Théorème de Serre-Swan

Jean-Philippe Chassé*

* *Université de Montréal, 2900 Boul. Édouard-Montpetit, Montréal, H3T 1J4, Québec, Canada*

Rapport final pour le cours Géométrie algébrique (MAT8001)
Session d'hiver 2018
Présentation du 1er mai 2018

Résumé

En suivant principalement [Har77] à travers la logique de [Ser55], on prouve le théorème de Serre-Swan dans un langage moderne.

I. Quelques notions de base sur les faisceaux

Tout d'abord, on rappelle quelques notions sur les faisceaux :

Définition 1 *Un* ***préfaisceau de groupes abéliens*** *(resp.* ***d'anneaux****) sur un espace topologique X est un foncteur contravariant $\mathscr{F} : \mathbf{O}(X) \to \mathbf{Ab}$ (resp. $\mathscr{F} : \mathbf{O}(X) \to \mathbf{Ring}$), où $\mathbf{O}(X)$ est la catégorie dont les objets sont les ouverts de X et les morphismes sont les inclusions entre ces ouverts lorsqu'elles existent. On note alors $s|_U := \mathscr{F}(i)(s)$ pour toute inclusion $i : U \hookrightarrow V$ et toute* ***section*** *sur V, $s \in \mathscr{F}(V)$.*

Le préfaisceau $\mathscr{F}$ est un ***faisceau*** *si pour tout recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ d'un ouvert U,*

(localité) : lorsqu'on a $s \in \mathscr{F}(U)$ et $s|_{U_i} = 0$ pour chaque $i \in I$, alors $s = 0$;

(recollement) : lorsqu'on a $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ pour chaque $i \in I$ tels que $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$, alors il existe $s \in \mathscr{F}(U)$ tel que $s_i = s|_{U_i}$.

Essentiellement, un faisceau est un préfaisceau tel que si l'on connaît sa structure locale partout, alors on peut reconstruire sa structure globale. Cette définition peut sembler abstraite, mais on a rencontré dans le cours l'archétype d'un faisceau :

Exemple: Soit X, un ensemble algébrique (affine ou projectif) sur un corps $\mathbf{k}$. Alors, $\mathscr{O}_X(U) := \mathrm{Reg}(U)$ pour tout ouvert U de X est un faisceau. Notons que dans ce cas, si $f \in \mathscr{O}_X(V)$ et $U \subseteq V$, $f|_U$ est réellement la restriction de f à U comme la notation le sous-entend.

On note que l'ensemble des ouverts contenant un point $p \in X$ forment un système inductif et donc, pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X on peut définir

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_x &:= \varinjlim_{U \ni p} \mathscr{F}(U) \\ &= \{(U,s) \mid U \ni p,\ s \in \mathscr{F}(U)\} /_{\sim}\end{aligned}$$

où $(U,s) \sim (V,t)$ si et seulement si $s|_{U\cap V} = t|_{U\cap V}$. On appelle $\mathscr{F}_p$ la **fibre** en p et ses éléments, les **germes** de sections. En fait, lorsqu'on prend $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$, on obtient que $\mathscr{O}_{X,p}$ est la localisation de $\mathrm{Reg}(X)$ en p, comme on l'a vu en classe !

On termine cette section avec une dernière définition :

Définition 2 *Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, des faisceaux de groupes abéliens (resp. d'anneaux) sur un espace topologique X. Alors, un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est une collection de morphismes de groupes (resp. d'anneaux) $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ pour chaque ouvert U de X telle que $V \subseteq U$, on a le diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] & \mathscr{G}(V) \end{tikzcd}$$

où, si $s \in \mathscr{F}(U)$, $\rho_{UV}(s) := s|_V$ et similairement pour ρ'_{UV}.

Ainsi, les faisceaux de groupes abéliens forment une catégorie, notée $\mathbf{Sh}(X)$. En fait, en faisant bien attention à la façon dont on définit le conoyau, c'est une catégorie abélienne. On peut ainsi définir la notion d'isomorphisme et de suites exactes de faisceaux sans problème. Un fait, que je daignerai pas démontrer vue la longueur de la présentation, est qu'une suite de faisceaux est exacte si et seulement si la suite induite sur les fibres l'est en tout point. On note de plus que toute application continue $f : X \to Y$ induit un foncteur $f_* : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{Sh}(Y)$ définit par

$$\begin{aligned} f_*(\mathscr{F})(U) &:= \mathscr{F}(f^{-1}(U)) \\ \text{et} \quad f_*(\varphi)(U) &= \varphi(f^{-1}(U)) \ . \end{aligned}$$

II. Schémas affines

Définition 3 *Un **espace localement annelé** est une paire $(X, \mathscr{O}_X)$ telle que X est un espace topologique et $\mathscr{O}_X$ est un faisceau d'anneaux sur X, appelé **faisceau de structure** de X, tel que $\mathscr{O}_{X,p}$ est un anneau local pour tout $p \in X$.*

*Un **morphisme d'espaces localement annelés** de $(X, \mathscr{O}_X)$ à $(Y, \mathscr{O}_Y)$ est une paire $(f, f^\#)$ telle que $f : X \to Y$ est une application continue et $f^\# : \mathscr{O}_Y \to f_*\mathscr{O}_X$*

est un morphisme de faisceaux tel que, pour tout $p \in X$, si $\mathfrak{m}_X$ est l'unique idéal maximal $\mathscr{O}_{X,p}$ et $\mathfrak{m}_Y$ celui de $\mathscr{O}_{Y,f(p)}$, alors

$$(f_p^{\#})^{-1}(\mathfrak{m}_X) = \mathfrak{m}_Y \ .$$

Comme on pourrait s'en douter, un ensemble algébrique avec comme faisceau structural les fonctions régulières est un espace localement annelé. Cependant, on va s'intéresser à un espace un peu plus général pour la suite :

EXEMPLE: Soit A, un anneau pas nécessairement noethérien. Considérons l'ensemble

$$\operatorname{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \triangleleft A \text{ premier}\}$$

que l'on équippe de la topologie dont les fermés sont de la forme

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

pour un idéal I de A que l'on appelle, tout comme pour les variétés algébriques, la topologie de Zariski ; la vérification que cela donne effectivement une topologie est assez directe. En fait, comme pour les variétés, les ouverts de la forme $D(f) := \operatorname{Spec}(A) \setminus V((f))$ engendre la topologie.

Alors, on obtient un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_A$ sur $\operatorname{Spec}(A)$ donné par

$$\mathscr{O}_A(U) := \left\{ s \in \Big(\bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} A_{\mathfrak{p}} \Big)^U \;\middle|\; s(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}} \text{ et } (*) \right\} \ ,$$

où par la condition $(*)$, on veut dire

$$\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A), \forall U \ni \mathfrak{p},\ \exists V \subseteq U, \exists a, f \in A \text{ tels que } \forall \mathfrak{q} \in V,\ s(\mathfrak{q}) = \left[\frac{a}{f}\right] \in A_{\mathfrak{q}} \quad (*)$$

ou autrement dit, s est localement un élément du corps de fractions de A. Cela est analogue à la définition des fonctions régulières sur une variété, mais on admet ici que le codomaine de s dépendent du point. Le fait que c'est un préfaisceau d'anneaux est assez direct. Pour démontrer que c'est réellement un faisceau, il faut seulement utiliser la propriété $(*)$.

Finalement, la paire $(\operatorname{Spec}(A), \mathscr{O}_A)$, appelé le **spectre** de A, est bien un espace localement annelé. Effectivement, il suffit de noter que

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathscr{O}_{\mathfrak{p}} &\longrightarrow A_{\mathfrak{p}} \\ [(U, s)] &\longmapsto s(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Définition 4 *Un* ***schéma affine*** *est un espace localement annelé isomorphe au spectre d'un anneau.*

On définit une application $\psi : A_f \to \mathscr{O}_A(D(f))$ par $\psi(a/f^n)(\mathfrak{p}) := [a/f^n] \in A_\mathfrak{p}$, qui respecte clairement toutes les conditions pour que $\psi(a/f^n)$ soit une section sur X pour tout $a \in A$. En fait, il suit de la définition de la localisation d'un anneau que ψ est un morphisme d'anneaux.

Supposons que $\psi(a/f^n) = 0$. Alors, $[a/f^n] = 0$ dans toute localisation $A_\mathfrak{p}$, c.-à-d. pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, il existe $b \notin \mathfrak{p}$ tel que $ab = 0$, et donc $b \in \mathrm{Ann}(a)$. Alors, $\mathrm{Ann}(a)$ n'est inclu dans aucun idéal premier. Or, tout idéal propre d'un anneau est contenu dans un idéal premier ; il faut donc que $\mathrm{Ann}(a) = A$ et $a = 0$. Ainsi, ψ est injectif. Démontrer la surjectivité est un peu plus technique et donc, je ne vais pas le faire, mais repose principalement sur le fait que le spectre d'un anneau est quasi-compact, ce qu'on a démontré en classe. Ainsi, on obtient que $\mathscr{O}_A(D(f)) \cong A_f$; en particulier, $\mathscr{O}_A(\mathrm{Spec}(A)) = A$ en prenant $f = 1$.

L'avantage d'étudier le spectre d'un anneau est qu'en plus d'avoir une belle interprétation topologique de ce qui se passe algébriquement on a une correspondance entre les morphismes :

Proposition 1 *Soit $\varphi : A \to B$, un morphisme d'anneaux. Alors, φ induit naturellement un morphisme d'espaces localement annelés*

$$(f, f^\#)\colon (\mathrm{Spec}(B), \mathscr{O}_B) \longrightarrow (\mathrm{Spec}(A), \mathscr{O}_A)\ .$$

En fait, tout morphisme d'espaces localement annelés entre deux spectres est de cette forme.

Preuve:. Voir [Har77], proposition II.2.3. □

On arrive finalement à la question naturelle : quel est le lien entre les variétés affines et les schémas affines ? Il se trouve qu'il est très fort :

$$\mathrm{Spec}\,\Gamma(-)\colon \mathbf{AVar}(k) \longrightarrow \mathbf{ASch}(k)$$

est un foncteur covariant plein et fidèle de la catégorie $\mathbf{AVar}(\mathbf{k})$ des variétés affines sur $\mathbf{k}$ à la catégorie $\mathbf{ASch}(\mathbf{k})$ des schémas affines $(X, \mathscr{O})$ avec un morphisme d'espaces localement annelés $(X, \mathscr{O}) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{k}) = (\mathrm{pt}, \mathbf{k})$. Cela découle presque directement du fait que $\Gamma(-)$ a ces propriétés et de la proposition précédente. Ainsi, on peut voir les schémas affines comme une généralisation catégorique des variétés affines où l'on admet des anneaux plus exotiques. En fait, on peut montrer que X est homéomorphe à l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}\,\Gamma(X)$ et que ceux-ci sont précisément les idéaux maximaux de $\Gamma(X)$.

III. Faisceaux de modules et le théorème de Serre-Swan

Définition 5 *Soit $(X, \mathscr{O}_X)$, un espace localement annelé. Alors, un* ***$\mathscr{O}_X$-module*** *est un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{F}$ sur X tel que*

(i) pour tout ouvert U de X, $\mathscr{F}(U)$ est un $\mathscr{O}_X(U)$-module ;

(ii) si $s \in \mathscr{F}(U)$, $f \in \mathscr{O}_X(U)$ et $V \subseteq U$, $(f \cdot s)|_V = f|_V \cdot s|_V$.

Un ***morphisme de $\mathscr{O}_X$-module*** *est alors un morphisme de faisceaux de groupes abéliens $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tel que pour tout ouvert U de X, $\varphi(U) : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ est $\mathscr{O}_X(U)$-linéaire.*

En beaucoup de sens, les $\mathscr{O}_X$-modules se comportent de façon semblable aux modules habituels et plusieurs constructions sur les modules se transportent aux $\mathscr{O}_X$-modules de la façon évidente. Il y a cependant, comme on pourrait se douter, des notions qui sont propres à cette nouvelle définition. Par exemple,

Définition 6 *Soit $(X, \mathscr{O}_X)$, un espace localement annelé. Un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ est* ***libre*** *s'il est isomorphe à la somme directe de $\mathscr{O}_X$. On dit plutôt que $\mathscr{F}$ est* ***localement libre*** *si X admet un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i \in I}$ tel que, pour tout $i \in I$, $\mathscr{F}|_{U_i}$ est libre.*

Un fait très important pour nous est que tout A-module M induit un $\mathscr{O}_A$-module $\widetilde{M}$ sur $X = \operatorname{Spec}(A)$. Effectivement, il suffit de prendre pour un ouvert U de X,

$$\widetilde{M}(U) := \left\{ s \in \Big(\bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} M_\mathfrak{p} \Big)^U \;\middle|\; s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p} \text{ et } (*) \right\} ,$$

où $M_\mathfrak{p}$ dénote la localisation de M par $\mathfrak{p}$, définie de façon similaire à la localisation d'anneau. Il suit directement de cette définition et de celle du faisceau structural du spectre, que c'est bien un $\mathscr{O}_A$-module. En fait, la preuve que $\mathscr{O}_A(D(f)) \cong A_f$ s'adapte parfaitement à cette situation pour donner $\widetilde{M}(D(f)) \cong M_f$ comme A_f-module.

Proposition 2 *La correspondance $\sim : M \mapsto \widetilde{M}$ induit un foncteur covariant additif exact et pleinement fidèle de la catégorie des A-modules à celle des $\mathscr{O}_A$-module.*

Preuve:. Tout d'abord, si $f : M \to N$ est un morphisme de A-modules, on définit $\tilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ par $\tilde{f}(s)(\mathfrak{p}) := f(s(\mathfrak{p}))$ pour tout ouvert U de $\operatorname{Spec}(A)$, $s \in \widetilde{M}(U)$ et $\mathfrak{p} \in U$. Ceci est clairement un morphisme de $\mathscr{O}_A$-modules et l'association est assurément fonctorielle.

Le fait que ce soit un foncteur additif provient du fait que $(M \oplus N)_\mathfrak{p} \cong M_{\mathfrak{p} \cap M} \oplus N_{\mathfrak{p} \cap N}$ et qu'il soit exact, que la location d'une suite exacte est exacte et qu'une suite de faisceau est exacte si et seulement si elle l'est sur chaque fibre ($\widetilde{M}_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p}$).

Notons par Γ la correspondance $\widetilde{M} \mapsto \widetilde{M}(X) \cong M$ et $\varphi \mapsto \varphi(X)$. Alors, on voit que l'application induite par $\sim$ $\mathsf{Hom}_A(M,N) \to \mathsf{Hom}_{\mathscr{O}_A}(\widetilde{M},\widetilde{N})$ a pour inverse celle induite par Γ. Donc, $\sim$ est pleinement fidèle. $\square$

Définition 7 *Soit $(X,\mathscr{O}_X)$, un schéma affine. On dit qu'un $\mathscr{O}_X$-module est* ***quasi-cohérent*** *s'il est (isomorphe à un objet) dans l'image de $\sim$ et* ***cohérent*** *s'il provient d'un $\mathscr{O}_X(X)$-module de type fini.*

Par exemple, le faisceau structural du spectre d'un anneau A est toujours cohérent puisque, comme on l'a noté précédemment, $\Gamma(\mathscr{O}_A) = \mathscr{O}_A(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$ et donc, $\widetilde{A} \cong \mathscr{O}_A$.

Pour démontrer le théorème de Serre, il ne nous reste plus qu'un seul élément à ajouter : la projectivité.

Proposition 3 *Soient A, un anneau noethérien, et M, un A-module de type fini. Alors, M est projectif si et seulement si $\widetilde{M}$ est localement libre.*

PREUVE:. Supposons que M soit projectif. Alors, M est plat et, puisque A est noethérien, de présentation finie, c.-à-d. qu'il y a une suite exacte

$$L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où L_0, L_1 sont des modules libres de type fini. Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, on on a la suite exacte

$$L_1 \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow L_0 \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0$$

car le foncteur tenseur est exact à droite, où $\kappa(\mathfrak{p}) := \mathcal{Q}(A/\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ est le **corps de résidus** de $\mathfrak{p}$. Ainsi, $M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ admet une surjection d'un $\kappa(\mathfrak{p})$-espace vectoriel de dimension finie et donc, il existe $x_1,\ldots,x_r \in M$ tels que leur inclusion dans le produit tensoriel forme une base. Alors, par une version équivalente du lemme de Nakayama, il existe $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $x_1,\ldots,x_r$ engendre M_f comme A_f-module.

On a donc une surjection $\varphi : A_f^r \to M_f$. Puisque A est noethérien, A_f l'est également et donc, $\ker\varphi$ est de type fini puisque c'est un sous-module du module de type fini A_f^r. De plus, puisque M est plat, M_f l'est également car $M_f \cong A_f \otimes_A M$ et l'extension de scalaire préserve la platitude. Ainsi, la suite

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \otimes_{A_f} \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow A_f^r \otimes_{A_f} \kappa(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\varphi\otimes\mathbb{1}} M_f \otimes_{A_f} \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0$$

est exacte. Or, φ est surjectif, et $A_f^r \otimes_{A_f} \kappa(\mathfrak{p})$ et $M_f \otimes_{A_f} \kappa(\mathfrak{p})$ ont même dimension. Ainsi, $\varphi \otimes \mathbb{1}$ est un isomorphisme et par exactitude, $\ker\varphi \otimes_{A_f} \kappa(\mathfrak{p}) = \{0\}$. Donc, encore par la version équivalente du lemme de Nakayama, il existe $f' \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que $(\ker\varphi)_{f'} = \{0\}$. Ainsi, $M_{ff'} \cong A_{ff'}^r$ et $ff' \notin \mathfrak{p}$, car $f, f' \notin \mathfrak{p}$ qui est premier. Puisque cela tient pour tout idéal premier, on peut donc recouvrir $\operatorname{Spec}(A)$ par des ouverts $D(ff')$ tels que $\widetilde{M}(D(ff')) \cong M_{ff'}$ soit libre, c.-à-d. $\widetilde{M}$ est localement libre.

Supposons maintenant que $\widetilde{M}$ soit localement libre. Alors, clairement $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ est libre pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Puisque les modules libres sont plats et qu'un module est plat si et seulement si sa localisation en chaque idéal premier est plat, il suit que M est un module plat. Or, il est connu que tout module plat de type fini est projectif, ce qui conclut la preuve. $\square$

Corollaire 1 (Théorème de Serre-Swan, [Ser55]) *Soit A, un anneau noethérien. Alors, le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est une équivalence de catégorie entre la catégorie des A-modules projectifs de type fini et la catégorie les $\mathscr{O}_A$-modules cohérents localement libres Son inverse est donné par $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}(\operatorname{Spec}(A))$.*

Remarque: Quoique cela n'est pas totalement évident, on peut démontrer qu'un $\mathscr{O}_{\Gamma(X)}$-module cohérent localement libre est la même chose qu'un fibré vectoriel au sens traditionnel sur la variété affine X. Cependant, comme nous n'avons pas vu cette seconde définition en classe, il ne sert à rien de démontrer l'équivalence explicitement.

Bibliographie

[Har77] Robin Hartshone. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52. Springer, 1977. isbn : 978-1-4419-2807-8.

[Ser55] Jean-Pierre Serre. “Faisceaux algébriques cohérents”. In : *Annals of Mathematics.* 2e sér. 61.2 (1955), p. 197–278.