Da

$$\begin{aligned} \text{Res} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b+a}{(a+i\omega)(b-i\omega)} e^{i\omega t}, -ib \right) &= \lim_{\omega \rightarrow -ib} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\omega + ib) \frac{b+a}{(a+i\omega)(b-i\omega)} e^{i\omega t} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow -ib} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \frac{b+a}{a+i\omega} e^{i\omega t} = \frac{ie^{bt}}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

gilt für  $t < 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{b+a}{(a+i\omega)(b-i\omega)} \right) e^{i\omega t} d\omega \right) = e^{bt}.$$

Der Fall  $t > 0$  ist ähnlich. □

BEISPIEL 4.35. Wir möchten die Fourier-Transformation der Funktion

$$f(t) := \frac{1}{k^2 + t^2}$$

für  $k > 0$  berechnen. Dafür müssen wir das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 + t^2} dt = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega)$$

berechnen. Wir haben schon in (3.18) berechnet, dass für  $\omega > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + t^2} dt = \pi e^{-\omega}.$$

Mit der Substitution  $t \mapsto \frac{t}{k}$  erhalten wir leicht

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{k^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{k} e^{-k\omega}.$$

Da  $\frac{\pi}{k} e^{-k\omega} \in \mathbb{R}$ , gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{k^2 + t^2} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t + i \sin \omega t}{k^2 + t^2} dt \\ (4.31) \qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t - i \sin \omega t}{k^2 + t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 + t^2} dt, \end{aligned}$$

so dass

$$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{k^2 + t^2} dt = \frac{\pi}{k} e^{-k|\omega|}$$

und

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k|\omega|}.$$

Da  $\hat{f}(\omega)$  absolut integrierbar ist, können wir auch die Rücktransformation anwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|\omega|} e^{i\omega t} d\omega \\
&\stackrel{(*)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2k} \int_0^{\infty} e^{-k\omega} \cos(\omega t) d\omega \\
&= \frac{1}{k} \Re \left( \int_0^{\infty} e^{(-k+it)\omega} d\omega \right) \\
&= \frac{1}{k} \Re \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(-k+it)\omega}}{-k+it} \right) \Big|_0^R \\
&= \frac{1}{k} \Re \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{(-k+it)R}}{-k+it} - \frac{1}{-k+it} \right) \\
&= \frac{1}{k} \Re \left( -\frac{1}{-k+it} \right) \\
&= \frac{1}{k} \Re \left( \frac{1}{k-it} \cdot \frac{k+it}{k+it} \right) \\
&= \frac{1}{k} \Re \left( \frac{k+it}{k^2+t^2} \right) \\
&= \frac{1}{k} \frac{k}{k^2+t^2} = f(t)
\end{aligned}$$

wobei wir in (\*) wie in (4.31) benutzt haben, dass der Sinusteil ungerade ist und fällt weg.  $\square$

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, die Fourier-Transformation einer Funktion zu berechnen. Mithilfe von den folgenden Rechenregeln kann man es oft auf eine einfache Funktion zurückführen.

**EIGENSCHAFTEN** (Eigenschaften der Fourier-Transformation). Seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbar (und wenn nötig seien auch  $\hat{f}$ ,  $f'$ ,  $f^{(n)}$ , ... absolut integrierbar). Dann gilt:

(FT1) (Linearität) Für jedes  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  gilt

$$(\alpha f + \beta g)^\wedge(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega).$$

(FT2) (Verschiebung in der  $t$ -Variabel) Sei  $a \in \mathbb{R}$  und sei  $T_a f(t) := f(t-a)$ . Dann gilt

$$\widehat{T_a f}(\omega) = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega).$$

(FT3) (Verschiebung in der  $\omega$ -Variabel) Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\widehat{e^{iat} f(t)}(\omega) = \hat{f}(\omega - a).$$

(FT4) (Streckung) Sei  $a \in \mathbb{R}$  und sei  $S_a f(t) := f(at)$ . Dann gilt

$$\widehat{S_a f}(\omega) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(FT5) Es gilt

$$\hat{f}(t) = f(-t)$$

(FT6) (Die Fourier-Transformation der Ableitung) Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

(FT7) (Die Ableitung der Fourier-Transformation) Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\widehat{t^n f(t)}(\omega) = i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega).$$

BEWEIS. (FT1) - (FT3) sind eine formelle Überprüfung.

(FT4) Wegen der Definition gilt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt$$

Mithilfe der Substitution  $\tau = at$  gilt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{i\omega\tau}{a}} \frac{1}{|a|} d\tau = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

(FT5) Wegen der Definition 4.30 und 4.31 an der Funktion  $\hat{f}$  angewendet erhalten wir

$$\hat{\hat{f}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega(-t)} d\omega = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})(-t) = f(-t).$$

(FT6) Wir werden die Formel mittels Induktion beweisen. Für  $n = 1$  gilt

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ (4.32) \quad &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega \hat{f}(\omega), \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die partielle Integration angewendet haben. Tatsächlich gilt

$$\lim_{R \rightarrow \pm\infty} f(t) e^{-iRt} = 0,$$

weil  $|e^{-iRt}|=1$  und  $f(t)$  und  $f'$  absolut integrierbar sind.

Wir nehmen an, dass die Aussage für  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , wahr ist. Insbesondere gilt

$$(4.33) \quad \widehat{f^{(n-1)}}(\omega) = (i\omega)^{n-1} \hat{f}(\omega).$$

Dann gilt

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega) = \widehat{(f^{(n-1)})'}(\omega) \stackrel{(4.32)}{=} i\omega \widehat{f^{(n-1)}}(\omega) \stackrel{(4.33)}{=} (i\omega)^n \hat{f}(\omega),$$

wobei wir (4.32) auf die Funktion  $f^{(n-1)}(t)$  angewendet haben.

(FT7) Da

$$\frac{d}{d\omega}(e^{-i\omega t}) = -ite^{-i\omega t},$$

gilt

$$\begin{aligned} \widehat{tf(t)}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{d}{d\omega}(e^{-i\omega t}) dt \\ (4.34) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

Wie in (FI6) nehmen wir an, dass die Aussage für  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , wahr ist. Insbesondere gilt

$$(4.35) \quad \widehat{t^{n-1}f(t)}(\omega) = i^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \hat{f}(\omega).$$

Dann gilt für  $g(t) := t^{n-1}f(t)$

$$\begin{aligned} \widehat{t^n f(t)}(\omega) &= \widehat{tg(t)}(\omega) \\ &\stackrel{(4.34)}{=} i \frac{d}{d\omega} \hat{g}(\omega) \\ &= i \frac{d}{d\omega} \widehat{(t^{n-1}f(t))}(\omega) \\ &\stackrel{(4.35)}{=} i \frac{d}{d\omega} \left( i^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\omega^{n-1}} \hat{f}(\omega) \right) \\ &= i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \hat{f}(\omega). \end{aligned}$$

□

Wir werden jetzt zeigen, wie diese Eigenschaften angewendet werden können in ein Paar Beispielen.

BEISPIEL 4.36. Wir möchten die Fourier-Transformation der Funktion

$$f(t) := e^{-\alpha t^2}$$

bestimmen. Wir bemerken, dass die Funktion  $f$  im Fall  $\alpha = \frac{1}{2}$  die Normalverteilung beschreibt. Wir werden zwei verschiedene Methode anwenden. In beiden Methoden werden

wir das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy$$

brauchen. Um es zu berechnen, werden wir die Polarkoordinaten benutzen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \right)^2 \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\infty} e^{-\alpha \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\alpha \rho^2} \rho d\rho \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha \rho^2} \right) \Big|_0^R \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{\alpha}, \end{aligned}$$

sodass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Wir legen dieses Ergebnis beiseite und schliessen die Berechnung mit beiden Methoden ab.

Erste Methode: Das ist einfach eine direkte Berechnung.

$$(4.36) \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t} dt$$

Wir schreiben

$$\alpha t^2 + i\omega t = \left( \sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha},$$

sodass

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2 - i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy,$$

wobei wir die Substitution

$$y := \sqrt{\alpha} t + \frac{i\omega}{2\sqrt{\alpha}}$$

gemacht haben. Daraus folgt, dass

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

*Zweite Methode:* Das ist eine interessanter Methode, die die Eigenschaften der Fourier-Transformation benutzt. Da  $F(t) = e^{-\alpha t^2}$ , gilt

$$f'(t) = -2t\alpha e^{-\alpha t^2} = -2t\alpha f(t).$$

Wir wenden die Fourier-Transformation an beiden Seiten an und erhalten

$$\omega \hat{f}(\omega) \stackrel{\text{(FI6)}}{=} \widehat{f'}(\omega) = -2\alpha \widehat{tf(t)}(\omega) \stackrel{\text{(FI7)}}{=} -2\alpha i \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega).$$

Wir erhalten deshalb die separierbare Differentialgleichung

$$(\hat{f})'(\omega) = -\frac{1}{2\alpha} \omega \hat{f}(\omega),$$

deren allgemeine Lösung lautet

$$\hat{f}(\omega) = C e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}.$$

Da

$$C = \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}},$$

erhalten wir

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}},$$

wie mit der ersten Methode. □

**BEMERKUNG 4.37.** Im Beispiel 5.9 haben wir eine Differentialgleichung gelöst, um die Fourier-Transformation zu berechnen. Im Beispiel 4.39 werden wir die Umkehrung machen, nämlich wir die Fourier-Transformation berechnen werden, um eine Differentialgleichung zu lösen. Die Verbindung zwischen Differentialgleichungen und Fourier-Transformationen liegt in der Eigenschaften (FI6) und (FI7).

**BEISPIEL 4.38.** Wir möchten die Fourier-Transformation  $\mathcal{F}(f)$  der Funktion

$$g(t) := t e^{-t^2}$$

berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t e^{-t^2}) &= \mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right)\right) \stackrel{\text{(FI6)}}{=} i\omega \mathcal{F}\left(-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right) \\ &\stackrel{\text{(FI1)}}{=} -\frac{i\omega}{2} \mathcal{F}(e^{-t^2}) \stackrel{(*)}{=} \frac{-i\omega}{2\sqrt{2}} e^{-\omega^2/4}, \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) das Ergebnis vom Beispiel 5.9 benutzt haben. □

**BEISPIEL 4.39.** Sei  $y = y(t)$  eine Funktion, die der Differentialgleichung

$$y' + y = \chi_{[-1,1]}(t)$$

genügt. Wir bemerken, dass die übrigen Methoden der Analysis I und II wegen der Sprungstellen von  $\chi_{[-1,1]}$  nicht angewendet werden können. Wir wenden die Fourier-Transformation an beiden Seiten an und erhalten

$$i\omega \hat{y}(\omega) + \hat{y}(\omega) = \hat{\chi}_{[-1,1]}(\omega)$$

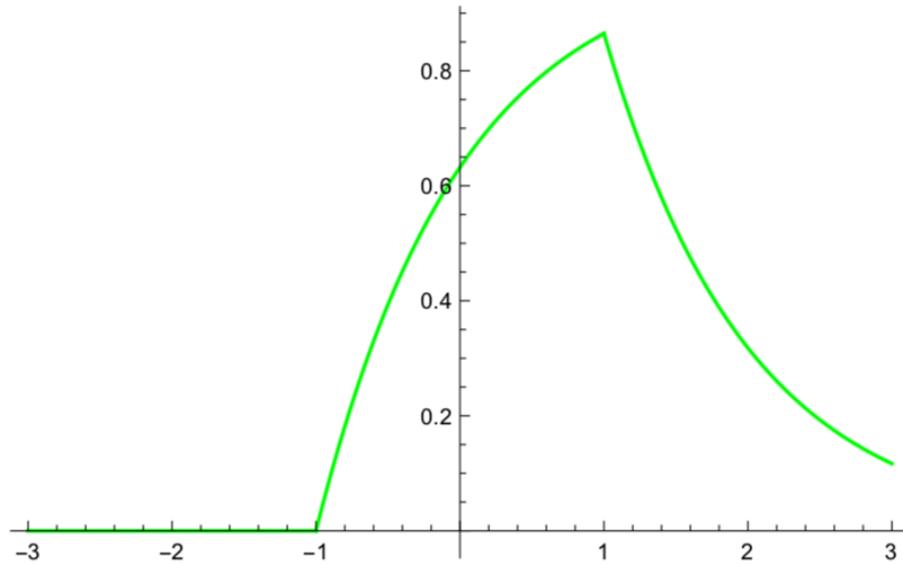


ABBILDUNG 3. Die Lösung  $y(t)$  von der Differentialgleichung im Beispiel 4.39

Die Gleichung ist nicht mehr eine Differentialgleichung und kann leicht für  $\hat{y}(\omega)$  gelöst werden

$$\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{\chi}_{[-1,1]}(\omega)}{1 + i\omega}.$$

Wir haben im Beispiel 4.33 gesehen, dass

$$\hat{\chi}_{[-1,1]}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

Also gilt

$$\hat{y}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega)}{\omega(1 + i\omega)}$$

und

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}_{[-1,1]}(\omega)}{1 + i\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega)}{\omega(1 + i\omega)} e^{i\omega t} d\omega \\ &\stackrel{(*)}{=} \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ 1 - e^{-(1+t)} & |t| < 1 \\ e^{1-t} - e^{-(1+t)} & t \geq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei wir (\*) mithilfe des Residuensatzes erhalten haben. Der Graph der Funktion  $y(t)$  findet sich im Abb. 3.

Also haben wir eine partikuläre Lösung gefunden ohne die Differentialgleichung zu lösen!

**4.2.1. Integraltransformationen.** Bevor wir zu einem etwas anderen, aber sehr wichtigen Thema übergehen, möchten wir einige Anmerkungen zur Verwendung der Fourier-Transformation oder allgemeiner Integraltransformationen machen.

DEFINITION 4.40. Eine *Integraltransformation* ist eine Transformation der Art

$$Tf(y) := \int_X K(x, y)f(x) dx,$$

wobei  $f$  (bzw.  $K$ ) eine Funktion auf einer Menge  $X$  (bzw.  $X \times Y$ ) definiert ist, die gewissen Zusatzbedingungen erfüllt. Die Funktion  $K(x, y)$  heisst der *Kern* der Integraltransformation.

- BEISPIEL 4.41. (1) Falls  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $f$  ist absolut integrierbar und  $K(x, y) = e^{-ixy}$  erhalten wir die Fourier-Transformation.
- (2) Falls  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \{y := c + i\omega : c \text{ fest}, \omega \in \mathbb{R}\}$ ,  $f$  nicht langsamer als  $Me^{\alpha x}$  abnimmt (wobei  $M \in \mathbb{R}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) und  $K(x, y) = e^{xy}$  erhalten wir die *Laplace-Transformation*, die wir im nächsten Kapitel lerner werden.
- (3) Falls  $X = [-L, L]$ ,  $Y = \mathbb{Z}$ ,  $K(t, n) = \frac{1}{2L}e^{-i\frac{n\pi}{L}t}$  und die Funktion  $f$  ist  $2L$ -periodisch, dann erhalten wir die komplexe Fourier Transformation.
- (4) Falls  $X = [-L, L]$ ,  $Y = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $K(t, n) = \frac{2}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$ , die Funktion  $f$  ist  $2L$ -periodisch und gerade und die Integration ist auf einer halben Periode, dann erhalten wir die Formel der reellen Fourier-Reihen Transformation im Satz 4.17 (1).
- (5) Falls  $X = [-L, L]$ ,  $Y = \mathbb{N}$ ,  $K(t, n) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$ , die Funktion  $f$  ist  $2L$ -periodisch und ungerade und die Integration ist auf einer halben Periode, erhalten wir die Formel der reellen Fourier-Reihen Transformation im Satz 4.17 (2).
- (6) Falls  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $K(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \cos(\omega t)$  und  $f$  ist gerade und absolut integrierbar, erhalten wir die Fourier-Cosinus Transformation.
- (7) Falls  $X = \mathbb{R}$ ,  $Y = \mathbb{R}$ ,  $K(t, \omega) = \frac{1}{\pi} \sin(\omega t)$ ,  $f$  ist ungerade und absolut integrierbar, erhalten wir die Fourier-Sinus Transformation.

Es gibt noch mehr Integraltransformationen, aber wir werden nur diese betrachten. Die Frage stellt sich, warum braucht man Integraltransformationen? Wir haben schon zwei verschiedenen Gründen gegeben.

- (1) Wir haben ein Problem auf einer Menge  $X$ , das schwierig zu lösen ist. Wir können aber das Problem auf  $X$  in einem einfacheren Problem auf  $Y$  mittels einer Integraltransformation ändern, das Problem auf  $Y$  zu lösen, und dann zurück auf  $X$  mittels der umgekehrten Integraltransformation ändern (sehen Beispiel 4.39).
- (2) Wenn wir Informationen über eine Funktion übertragen möchten, ist es manchmal einfacher, die Informationen über ihre Transformation zu übertragen und dann die Funktion aus diesen Informationen zu rekonstruieren.

**4.2.2. Faltung.** Es gibt mindesten zwei verschiedenen Gründen, eine neue Art von Multiplikation einzuleiten.

(1) Der erste kommt aus der Antwort zur folgenden Frage: Falls  $f$ , und  $f \cdot g$  absolut integrierbar sind, ist die Fourier-Transformation des Produktes gleich dem Produkt der Fourier-Transformationen? Die Antwort ist nein, weil die Fourier-Transformation des Produktes gleich der ‘‘Faltung’’ der Fourier-Transformationen ist (sehen (F6)).

(2) Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ und } g(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{\ell} z^{\ell}$$

zwei Potenzreihen. Wir haben schon in (1.8) die Formel für das Produkt

$$f(z)g(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$$

gesehen, wobei für  $h \geq 0$

$$(4.37) \quad c_h = \sum_{\ell=0}^h a_{h-\ell} b_{\ell}.$$

Die Koeffizienten in (4.37) des Produktes folgen den Regeln der so-geannten ‘‘Faltung’’.

**DEFINITION 4.42.** Seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zwei absolut integrierbare Funktionen. Der Faltungprodukt  $f * g$  von  $f$  und  $g$  ist

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Die Faltung von  $f$  mit  $g$  ist ein gewichteter Mittelwert von  $f$  mit Gewicht gegeben durch  $g$ . Wir werden sehen, dass das Faltungsprodukt sehr nützliche Eigenschaften besitzt. Zum Beispiel werden Funktionen geglättet, so dass  $f * g$  mindestens so glatt ist, wie die glatteste der beiden Funktionen. Wir können dies schon anhand eines Beispiels veranschaulichen. Wir gehen dem Beispiel eine Bemerkung voraus.

**BEMERKUNG 4.43.** Seien  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  zwei absolut integrierbare Funktionen, die auf  $(-\infty, 0)$  (oder auf  $(-\infty, 0]$ ) verschwinden. Dann gilt für  $x < 0$

$$f * g(x) = 0$$

und für  $x \geq 0$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^{\infty} f(x-t)g(t) dt \stackrel{(**)}{=} \int_0^x f(x-t)g(t) dt,$$

wobei  $(*)$  aus  $g(t) = 0$  für jedes  $t \leq 0$  folgt und  $(**)$  aus  $f(x-t) = 0$  für jedes  $x \leq t$ .

BEISPIEL 4.44. Sei  $\chi_{[0,1]}$  die Charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$ , die wir im Beispiel 4.33 definiert haben. Es gilt für jede absolut integrierbare Funktion  $g$  mit  $g(t) = 0$  auf  $(\infty, 0)$

$$\chi_{[0,1]} * g(x) = \int_{x-1}^x g(t) dt,$$

weil  $0 \leq x - t \leq 1$  genau dann, wenn  $1 - x \leq t \leq x$ . Anders gesagt, ergibt  $\chi_{[0,1]} * g(x)$  den Mittelwert vom Zeitsignal  $g$  über die letzte Sekunde.

Wir berechnen jetzt die Faltung  $\chi_{[0,1]} * g_n(x)$  für

$$g_n = \underbrace{\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}}_{n\text{-Mal}}.$$

Die resultierende Funktion

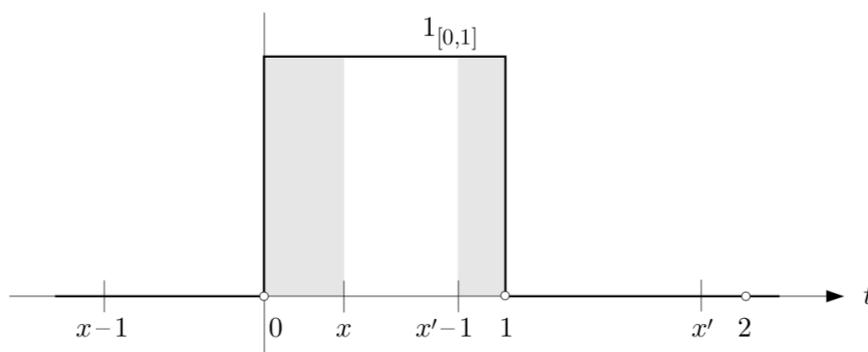
$$B_n(x) := \chi_{[0,1]} * g_n(x)$$

heisst *B-Spline*.

n=1

$$B_1(x) = \chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}(x) = \int_{x-1}^x \chi_{[0,1]}(t) dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x dt & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{x-1}^1 dt & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases} = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

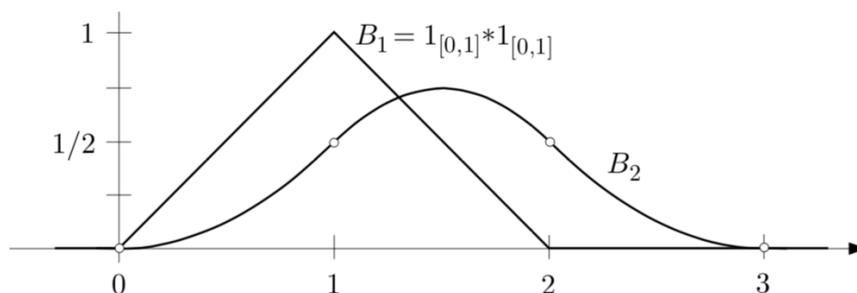
Wir bemerken, dass wir mit einer Funktion  $g_1 = \chi_{[0,1]}$  mit zwei Sprungstellen angefangen haben, um eine stückweis stetige Funktion zu erhalten. Der Träger von  $B_1$  ist das Intervall  $[0, 2]$ , das den Träger von  $\chi_{[0,1]}$  erhält.



n=2

$$\begin{aligned}
 B_2(x) = \chi_{[0,1]} * g_2(x) = \chi_{[0,1]} * B_1(x) &= \begin{cases} \int_0^x t \, dt & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_1^x (2-t) \, dt + \int_{x-1}^1 t \, dt & 1 \leq x \leq 2 \\ \int_{x-1}^2 (2-t) \, dt & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Der Träger von  $B_2$  ist das Intervall  $[0, 3]$ , das den Träger von  $b_1$  enthält. Man kann sich auch leicht überzeugen, dass  $B_2$  differenzierbar an den Stellen  $x = 0, 1, 2$  und  $3$  ist.



Eigentlich erhält man eine Folge von stückweis Polynomfunktionen  $B_n$ , die immer glattere sind und deren Träger immer grössere ist.  $\square$

EIGENSCHAFTEN. Seien  $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  absolut integrierbare Funktionen. Dann gilt:

(F1) (Kommutativität) Es gilt

$$\boxed{f * g = g * f}.$$

(F2) (Assoziativität) Es gilt

$$\boxed{(f * g) * h = f * (g * h)}.$$

(F3) (Distributivität) Falls  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , gilt

$$\boxed{(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h}.$$

(F4) Falls  $T_a(f)(x) := f(x - a)$  ist wie in (FT2) definiert, gilt

$$\boxed{(T_a f) * g = T_a(f * g)}.$$

für jedes  $a \in \mathbb{R}$ .

(F5) (Fourier-Transformation der Faltung)

$$\boxed{\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)}.$$

(F5') (Inverse Fourier-Transformation der Faltung) Falls  $\hat{f}$  und  $\hat{g}$  absolut integrierbar sind, gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(f) \cdot \mathcal{F}^{-1}(g).$$

(F6) (Fourier-Transformation des Produktes) Seien  $\mathcal{F}(f)$ ,  $\mathcal{F}(g)$  und  $f \cdot g$  absolut integrierbar. Dann gilt

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

(F6') (Inverse Fourier-Transformation des Produktes) Seien  $f$ ,  $g$  und  $f \cdot g$  absolut integrierbar ist. Dann gilt

$$\mathcal{F}^{-1}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g).$$

BEWEIS. (F1)-(F3) sind klar.

(F4)

$$\begin{aligned} (T_a f) * g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - a) g(t - \tau) d\tau \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) g(t - a - \zeta) d\zeta \\ &= (f * g)(t - a) = T_a(f * g)(t), \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die Substitution  $\zeta = \tau - a$  gemacht haben.

(F5) und (F5')

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f * g(\omega) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right) d\tau \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega(t+\tau)} dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}(g)(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \mathcal{F}(g)(\omega) \cdot \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\omega) \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega), \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die Substitution  $t - \tau \rightarrow t$  gemacht haben.

Der Beweise der Formel in (F5') ist gleich.

(F6) Wir wenden (F5') auf die Funktionen  $\mathcal{F}(f)$  und  $\mathcal{F}(g)$  an und erhalten

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) \cdot \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f \cdot g.$$

(F6') Wir wenden (F5) auf die Funktionen  $\mathcal{F}^{-1}(f)$  und  $\mathcal{F}^{-1}(g)$  an und erhalten

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) \cdot \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g)) = \sqrt{2\pi} f \cdot g.$$

□

Aus (F5) folgt, dass

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g))(t) = (f * g)(t).$$

Mithilfe der Definition der Inverse Fourier-Transformation erhalten wir

$$\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x) dx.$$

und insbesondere um  $t = 0$

$$(4.38) \quad \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)g(x) dx.$$

Sei  $g(t) = \bar{f}(-t)$ , wobei  $\bar{f}$  die komplexe konjugierte von  $f$  bezeichnet. Dann gilt

$$(4.39) \quad \hat{g}(\omega) = \bar{\hat{f}}(\omega).$$

Eigentlich gilt

$$\sqrt{2\pi} \bar{\hat{f}}(\omega) = \overline{\left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt \right)} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(t) e^{-i(-t)\omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(-t) e^{-i(-t)\omega} dt = \sqrt{2\pi} \hat{g}(\omega).$$

Falls wir (4.39) in (4.38) einsetzen, haben wir den folgenden Satze bewiesen:

**SATZ 4.45 (Satz von Plancherel).** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine absolut integrierbar Funktion deren Fourier-Transformation auch absolut integrierbar ist. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Die Physikalische Interpretation dieses Satzes ist, dass d.h. die Gesamtenergie eines Zeitsignals wird unter der Fouriertransformation erhalten. Anders gesagt ist die Energie im Zeitbereich gleich der Energie im Frequenzbereich. Aber was hat die Energie mit diesen beiden Integralen zu tun? Wir werden dies mit einem einfachen Beispiel veranschaulichen.

**BEISPIEL 4.46.** Wir betrachten einen harmonischen Oszillator, zum Beispiel eine Masse  $m$  auf einer Feder mit der Federkonstanten  $k$ . Wir nehmen an, dass das System keine Dämpfung und keine äussere Kraft hat, so dass die Differentialgleichung, die die Schwingung  $y(t)$  der Masses erfüllt gleich

$$(4.40) \quad my'' + ky = 0.$$

Falls  $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$ , ist die allgemeine Lösung

$$(4.41) \quad y(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_{-1} e^{-i\omega_0 t},$$

wobei  $c_{-1} = \overline{c_1}$ . Wir können (4.40) mal  $y'$  multiplizieren

$$m y'' y' + k y y' = 0$$

und integrieren und wir erhalten

$$\frac{1}{2} m (y')^2 + \frac{1}{2} k y^2 = E.$$

Der Term  $\frac{1}{2} m (y')^2$  beschreibt die kinetische Energie der Masse und der Term  $\frac{1}{2} k y^2$  die potentielle Energie, so dass  $E$  die Gesamtenergie ist, die eine Konstante ist. Aus (4.41) folgt, dass

$$y'(t) = i\omega_0 c_1 e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 c_{-1} e^{-i\omega_0 t},$$

so dass

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m (y')^2 + \frac{1}{2} k y^2 \\ &= -\frac{1}{2} m \omega_0^2 (c_1 e^{i\omega_0 t} + c_{-1} e^{-i\omega_0 t})^2 + \frac{1}{2} k (c_1 e^{i\omega_0 t} + c_{-1} e^{-i\omega_0 t})^2 \\ &= -\frac{1}{2} m \frac{k}{m} (c_1^2 e^{2i\omega_0 t} + -2c_1 c_{-1} c_{-1}^2 e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{1}{2} k (c_1^2 e^{2i\omega_0 t} + 2c_1 c_{-1} + c_{-1}^2 e^{-2i\omega_0 t}) \\ &= 2k c_1 c_{-1} = 2k |c_1|^2. \end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass die Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion eine Interpretation als Fourier-Transformation haben. Wir haben deshalb in diesem einfachen Fall von einer Funktion mit nur einer Frequenz gesehen, dass die gesamte Energie in Verbindung mit dem Quadrat des Absolutbetrags ihrer Fourier-Transformation ist.  $\square$

## Laplace-Transformation

### 5.1. Grundbegriffe

Wir werden den Begriff der Fourier-Transformation ein bisschen abändern. Zu diesem Zweck betrachten wir Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass

- (1)  $f(t) = 0$  für jedes  $t < 0$ , und
- (2) für  $t > 0$  ersetzen wir die Funktion  $f(t)$  in der Fourier-Transformation durch die Funktion  $e^{-ct}f(t)$ , wobei  $c > 0$ .

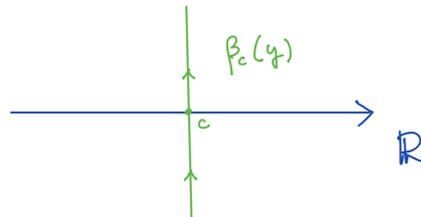
Die Formel des Fourier-Integrals wird deshalb

$$e^{-ct}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-iyx} e^{-cx} f(x) dx \right) e^{iyt} dy,$$

oder

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(c+iy)x} f(x) dx \right) e^{(c+iy)t} dy.$$

Sei  $\beta_c(y) := c + iy$  für  $y \in (-\infty, \infty)$  der Pfad von  $c - i\infty$  bis  $c + i\infty$ , wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine feste Konstante ist.



Dann können wir das obige Integral als ein Kurvenintegral schreiben und erhalten für  $s \in \mathbb{C}$

$$(5.1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_c} \left( \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right) e^{st} ds.$$

Wir werden zu dieser Formel im Abschnitt 5.3 zurückkommen. In Moment geben wir die folgende Definition:

**DEFINITION 5.1.** Sei  $s \in \mathbb{C}$ . Die *Laplace-Transformation* der Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Wir zeigen nun, dass die Laplace-Transformation einer Funktion  $f$  unter bestimmten Hypothesen existiert und schöne Eigenschaften hat.

SATZ 5.2. Sei  $\mathcal{E}$  der Raum der Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

- (i)  $f(t) = 0$  für jedes  $t < 0$ ;
- (ii) es gibt ein  $\sigma \in \mathbb{R}$  und ein  $M > 0$  mit

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}$$

für alle  $t > 0$ ;

- (iii)  $f$  ist stückweis stetig und die Grenzwerte

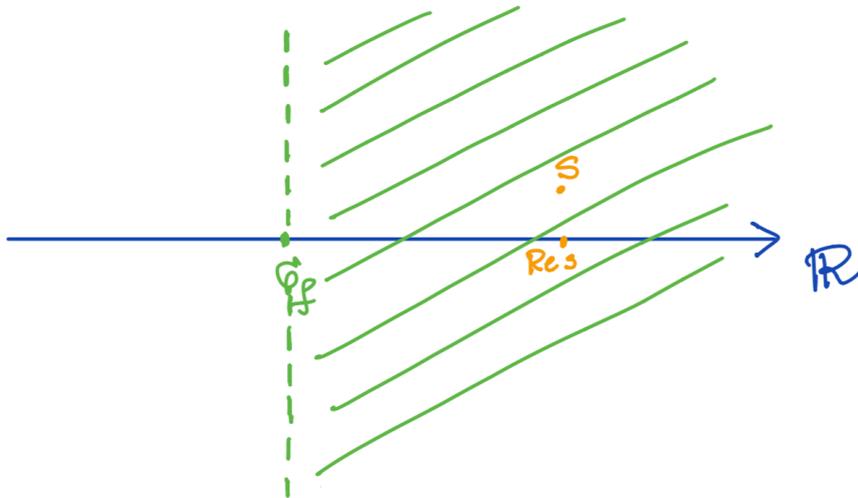
$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) \text{ und } \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t)$$

existieren an jeder Sprungstelle  $t_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  und insbesondere existiert

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Dann ist Die Laplace-Transformation  $\mathcal{L}[f]$  für jede  $f \in \mathcal{E}$  auf der Halbebene  $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \sigma\}$  wohldefiniert und eine komplexe Analytische Funktion der Variable  $s$ . Ausserdem gilt

$$(5.2) \quad \lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0.$$



DEFINITION 5.3. Wir nennen  $\mathcal{E}$  den *Originalraum*: eine Funktion  $f \in \mathcal{E}$  heisst *Originalfunktion* und sie lebt im *Zeitbereich*. Die Laplace-Transformation  $\mathcal{L}[f]$  ist eine *Bildfunktion* und sie lebt im *Bildbereich*.

Der Unterschied zwischen der Laplace-Transformation und der Fourier-Transformation ist, dass man für die Laplace-Transformation auch wachsende Funktionen betrachten kann. Andererseits bringen die Werte von  $f$  für negative Werte von  $t$  keine Kontribution.

BEMERKUNGEN 5.4. (1) Falls  $f(t) \not\equiv 0$  für  $t < 0$ , können wir immer die Funktion zwingen die Bedingung zu erfüllen. Anders gesagt können wir die Funktion  $f$  mit der wie folgt definierten *Heaviside Funktion*

$$(5.3) \quad H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

multiplizieren.

(2) Falls  $\sigma' > \sigma$ , gilt

$$e^{\sigma t} < e^{\sigma' t},$$

so dass aus

$$|f(t)| < C e^{\sigma t}$$

folgt auch

$$|f(t)| < C e^{\sigma' t}.$$

Der kleinste  $\sigma_f$ , so dass  $|f(t)| < C e^{\sigma t}$  für jedes  $\sigma_f < \sigma$  heisst *Wachstumkoeffizient*.

BEISPIELE 5.5. (1) Die Heaviside Funktion hat Wachstumkoeffizient  $\sigma_H = 0$ .

(2) Die Funktion

$$f(t) := H(t) t^n = \begin{cases} t^n & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ist stückweis stetig und wir möchten sehen, dass  $f$  eine Originalfunktion ist, d.h. dass es  $C > 0$  und  $\sigma \in \mathbb{R}$  gibt, sodass

$$t^n < C e^{\sigma t}$$

für  $t$  positiv. Tatsächlich gilt für jedes  $\sigma > 0$  und  $t \geq 0$

$$e^{\sigma t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma t)^k}{k!} \geq \frac{\sigma^n t^n}{n!},$$

sodass

$$t^n \leq C e^{\sigma t} \text{ mit } C = \frac{n!}{\sigma^n}.$$

Das heisst, dass  $\sigma_f = \int \{\sigma : t^n \leq C e^{\sigma t}\} = 0$

(3) Die Funktion  $f(t) := H(t) e^{\alpha t}$ , für  $\alpha \in \mathbb{C}$  ist eine Originalfunktion mit Wachstumkoeffizient  $\sigma_f = \Re(\alpha)$ . Eigentlich ist

$$|e^{\alpha t}| \leq e^{\Re(\alpha)t}.$$

(4) Das Produkt zweier Originalfunktionen ist eine Originalfunktion. Eigentlich seien  $f, g \in \mathcal{E}$  mit Konstanten  $M_f, M_g$  und Wachstumkoeffizienten  $\sigma_f$  und  $\sigma_g$ . Dann gilt für jedes  $t > 0$

$$|f(t)| < M_f e^{\sigma_f t} \quad \text{und} \quad |g(t)| < M_g e^{\sigma_g t}$$

und daraus folgt, dass

$$|(f \cdot g)(t)| < M_f M_g e^{\sigma_f t} e^{\sigma_g t} = C e^{(\sigma_f + \sigma_g)t}.$$

- (5) Die Funktion  $f(t) = H(t) e^{t^2}$  ist keine Originalfunktion, weil es kein  $\sigma$  gibt, sodass  $e^{t^2} < e^{\sigma t}$  für jedes  $t > 0$ . Die Idee ist, dass eine Originalfunktion wachsen kann, aber nicht schneller als ein Exponentialfunktion mit linearem Exponent.

BEWEIS VOM SATZ 5.2. Sei  $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ , so dass  $\Re(s) > \sigma_1 > \sigma$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_0^\infty e^{-\Re(s)t} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-\Re(s)t} e^{\sigma_1 t} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{-(\Re(s)-\sigma_1)t} dt \\ &= M \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma_1 - \Re(s)} \left( e^{-(\Re(s)-\sigma_1)R} - 1 \right) \\ &= \frac{M}{\sigma_1 - \Re(s)} < \infty \end{aligned}$$

Es folgt die Existenz des Integrals und die Aussage, dass  $\lim_{\Re(s) \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$ . Die Holomorphizität von  $\mathcal{L}[f]$  ergibt sich aus der Berechnung der Ableitung  $\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s)$ , sobald wir zeigen, dass wir unter dem Integral nach  $s$  differenzieren können.  $\square$

BEISPIEL 5.6. Wir berechnen die Laplace-Transformation der Heaviside Funktion. Sei  $\Re(s) > 0$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[H](s) = \int_0^\infty e^{-st} H(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}. \quad \square$$

BEISPIEL 5.7. Sei  $f(t) := H(t) e^{\alpha t}$  für  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[H(t) e^{\alpha t}](s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s-\alpha},$$

für  $\Re(s) > \Re(\alpha)$ .  $\square$

BEISPIEL 5.8. Wir berechnen die Laplace-Transformation der Funktion

$$f(t) := H(t) t^n$$

im Beispiel 5.5(2), wobei  $n \in \mathbb{N}$ .

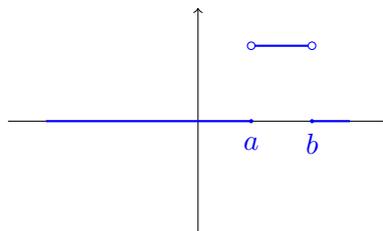
$$\mathcal{L}[H(t) t^n](s) = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \int_0^\infty e^{-\tau} \left(\frac{\tau}{s}\right)^n \frac{1}{s} d\tau = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty \tau^n e^{-\tau} d\tau = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

wobei wir im letzten Integral die partielle Integration benützt haben.  $\square$

BEISPIEL 5.9. Bevor wir fortfahren, wollen wir uns ein wenig in der Benützung der Heaviside Funktion üben.

- (1) Die Charakteristische Funktion eines Intervalls  $(a, b)$

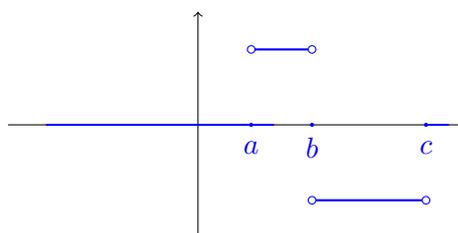
$$\chi_{(a,b)}(t) := \begin{cases} 1 & a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



lässt sich als  $\chi_{(a,b)}(t) = H(t-a) - H(t-b)$  schreiben werden. Das ist nicht ganz richtig, weil der Definitionsbereich von  $\chi_{(a,b)}$  die ganze reelle Achse ist, und  $H(t-a) - H(t-b)$  an den Stellen  $t = a$  und  $t = b$  nicht definiert ist. (Siehe Bemerkung 5.10.)

(2) Die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 1 & a < t < b \\ -1 & b < t < c \\ 0 & t < a \text{ or } t > c \end{cases}$$

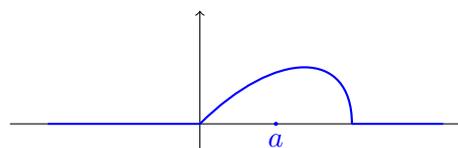


lässt sich als

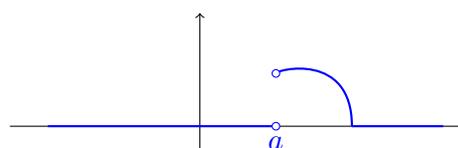
$$f(t) = H(t-a) - 2H(t-b) + H(t-c)$$

schreiben werden.

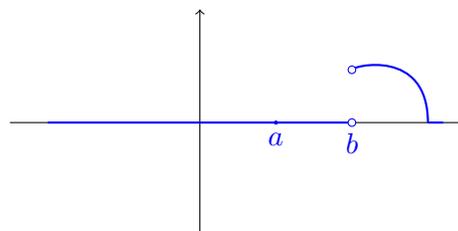
(3) Falls der Graph von  $f(t)$  ist



dann ist der Graph von  $H(t-a)f(t)$



und der von  $H(t-b)f(t-a)$  mit  $a < b$



□

BEMERKUNG 5.10. Wir werden im Abschnitt 5.4.1 sehen, dass die Heaviside Funktion eine "verallgemeinerte" Funktion ist. Anders gesagt,  $H$  kann mittels Integration als lineares Funktional auf dem Raum der originalfunktionen aufgefasst werden. Daraus folgt, dass der Wert der Heaviside Funktion an der Stelle  $t = 0$  nicht wichtig ist. Laut einigen Autoren wird  $H(0)$  nicht definiert, oder nach anderen  $H(0) = 0$  oder  $H(0) = 1$  oder  $H(0) = \frac{1}{2}$ . Unsere Vereinbarung ist, dass  $H$  im Ursprung nicht definiert ist.

## 5.2. Rechenregel und verallgemeinerte Funktionen

Die Rechenregeln der Laplace-Transformation sind ähnlich der Rechenregeln der Fourier-Transformation.

EIGENSCHAFT. (LT1) (*Linearität*) Seien  $f, g \in \mathcal{E}$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s).$$

BEISPIEL 5.11.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega t](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\right](s) = \frac{1}{2i} (\mathcal{L}[e^{i\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-i\omega t}])(s) \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad \square \end{aligned}$$

EIGENSCHAFTEN. Sei  $f \in \mathcal{E}$ .

(LT2) (*Verschiebung in der  $t$  Variabel*)

$$\mathcal{L}[f(t - a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f](s).$$

(LT3) (*Verschiebung in der  $s$  Variabel*) Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dann

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s - \alpha).$$

(LT4) (*Ähnlichkeit*) Sei  $a \in \mathbb{R}^+$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right).$$

(LT5) (*Laplace-Transformation der Ableitung*) Sei  $f \in \mathcal{E}$  mit  $f' \in \mathcal{E}$  und sei  $f(t)$  stetig für  $t > 0$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t).$$

Falls auch  $f'', \dots, f^{(n)} \in \mathcal{E}$  und falls  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  stetig für  $t > 0$  sind, gilt

$$(5.4) \quad \mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - s^{n-2} \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) - \dots - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-1)}(t).$$

BEWEIS. (LT2) Da  $a > 0$  und  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ , ist

$$f(t - a) = 0 \quad \text{für } -\infty < t < a.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t - a)](s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t - a) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t - a) dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-sa} \mathcal{L}[f](s), \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die Substitution  $\tau = t - a$  verwendet haben.

(LT3) Wir haben schon diese Eigenschaft im Fall von  $f(t) = H(t)$  im Beispiel 5.7 gesehen. Im Allgemeinen gilt

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} f(t) dt = \mathcal{L}[f](s - \alpha).$$

(LT4)

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(at) dt \stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty e^{-\frac{s\tau}{a}} f(\tau) \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right),$$

wobei wir in (\*) die SUBstitution  $\tau = at$  verwendet haben.

(LT5) Wir werden die Formel mittels Induktion beweisen.

$n = 1$ : Mithilfe der Partielleintegration erhalten wir

$$\begin{aligned} (5.5) \quad \mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-sR} f(R) - \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-st} f(t) + s \mathcal{L}[f](s) \stackrel{(*)}{=} s \mathcal{L}[f](s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) benützt haben, dass  $\Re(s) > \sigma_f$ , so dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} |e^{-sR} f(R)| = \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\Re(s)R} |f(R)| \leq M \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\Re(s)R} e^{\sigma_f R} = M \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-(\Re(s) - \sigma_f)R} = 0.$$

Jetzt nehmen wir an, dass

$$(5.6) \quad \mathcal{L}[f^{(n-1)}](s) = s^{n-1} \mathcal{L}[f](s) - s^{n-2} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - s^{n-3} \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) - \dots - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-2)}(t).$$

$n > 1$ : Sei  $g(t) := f^{(n-1)}(t)$ . Wegen der Definition von  $g$  und mithilfe von (5.5) und (5.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}](s) &= \mathcal{L}[g'](s) \\ &\stackrel{(5.5)}{=} s\mathcal{L}[g](s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) \\ &= s\mathcal{L}[f^{(n-1)}](s) - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-1)}(t) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} s \left[ s^{n-1}\mathcal{L}[f](s) - s^{n-2} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - \dots - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-2)}(t) \right] - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-1)}(t) \\ &= s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - s^{n-2} \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) - \dots - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

wie gewünscht.  $\square$

**BEMERKUNG 5.12.** Normalerweise schreibt man

$$(5.7) \quad \mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

ohne die Limes in (5.4). Die Bedeutung von (5.4) und (5.7) ist gleich, falls die Funktionen  $f, f', \dots, f^{(n)}$  stetig im Ursprung (vom Rechts) sind. Falls, nicht, muss man die Schreibweise (5.4) oder

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - s^{n-1} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) - s^{n-2} \lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) - \dots - \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(n-1)}(t)$$

benützen.

**BEISPIEL 5.13.** Wir benutzen (LT5) und das Beispiel 5.8 um die Laplace-Transformation von  $f(t) = \cos \omega t$  zu berechnen.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega t](s) &= \mathcal{L} \left[ \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} \sin \omega t \right] (s) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} \sin \omega t \right] (s) \\ &= \frac{s}{\omega} \mathcal{L}[\sin \omega t](s) - \sin \omega t|_{t=0} = \frac{s}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad \square$$

**EIGENSCHAFTEN.** Sei  $f \in \mathcal{E}$ .

(LT6) (Ableitungen der Laplace-Transformation) Es gilt für  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}[f])(s) = (-1)^n \mathcal{L}[t^n f(t)](s).$$

(LT7)

$$\mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] (s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s).$$

(LT8) Sei  $\sigma_f$  der Wachstumskoeffizient von  $f$ . Für  $x > \sigma_f$  gilt

$$\mathcal{L} \left[ \frac{f(t)}{t} \right] (x + iy) = \int_{x+iy}^{\infty+iy} \mathcal{L}[f](\tau) d\tau.$$

BEWEIS. (LT6) Wir beweisen die Aussage noch einmal mittels Induktion.

$n = 1$

$$(5.8) \quad \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt = -\mathcal{L}[tf(t)](s).$$

Wir nehmen an, dass

$$\mathcal{L}[t^{n-1} f(t)](s) = (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (\mathcal{L}[f])(s).$$

und wir setzen  $g(t) := t^{n-1} f(t)$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^n f(t)](s) &= \mathcal{L}[tg(t)] \stackrel{(5.8)}{=} -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[g](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f^{n-1} f(t)](s) \\ &= (-1)^n \frac{d}{ds} \left( \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} (\mathcal{L}[f])(s) \right) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} (\mathcal{L}[f])(s). \end{aligned}$$

(LT7) Es ist einfach zu sehen, dass aus  $f \in \mathcal{E}$  folgt, dass die Funktion

$$t \mapsto \int_0^t f(\tau) d\tau$$

auch in  $\mathcal{E}$  ist. Da

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t),$$

folgt aus (LT5), dass

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L} \left[ \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau \right] (s) = s \mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] (s) + \int_0^0 f(\tau) d\tau = s \mathcal{L} \left[ \int_0^t f(\tau) d\tau \right] (s).$$

(LT8) Wir setzen  $g(t) := \frac{f(t)}{t}$  und wir bemerken, dass  $g \in \mathcal{E}$  und  $\sigma_g < \sigma_f$ . Wir benützen die Schreibweise

$$F(s) := \mathcal{L}[f](s) \quad \text{und} \quad G(s) := \mathcal{L}[g](s).$$

Aus (LT6) folgt

$$F(s) = \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[tg(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[g](s) = -G'(s),$$

so dass

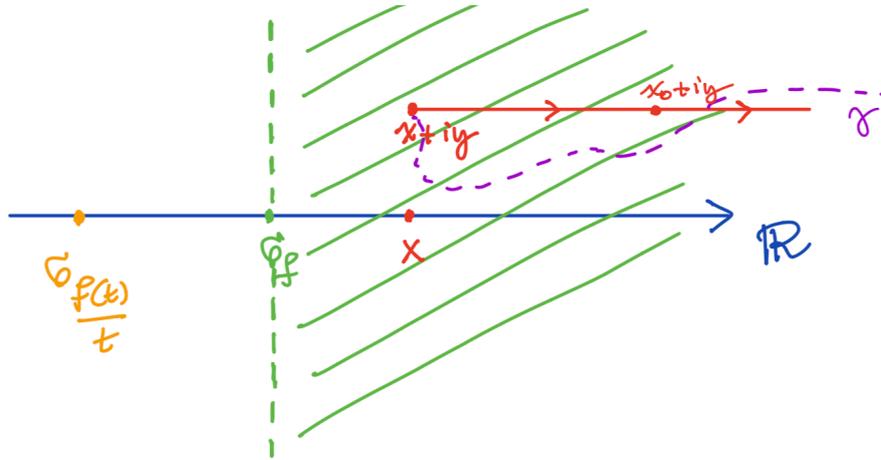
$$\int_{x+iy}^{x_0+iy} F(\tau) d\tau = - \int_{x+iy}^{x_0+iy} G'(\tau) d\tau = G(x+iy) - G(x_0+iy).$$

Laut (5.2) gilt

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} G(x_0 + iy) = 0$$

und die Aussage ist bewiesen.

Wir bemerken, dass wir aufgrund der Holomorphizität von  $F(s)$  auf der Halbebene  $\{s : \Re(s) > \sigma_f\}$  das Kurvenintegral auf jedem Weg  $\gamma$  mit  $\Re(\gamma) \rightarrow \infty$  hätten nehmen können.



□

BEISPIEL 5.14. Nehmen wir an, dass wir den Wert des Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

nicht kennen. Wir benutzen die Laplace-Transformation, um diesen Werte zu raten. Wir haben im Beispiel 5.11 gesehen, dass  $\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2+1}$ . Nach der Regel (LT8) mit  $y = 0$  folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt &= \mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](x) \stackrel{\text{(LT8)}}{=} \int_x^{\infty} \mathcal{L}[\sin t](\tau) d\tau \\ &= \int_x^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2+1} = \arctan \tau \Big|_x^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan x. \end{aligned}$$

Es wäre sehr nützlich,  $x = 0$  einzusetzen. In diesem Fall würden wir

$$(5.9) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

erhalten und wir wissen, dass es die richtige Ergebnis ist. Da  $\sigma_{\sin} = 0$ , können wir leider es nicht machen, weil die Laplace-Transformation  $\mathcal{L}[g](s)$  einer Originalfunktion  $g \in \mathcal{E}$  nur für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > \sigma_g$  wohldefiniert ist (siehe Satz 5.2). Was können wir schreiben, ist, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Für einen Mathematiker ist dies nicht genug, aber für einen Ingenieur ist dies vielleicht eine ziemlich gute Evidenz dafür, dass (5.9) gelten könnte. □

EIGENSCHAFTEN. (LT9) Sei  $T > 0$  und sei  $f$  eine  $T$ -periodische Funktion, d.h.  $f(t+T) = f(t)$  für jedes  $t \geq 0$ . Dann gilt für jedes  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(s) > 0$

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

(LT10) (Faltungssatz) Seien  $f, g \in \mathcal{E}$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f]\mathcal{L}[g].$$

BEWEIS. (LT9) Wir setzen

$$f_0(t) := \begin{cases} f(t) & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann können wir schreiben

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - kT).$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[f_0(t - kT)](s) \stackrel{(LT2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} \mathcal{L}[f_0](s) \\ &= \mathcal{L}[f_0](s) \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-Ts})^k \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \mathcal{L}[f_0](s) \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^{\infty} e^{-st} f_0(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt, \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) benützt haben, dass aus  $\Re(s) > 0$  folgt, dass  $|e^{-sT}| < 1$ .

(LT10) Wir sollten zuerst beweisen, dass  $f * g \in \mathcal{E}$ , falls  $f, g \in \mathcal{E}$ . In Bemerkung 4.43 haben wir schon gesehen, dass  $f * g(t) = 0$  für jedes  $t > 0$ . Weiter seien  $M_f, M_g \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$  mit

$$|f(t)| \leq M_f e^{\alpha' t} \quad \text{und} \quad |g(t)| \leq M_g e^{\alpha'' t}$$

für jedes  $t \in \mathbb{R}$ . Sei  $\alpha = \max\{\alpha', \alpha''\}$ . Dann gilt

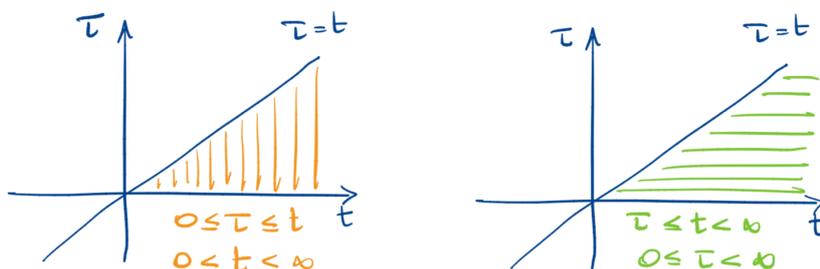
$$\begin{aligned} |f * g(t)| &= \left| \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right| \leq \left| \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right| \\ &\leq M_f M_g \int_0^t e^{\alpha'(t-\tau)} e^{\alpha''\tau} d\tau \leq M_f M_g \int_0^t e^{\alpha(t-\tau)} e^{\alpha\tau} d\tau \\ &= M_f M_g \int_0^t e^{\alpha t} d\tau = M_f M_g t e^{\alpha t} \leq M e^{\beta t}, \end{aligned}$$

wobei  $M = M_f M_g \in \mathbb{R}$  und  $\beta \geq \alpha > 0$  (siehe Beispiel 5.5(2), (3) und (4)).

Da  $g(t - \tau) = 0$  für  $t < \tau$ , gilt

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right) dt.$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge



liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty f(\tau) \left( \int_\tau^\infty e^{-st} g(t - \tau) dt \right) d\tau = \int_0^\infty f(\tau) \left( \int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} g(u) du \right) d\tau \\ &= \left( \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) d\tau \right) \left( \int_0^\infty e^{-su} g(u) du \right) = \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s). \end{aligned}$$

□

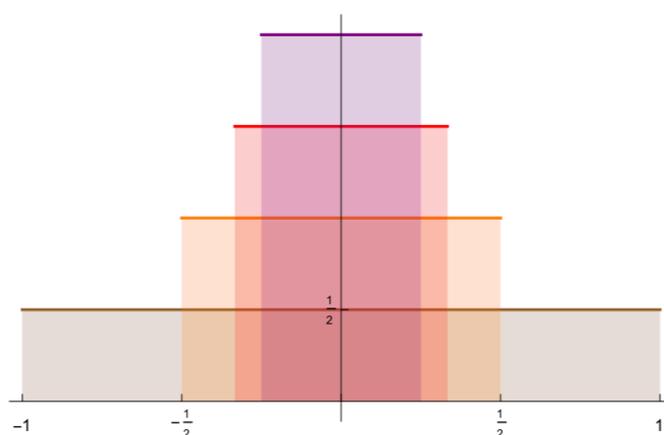
**5.2.1. Verallgemeinerte Funktionen.** Wir möchten nun eine “verallgemeinerte Funktion” einführen, die so-genannte *Dirac-Delta Funktion* (oder *Deltastoss*, *Dirac Funktion*, *Dirac-Impuls*, *Impuls-Funktion*, *Nadelimpuls*, etc) und ein Paar wichtiger Eigenschaften dieser “Funktion” beweisen.

DEFINITION 5.15. Sei

$$\delta_\epsilon(t) := \frac{1}{2\epsilon} \chi_{(-\epsilon, \epsilon)}(t).$$

Die *Dirac-Delta* ist dann wie folgende definiert

$$\delta(t) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$$



Die Dirac-Delta ist keine Funktion, weil ihr Wert in der Nähe vom Ursprung beliebig gross ist. Sie ist eine sogenannte *Distribution*, aber die Theorie der Distributionen geht

über den Rahmen dieses Kurses hinaus. Wir geben hier sowieso ein Paar wichtigen Eigenschaften, deren Beweis die Theorie der Distributionen brauchen würde. Wir werden stattdessen mit einem schlampigen Beweis zufrieden sein. Obwohl der Wert von  $\delta$  im Ursprung “unendlich” ist, ist dennoch das Integral endlich und tatsächlich gleich 1. Eigentlich gilt

EIGENSCHAFT. (D1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Tatsächlich gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\epsilon} \chi_{(-\epsilon, \epsilon)}(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{2\epsilon} dt = 1.$$

Weiter

EIGENSCHAFT. (D2) Für jede stetige Funktion  $f$  gilt

(5.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0).$$

Diese Eigenschaft ist mithilfe der Definition von  $\delta$  und der Faltung einfach zu sehen, weil wir schon im Abschnitt 4.2.2 bemerkt haben, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\epsilon}(t - t_0) f(t) dt = \delta_{\epsilon} * f(t_0)$$

ein gewogenes Mittel der Werte von  $f$  über das Intervall  $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$  darstellt.

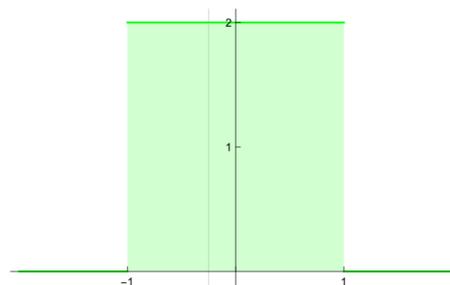
EIGENSCHAFT. (D3) Es gilt

$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds$$

Da

$$\int_{-\infty}^t \delta_{\epsilon}(s) ds = \begin{cases} 0 & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}(t + \epsilon) & -\epsilon < t < \epsilon \\ 1 & \epsilon < t, \end{cases}$$

ist (D3) mit einem Limes einfach zu erhalten.



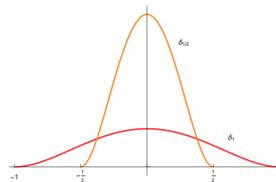
Die Eigenschaften (D1) und (D2) charakterisieren die Delta Dirac eindeutig, und tatsächlich hätte man das Delta Dirac auf diese Weise definieren können. Alternativ hätte man verschiedene Funktionen  $\delta_{\epsilon}$  in der Definition 5.15 wählen können, solange der Limes für

$\epsilon \rightarrow 0$  die obigen Eigenschaften erfüllt. Andere Möglichkeiten für  $\delta_\epsilon$  könnten zum Beispiel die folgende gewesen sein:

- (1) Falls  $\phi(t) = \frac{1}{c}(1-t^2)^r$ , wobei  $c = \int_{-1}^1 (1-t^2)^r dt$ , dann konnten wir

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$

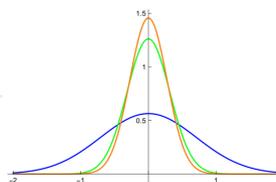
nehmen.



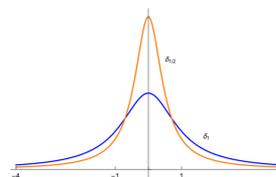
- (2) Falls  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$  die Normalverteilung ist, konnte

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-t^2/\epsilon}$$

sein.



- (3) 
$$\delta_\epsilon(t) = \frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2 + t^2)}.$$



Man kann auch einfach sehen, dass

EIGENSCHAFT. (LT11)

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = e^{-as},$$

für  $a \in \mathbb{R}$ .

Man kann dies leicht aus (5.10) mit  $f(t) = e^{st}$  oder durch einer direkte Berechnung herleiten. Wir schreiben

$$\delta_\epsilon(t-a) = \frac{1}{2\epsilon} [H(t-(a-\epsilon)) - H(t-(a+\epsilon))],$$

weil für uns die Definition an der Stellen  $t = a \pm \epsilon$  nicht wichtig ist. Dann gilt mithilfe vom Beispiel 5.7 und (LT2)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t-a)](s) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}[\delta_\epsilon(t-a)](s) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \mathcal{L}[H(t-(a-\epsilon)) - H(t-(a+\epsilon))](s) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon s} (e^{-(a-\epsilon)s} - e^{-(a+\epsilon)s}) \\ &= e^{-as} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\epsilon s} - e^{-\epsilon s}}{2\epsilon s} \\ &= e^{-as}. \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Gleichung benützt haben, dass

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{\epsilon s} - e^{-\epsilon s}}{2\epsilon s} &= \lim_{\epsilon s \rightarrow 0} e^{\epsilon s} \lim_{2\epsilon s \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2\epsilon s}}{2\epsilon s} = \lim_{\eta \rightarrow 0} e^\eta \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\ell}}{\ell} \\ &= 1 \cdot \left( -\frac{d}{d\ell} e^{-\ell} \Big|_{\ell=0} \right) = e^{-\ell} \Big|_{\ell=0} = 1. \end{aligned}$$

### 5.3. Eindeutigkeit der Laplace-Transformation und die Inverse Laplace Transformation

Nun wollen wir die Laplace-Transformation auf verschiedene Probleme anwenden. Die Idee ist immer die selbe. Wir haben ein Problem, das im Originalbereich schwierig zu lösen ist. Mittels der Laplace-Transformation verwandeln wir das Problem in ein Problem, das einfacher im Bildbereich zu lösen ist. Der Vorteil dieser Methode ist, dass Differentiation im Originalraum bei der Laplace-Transformation der Multiplikation (mit  $s$ ) im Bildbereich entspricht. Nachdem wir das Problem im Bildraum gelöst haben, müssen wir jedoch in der Lage sein, zur Lösung unseres ursprünglichen Problems zurückzukehren. Wir müssen deshalb sicher sein, dass die Laplace-Transformation eindeutig ist, um die Lösung im Bildraum auf die Lösung im Originalraum zu transformieren.

**SATZ 5.16 (Satz von Lerch).** *Seien  $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$  mit Wachstumskoeffizienten  $\sigma_1, \sigma_2$ . Nehmen wir an, dass*

$$\mathcal{L}[f_1](s) = \mathcal{L}[f_2](s)$$

*für jedes  $s$  mit  $\Re(s) > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . Dann ist*

$$f_1(t) = f_2(t)$$

*an allen Stellen  $t$  an denen  $f_1$  und  $f_2$  stetig sind.*

Man kann einen direkten Beweis dieses Satzes geben. Man kann aber auch diesen Satz direkt aus der Formel der inversen Laplace-Transformation herleiten.

**SATZ 5.17 (Inverse Laplace-Transformation).** *Sei  $f \in \mathcal{E}$  mit Wachstumskoeffizient  $\sigma_f$  und Laplace-Transformation  $F(s)$ . Sei  $\beta_c(y) := c + iy$  für  $y \in (-\infty, \infty)$  ein Pfad, wobei  $c > \sigma_f$  beliebig ist. Dann gilt an allen Stetigstellen  $t \in (0, \infty)$  von  $f$*

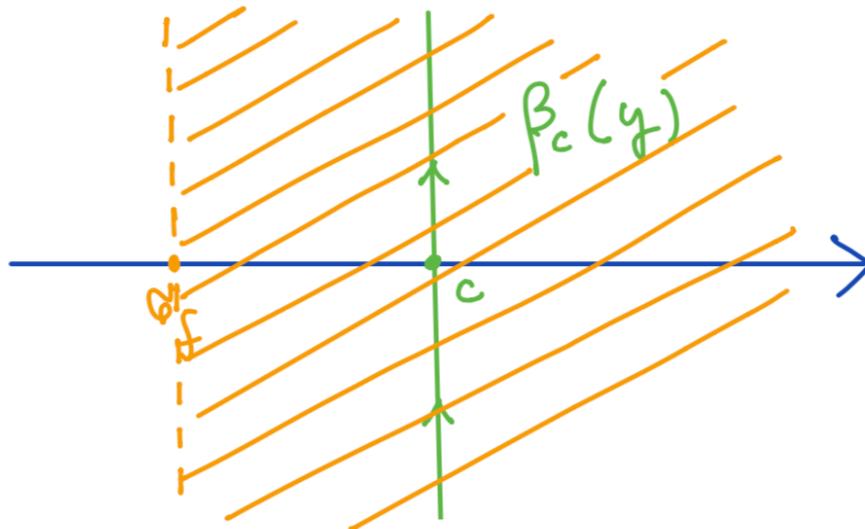
$$(5.11) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_c} e^{st} F(s) ds.$$

*An den Unstetigstellen  $t_0 \in (0, \infty)$  gilt*

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0^-} F(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} F(t) \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_c} e^{st} F(s) ds.$$

Der Satz folgt aus der Formel (5.1), die wir an Anfang des Kapitels mithilfe der Fourier-Transformation gefunden haben. Die Inverse Laplace-Transformation kann auf zwei Arten

berechnet werden. Einerseits können die Rechenregeln (LT1) bis (LT11) angewendet werden. Andererseits kann man das Kurvenintegral in (5.11) auf dem *Bromwich Pfad*  $\beta_c(y)$  berechnen, wobei  $c > \sigma_f$  ist.



Die letzte Bedingung ist um sicher zu sein, dass alle Singularitäten der Funktion  $f$  links vom Pfad liegen, so dass die Laplace-Transformation  $F$  der Funktion  $f$  existiert.

Wir werden jetzt ein Beispiel von dieser zweiten Methode sehen.

BEISPIEL 5.18. Wir möchten die Inverse Laplace-Transformation von

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

berechnen, wobei  $\omega > 0$ , und zu diesem Zweck berechnen wir das Kurvenintegral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_c} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_c} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds$$

mit der Methoden vom Abschnitt 3.4.

Die Funktion  $F$  besitzt nur zwei Singularitäten,  $i\omega$  und  $-i\omega$ . Deshalb wählen wir einen Bromwich Pfad

$$\beta_c(y) := c + iy$$

mit  $c > 0$  und  $y \in (-\infty, \infty)$  nehmen. Falls

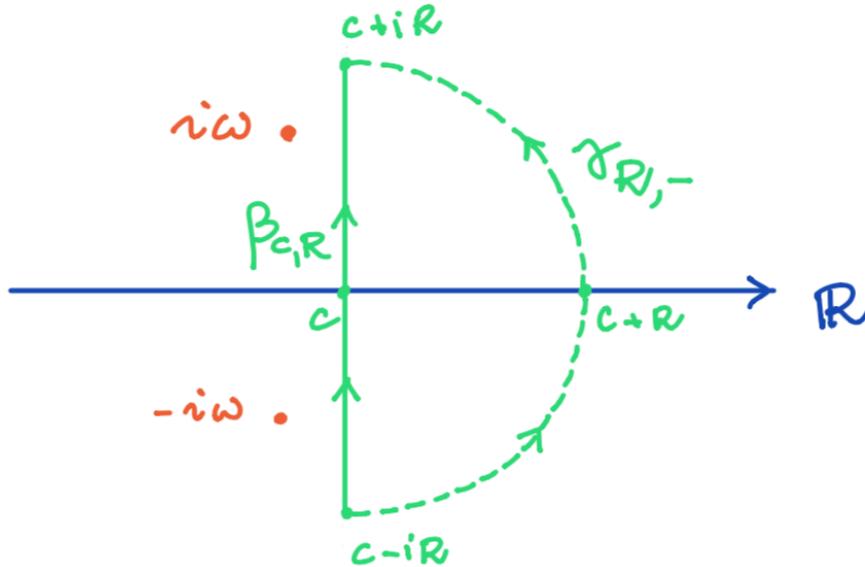
$$\beta_{c,R} := c + iy,$$

wobei  $y \in [-R, R]$  und  $c$  fest ist, betrachten wir eine geschlossene Kurve an der wir Korollar 3.49 und, falls nötig, Bemerkung 3.48 anwenden können. Die Funktion  $\frac{1}{s^2 + \omega^2}$  erfüllt die Voraussetzungen des Korollars 3.49. Wir müssen nur sicher sein, dass  $|e^{st}|$  auf einer Halbebene beschränkt ist. In diesem Fall, werden wir  $\beta_{c,R}$  mit einem Pfad in dieser Halbebene schliessen. Da für  $s \in \mathbb{C}$

$$|e^{st}| = |e^{(c+iy)t}| = e^{ct},$$

ist  $|e^{st}|$  mit  $c > 0$  beschränkt genau dann, wenn  $t < 0$ . Deshalb wählen wir den geschlossenen Pfad  $\beta_{c,R} * \gamma_{R,-}^{-1}$ , wobei

$$\gamma_{R,-}(\tau) = c + Re^{i\tau} \text{ für } \tau \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



Da  $e^{st}F(s)$  holomorph innerhalb der geschlossenen Kurve  $\beta_{c,R} * \gamma_{R,-}$  ist, gilt für  $t < 0$

$$0 = \int_{\beta_{c,R} * \gamma_{R,-}^{-1}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds = \int_{\beta_{c,R}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds - \int_{\gamma_{R,-}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds.$$

Laut des Korollar 3.49 und der Bemerkung 3.48 gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R,-}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds = 0.$$

Daraus folgt, dass

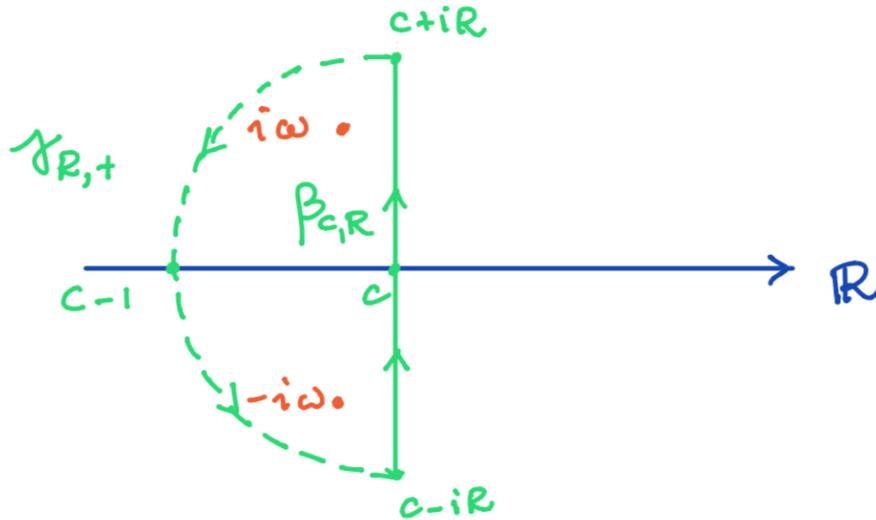
$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_{c,R}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds = \int_{\beta_c} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds,$$

wie erwartet. Tatsächlich sollte die Funktion  $f \in \mathcal{E}$  und deshalb  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ , wie gerade bewiesen.

Falls  $t > 0$ , können wir Korollar 3.49 nicht anwenden. Wir werden ein Argument ähnlich wie im Beispiel 3.53 benutzen, insbesondere (3.22). Wir betrachten jetzt den geschlossenen Pfad  $\beta_{c,R} * \gamma_{R,+}$ , wobei

$$\gamma_{R,+}(y) := c + Re^{i\tau} \text{ für } \tau \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Falls  $R$  gross genug ist, sind die Singularitäten der Funktion  $e^{st}F(s)$  im geschlossenen Pfad  $\beta_{c,R} * \gamma_{R,+}$  enthalten.



Daraus folgt, dass

$$\int_{\beta_{c,R} * \gamma_{R,+}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds = 2\pi i \left[ \operatorname{Res} \left( \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2}, i\omega \right) + \operatorname{Res} \left( \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2}, -i\omega \right) \right].$$

Da die Singularitäten zwei einfache Pole sind, gilt

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2}, i\omega \right) = \lim_{s \rightarrow i\omega} (s - i\omega) \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} = \lim_{s \rightarrow i\omega} \frac{e^{st}}{s + i\omega} = \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega}$$

und

$$\operatorname{Res} \left( \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2}, -i\omega \right) = \lim_{s \rightarrow -i\omega} (s + i\omega) \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} = \lim_{s \rightarrow -i\omega} \frac{e^{st}}{s - i\omega} = -\frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega}.$$

Daraus folgt, dass für  $R$  gross genug

$$(5.12) \quad \int_{\beta_{c,R} * \gamma_{R,+}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds = 2\pi i \left( \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{e^{-i\omega t}}{2i\omega} \right) = \frac{2\pi i}{\omega} \sin \omega t.$$

Wir betrachten jetzt den Limes für  $R \rightarrow \infty$  der linken Seite von (5.12)

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_{c,R} * \gamma_{R,+}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\beta_{c,R}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R,+}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds \\ &= \int_{\beta_c} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R,+}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds. \end{aligned}$$

Falls wir beweisen, dass

$$(5.13) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R,+}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds = 0,$$

haben wir die Inverse Laplace-Transformation der Funktion  $F(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$  gefunden,

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega t}{\omega} & t > 0 \\ 0 & t < 0. \end{cases}$$

Falls  $s \in \gamma_{R,+}$ , gilt

$$\begin{aligned}
 (5.14) \quad \left| \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} \right| &= \left| \frac{e^{(c+Re^{i\tau})t}}{(c + Re^{i\tau})^2 + \omega^2} \right| = \frac{|e^{(c+R(\cos \tau + i \sin \tau))t}|}{|(c + Re^{i\tau})^2 + \omega^2|} \\
 &\leq \frac{|e^{(c+R(\cos \tau + i \sin \tau))t}|}{|c + Re^{i\tau}|^2} \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{|e^{(c+R \cos \tau)t}|}{(|R| - |c|)^2} \leq \frac{|e^{(c+R \cos \tau)t}|}{R^2},
 \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die Dreiecksungleichung (2.23) benützt haben. Wir setzen (5.14) in der linken Seite von (5.13) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
 \left| \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R,+}} \frac{e^{st}}{s^2 + \omega^2} ds \right| &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|e^{(c+R \cos \tau)t}|}{R^2} |iRe^{i\tau}| d\tau \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{(c+R \cos \tau)t}}{R} d\tau \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{ct} d\tau \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \pi e^{ct} = 0,
 \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) benützt haben, dass  $\tau \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ , so dass  $\cos \tau \leq 0$  und deshalb

$$e^{(c+R \cos \tau)t} \leq e^{ct}.$$

Der Beweis ist jetzt fertig. □

**BEISPIEL 5.19.** Wie schon gesagt, kann man auch die Inverse Laplace Transformation der Funktion im Beispiel 5.18 mithilfe der Rechenregeln (LT1) bis (LT11) berechnen. Das stellt sich in diesem Fall als einfacher heraus!

## 5.4. Anwendungen

### 5.4.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

**BEISPIEL 5.20.** Wir möchten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} f'' + 2f' + f = te^{-t} + e^t \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

lösen.

Wir transformieren das Problem mittels der Laplace-Transformation und wir erhalten

$$(5.15) \quad s^2 F(s) - s f'(0) - f(0) + 2(sF(s) - f(0)) + F(s) = \mathcal{L}[te^{-t}](s) + \mathcal{L}[e^t](s),$$

wobei wir (LT1) und (LT5) benützt haben. Aus (LT6) wissen wir, dass

$$\mathcal{L}[-tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s),$$

so dass

$$\mathcal{L}[te^{-t}](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{-t}](s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2},$$

wobei wir benützt haben, dass

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}](s) = \frac{1}{s-\alpha}$$

für  $\alpha \in \mathbb{C}$  (Beispiel 5.7). Es folgt aus (5.15), dass

$$s^2F(s) + 2sF(s) + F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-1}$$

oder, das ist äquivalent,

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{(s-1)(s+1)^2}.$$

Wir müssen jetzt  $f$  finden, so dass  $\mathcal{L}[f] = F$ . Wir bemerken aus (LT5), dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)^4} &= -\frac{1}{3}\frac{d}{ds}\frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{6}\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{(s+1)^2} = -\frac{1}{6}\frac{d^3}{ds^3}\frac{1}{s+1} \\ &= -\frac{1}{6}\frac{d^3}{ds^3}(\mathcal{L}[e^{-t}](s)) \stackrel{(LT5)}{=} \frac{1}{6}\mathcal{L}[t^3e^{-t}](s) \end{aligned}$$

Andererseits haben wir durch Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}[e^t](s) - \frac{1}{4}\mathcal{L}[e^{-t}](s) + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}[e^t - e^{-t}](s) + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[e^{-t}](s)) \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}[e^t - e^{-t}](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[te^{-t}](s), \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{6}\mathcal{L}[t^3e^{-t}](s) + \frac{1}{4}\mathcal{L}[e^t - e^{-t}](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[te^{-t}](s). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$f(t) = \frac{1}{6}t^3e^{-t} + \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) + \frac{1}{2}te^{-t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3 + t - \frac{1}{2}\right)e^{-t} + \frac{1}{4}e^t.$$

□

BEMERKUNG 5.21. Mithilfe der Laplace-Transformation kann man die particuläre Lösung zu einem Anfangswertproblem finden, ohne zuerst die allgemeine Lösung finden zu müssen.

Wir betrachten jetzt das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} f''(t) + af'(t) + bf(t) = h(t) \\ f(0) = k_0 \\ f'(0) = k_1, \end{cases}$$

wobei  $a, b, k_0$  und  $k_1$  Konstante sind. Daraus folgt, dass

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) + a(sF(s) - f(0)) + bF(s) = \mathcal{L}[h](s),$$

und so

$$(s^2 + as + b)\mathcal{L}[f](s) = (s + a)f(0) + f'(0) + \mathcal{L}[h](s).$$

Wir setzen

$$\mathcal{L}[f](s) =: F(s) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}[h](s) =: H(s)$$

und erhalten

$$F(s) = G(s)((s + a)f(0) + f'(0) + H)(s).$$

Falls  $f(0) = f'(0) = 0$ , haben wir einfach

$$F(s) = G(s)H(s).$$

Die Funktion  $G(s)$  heisst *Übertragungsfunktion*. Wir haben sie schon benützt und hier geben wir ihr einen Namen.. Es gibt aber Rechenregeln für die Übertragungsfunktion, die nützlich zu wissen sind. Zum Beispiel seien zwei lineare Systeme mit Übertragungsfunktionen  $G_1$  und  $G_2$  gegeben. Dann gilt:

- (1) Die Übertragungsfunktion zweier in Serie geschalteter Systeme ist das Produkt der Übertragungsfunktionen der beiden Einzelsysteme;
- (2) Die Übertragungsfunktion eines Rückkopplungssystems ist

$$\frac{G_1}{1 + \alpha G_1 G_2},$$

wobei  $G_1$  die Übertragungsfunktion des Systems ohne Rückkopplung,  $G_2$  die Übertragungsfunktion der Steuerung und  $1/\alpha$  den Verstärkungsfaktor bezeichnen.

In Allgemeinen lassen sich gekoppelte Systeme im Bildbereich durch algebraische Gleichungen der Übertragungsfunktionen beschreiben.

BEISPIEL 5.22. Wir betrachten noch einmal den harmonischen Oszillator im Beispiel 4.33 einer Masse  $m = 1$  auf einer Feder mit der Federkonstante  $= 2k$ . In diesem Fall gibt es aber eine Dämpfung  $3y'$  und eine äussere Kraft  $r(t)$ , die nur zwischen  $t = 1$  und  $t = 2$  angewendet wird. Um dies in der Differentialgleichung einzuführen, benützen wir die Heaviside Function wie im Beispiel 5.9 (1). Wir schreiben deshalb

$$f(t) := \begin{cases} r(t) & 1 < t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = (H(t - 1) - H(t - 2))r(t),$$

so dass die Differentialgleichung, die die Schwingung  $y(t)$  der Masses beschreibt, ist

$$my'' + cy' + ky = f(t).$$

Der Einfachheit halber, nehmen wir an, dass  $r(t) = 1$ ,  $y(0) = y'(0) = 0$ , so dass das Anfangswertproblem lautet

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = H(t-1) - H(t-2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Um die Lösung zu finden, wenden wir Laplace-Transformation auf der linken Seite der Differentialgleichung an und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'' + 3y' + 2y) &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) \\ &= s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s), \end{aligned}$$

wobei wir die Schreibweise  $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$  benützt haben. Die Anwendung der Laplace-Transformation an der rechter Seite liefert mithilfe von (LT2) und Beispiel 5.5

$$\mathcal{L}[H(t-1) - H(t-2)] = \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s}).$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)s}(e^{-s} - e^{-2s}) \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)}(e^{-s} - e^{-2s}) \\ &= \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2(s+2)} \right) (e^{-s} - e^{-2s}) \\ &\stackrel{(LT3)}{=} \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right] (s) (e^{-s} - e^{-2s}) \\ &= \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right] (s) e^{-s} - \mathcal{L} \left[ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \right] (s) e^{-2s} \\ &= \mathcal{L} \left[ \left( \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} \right) H(t-1) \right] (s) - \mathcal{L} \left[ \left( \frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} \right) H(t-2) \right] (s) \\ &= \mathcal{L} \left[ \left( \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} \right) H(t-1) - \left( \frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} \right) H(t-2) \right] (s). \end{aligned}$$

Infolgedessen gilt

$$\begin{aligned} y(t) &= \left( \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} \right) H(t-1) - \left( \frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} \right) H(t-2) \\ &= \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} & 1 < t < 2 \\ e^{-(t-2)} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-1)} - \frac{1}{2}e^{-2(t-2)} & t > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 5.23. (Hammerschlagreaktion eines Masse-Feder-Systems) Wir suchen nun nach einer Lösung der Differentialgleichung,

$$my'' + cy' + ky = f(t)$$

bei der  $f(t)$  eine Kraft ist, die über einen sehr kurzen Zeitraum fast sofort angewendet wird. Phänomene dieser impulsiven Natur sind häufig und können mit dem Dirac-Delta behandelt werden. Wir betrachten deshalb das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 1) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Wir wenden die Laplace-Transformation an beiden Seiten der Differentialgleichung an

$$\mathcal{L}[y'' + 3y' + 2y] = \mathcal{L}[\delta(t - 1)]$$

und mit der gleichen Berechnung wie im Beispiel 5.22 und mithilfe von (LT11) erhalten wir

$$s^2Y + 3sY + 2Y = e^{-s},$$

oder, äquivalent

$$(5.16) \quad Y = \frac{1}{(s+1)(s+2)}e^{-s} = \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) e^{-s}.$$

Wir wissen aus dem Beispiel 5.7, dass

$$\mathcal{L}[H(t)e^{-\alpha t}](s) = \frac{1}{s + \alpha}.$$

Wir erhalten mithilfe von (LT2) mit  $f(t) = H(t)e^{-\alpha t}$

$$(5.17) \quad \frac{e^{-s}}{s + \alpha} = e^{-t}\mathcal{L}[H(t)e^{-\alpha t}](s) = \mathcal{L}[H(t-1)e^{-\alpha(t-1)}](s).$$

Wir setzen (5.17) mit  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 2$  in (5.16) ein und erhalten

$$Y = \mathcal{L}[H(t-1)(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})],$$

d.h.

$$y = H(t-1)(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})$$

□

BEISPIEL 5.24. Wir möchten jetzt die Differentialgleichung

$$tf'' + (1-t)f' + nf = 0$$

lösen, wobei  $n \in \mathbb{N}$ . Gemäss (LT5) und (LT6) gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tf'(t)](s) &\stackrel{(LT6)}{=} -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f'](s) \stackrel{(LT5)}{=} -\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) \\ &= -\frac{d}{ds}(s\mathcal{L}[f](s)) = -\mathcal{L}[f](s) - s\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[f](s)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tf''(t)](s) &\stackrel{(LT6)}{=} -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f''](s) \stackrel{(LT5)}{=} -\frac{d}{ds}(s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)) \\ &= -\frac{d}{ds}(s^2\mathcal{L}[f](s)) + f(0) = -2s\mathcal{L}[f](s) - s^2\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[f](s)) + f(0).\end{aligned}$$

Mit  $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$  folgt, dass

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{L}[tf''](s) + \mathcal{L}[(1-t)f'](s) + n\mathcal{L}[f](s) \\ &= -2sF(s) - s^2F'(s) + \cancel{f(0)} + sF(s) - \cancel{f(0)} + F(s) + sF'(s) + nF(s) \\ &= (s - s^2)F'(s) + (n + 1 - s)F(s).\end{aligned}$$

Infolgedessen gilt

$$(s - s^2)\frac{dF(s)}{F(s)} = (s - n - 1)ds$$

oder

$$\frac{dF(s)}{F(s)} = \frac{s - n - 1}{s - s^2}ds = \left(\frac{n}{s - 1} - \frac{n + 1}{s}\right)ds.$$

Es folgt, dass

$$\ln F(s) = n \ln(s - 1) - (n + 1) \ln s = \ln \frac{(s - 1)^n}{s^{n+1}},$$

so dass

$$F(s) = \frac{(s - 1)^n}{s^{n+1}}.$$

Wir setzen

$$\ell_n := \mathcal{L}^{-1}[F]$$

und wir beweisen, dass

$$\boxed{\ell_0 = 1 \quad \text{und} \quad \ell_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})}.$$

Tatsächlich haben wir mithilfe von (LT6), dass

$$\mathcal{L}[t^n e^{-t}](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[e^{-t}](s)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \frac{1}{s + 1} = \frac{n!}{(s + 1)^{n+1}}.$$

Mittels (LT5) ist

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{ds^n}(t^n e^{-t})\right](s) = s^n \mathcal{L}[t^n e^{-t}](s) = \frac{n!s^n}{(s + 1)^{n+1}},$$

da

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}(t^n e^{-t})\right|_{t=0} = 0$$

für alle  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Aus (LT3) folgt, dass

$$\mathcal{L}[n!\ell_n](s) = \mathcal{L}\left[e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right](s - 1) = \frac{n!(s - 1)^n}{s^{n+1}}$$

oder

$$\mathcal{L}[\ell_n](s) = \frac{(s - 1)^n}{s^{n+1}},$$

wie früher angesagt.

Die  $\ell_n$  heissen *Laguerre Polynome*. Warum Polynom? Es gibt scheinbar eine Exponentialfunktion, aber das Produkt mit dem Faktor  $e^t$  ist gleich 1.  $\square$

BEMERKUNG 5.25. In diesem Fall war die Differentialgleichung durch die Laplace-Transformation auf eine andere einfachere Differentialgleichung zurückgeführt. Der Grund ist, dass die Koeffizienten der Differentialgleichung nicht Konstant sind. Wäre die original Differentialgleichung schwieriger gewesen, würde es uns nicht gelingen, die originale Differentialgleichung durch die Laplace-Transformation zu lösen.

**5.4.2. Integralgleichungen.** Mittels der Laplace-Transformation können wir auch *Integralgleichungen* lösen. Eine Integralgleichung ist eine Gleichung, die eine Funktion  $f$  und ihr Integral, sowie vielleicht eine Konstante, enthält.

BEISPIEL 5.26. Wir möchten die Funktion  $f$  finden, wobei

$$f(t) = t + \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Wir erkennen, dass das Integral die Faltung von  $f$  und  $\sin$  ist, d.h.

$$f(t) = t + f * \sin(t).$$

Wir können jetzt die Laplace-Transformation anwenden und wir erhalten

$$F(s) = \mathcal{L}[t](s) + \mathcal{L}[f * \sin(t)](s) = \frac{1}{s^2} + \mathcal{L}[f](s)\mathcal{L}[\sin t](s) = \frac{1}{s^2} + F(s)\frac{1}{s^2 + 1},$$

wobei  $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ . Daraus folgt, dass

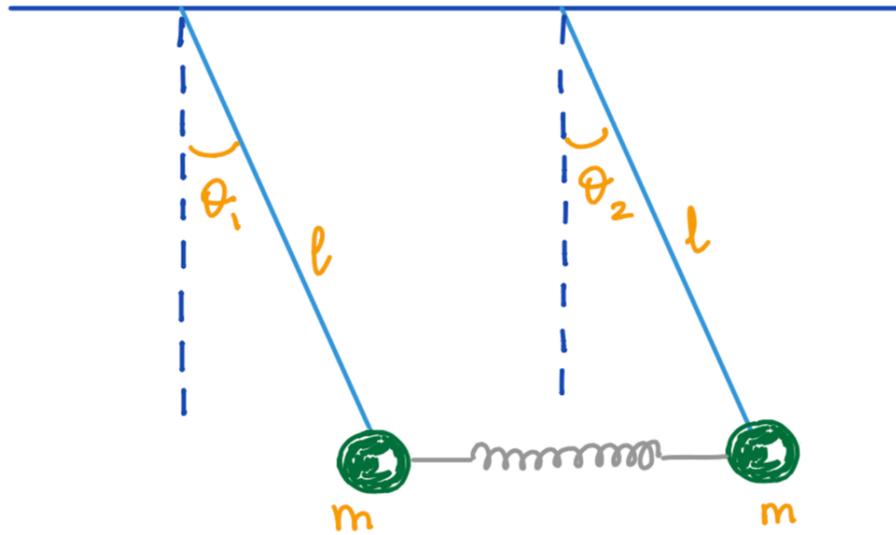
$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2 + 1}{s^4} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{s} \right) - \frac{1}{6} \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{d}{ds} (\mathcal{L}[1](s)) - \frac{1}{6} \frac{d^3}{ds^3} (\mathcal{L}[1](s)) = \mathcal{L}[t](s) + \frac{1}{6} \mathcal{L}[t^3](s) = \mathcal{L} \left[ t + \frac{1}{6} t^3 \right] (s), \end{aligned}$$

d.h.

$$f(t) = t + \frac{1}{6} t^3. \quad \square$$

### 5.4.3. Systeme von Differentialgleichungen.

BEISPIEL 5.27. Wir betrachten ein System zweier gleichen Pendel der Länge  $\ell$  und der Masse  $m$  und wir nehmen an, dass die Pendel durch eine Feder gekoppelt sind. Wir suchen die Ausschläge  $\theta_1$  und  $\theta_2$ , unter der Annahme, dass  $\theta_1$  und  $\theta_2$  klein sind.



Die Bewegungsgleichungen des Systems sind

$$\begin{cases} m(\ell \sin \theta_1)'' = -mg \sin \theta_1 + k\ell(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \\ m(\ell \sin \theta_2)'' = -mg \sin \theta_2 + k\ell(\sin \theta_1 - \sin \theta_2), \end{cases}$$

wobei  $ma$  die Kraft nach dem zweiten Gesetz von Newton ist,  $-mg$  ist die Schwerkraft und die dritte Terme  $\pm k\ell(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)$  die Kraft nach dem Gesetz von Hook darstellen. Falls  $\theta_1$  und  $\theta_2$  klein sind, können wir für  $j = 1, 2$   $\sin \theta_j$  mit  $\theta_j$  ersetzen. Damit erhalten wir

$$\begin{cases} m\ell\ddot{\theta}_1 = -mg\theta_1 + k\ell(\theta_2 - \theta_1) \\ m\ell\ddot{\theta}_2 = -mg\theta_2 + k\ell(\theta_1 - \theta_2), \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{\ell}\theta_1 + \frac{k}{m}(\theta_2 - \theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{\ell}\theta_2 + \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2). \end{cases}$$

Mit  $\frac{g}{\ell} =: \omega^2$  und  $\frac{k}{m} =: \alpha^2$  erhalten wir

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1 + \alpha^2(\theta_2 - \theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2 + \alpha^2(\theta_1 - \theta_2). \end{cases}$$

Jetzt wenden wir die Laplace-Transformation an, um das System zweier Differentialgleichungen auf dem folgenden System zweier linearen Gleichungen zu transformieren.

$$\begin{cases} s^2\Theta_1(s) - s\theta_1(0) - \theta_1'(0) = \omega^2\Theta_1(s) + \alpha^2(\Theta_2(s) - \Theta_1(s)) \\ s^2\Theta_2(s) - s\theta_2(0) - \theta_2'(0) = \omega^2\Theta_2(s) + \alpha^2(\Theta_1(s) - \Theta_2(s)), \end{cases}$$

wobei  $\Theta_j := \mathcal{L}[\theta_j]$  für  $j = 1, 2$ . Wir nehmen an, dass  $\theta_1(0) = A$  und  $\dot{\theta}_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ , so dass das System wird

$$\begin{cases} (s^2 + \alpha^2 - \omega^2)\Theta_1(s) - \alpha^2\Theta_2(s) = sA \\ (s^2 + \alpha^2 - \omega^2)\Theta_2(s) - \alpha^2\Theta_1(s) = 0. \end{cases}$$

Wir lösen das System nach  $\Theta_1(s)$  und  $\Theta_2(s)$  und erhalten

$$\begin{cases} \Theta_1(s) = \frac{s(s^2+\omega^2+\alpha^2)A}{(s^2+\omega^2+\alpha^2)^2-\alpha^4} = \frac{s}{2} \left( \frac{1}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{s^2+\omega^2+2\alpha^2} \right) A \\ \Theta_2(s) = \frac{s\alpha^2 A}{(s^2+\omega^2+\alpha^2)^2-\alpha^4} = \frac{s}{2} \left( \frac{1}{s^2+\omega^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2+2\alpha^2} \right) A. \end{cases}$$

Wir müssen jetzt  $\theta_1$  und  $\theta_2$  finden. Da

$$\mathcal{L}[\cos \omega t](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

gilt

$$\frac{1}{s^2 + (\omega^2 + \alpha^2)} = \mathcal{L}[\cos \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t](s),$$

so dass

$$\begin{cases} \Theta_1(s) = \frac{A}{2} \mathcal{L}[\cos \omega t + \cos \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t](s) \\ \Theta_2(s) = \frac{A}{2} \mathcal{L}[\cos \omega t - \cos \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t](s). \end{cases}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{A}{2} (\cos \omega t + \cos \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t) \\ \theta_2 = \frac{A}{2} (\cos \omega t - \cos \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2} t). \end{cases}$$

Mithilfe der Formel

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [-\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

erhalten wir

$$\begin{cases} \theta_1 = A \cos \left( \frac{\alpha^2}{2\sigma} t \right) \cos \sigma t \\ \theta_2 = A \sin \left( \frac{\alpha^2}{2\sigma} t \right) \sin \sigma t, \end{cases}$$

wobei wir

$$\sigma = \frac{1}{2} (\omega + \sqrt{\omega^2 + 2\alpha^2})$$

gesetzt haben. Es ist klar, dass ein Energieaustausch zwischen den Pendeln stattfindet: wenn das erste Pendel maximal ausschlägt, schlägt minimal das zweite aus, und umgekehrt.  $\square$

aplace-Transformationen	
$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$e^{at} \cdot \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, s > a$
$e^{at} \cdot \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$
$af(t) + bg(t)$	$a\mathcal{L}[f](s) + b\mathcal{L}[g](s)$
$tf(t)$	$-\frac{d}{ds}(\mathcal{L}[f](s))$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(\mathcal{L}[f](s))$
$f'(t)$	$s\mathcal{L}[f](s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$
$e^{at} \cdot f(t)$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$\mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s)$