K-THÉORIE TOPOLOGIQUE ET THÉORIES DE COHOMOLOGIE EXTRAORDINAIRES

Jean-Philippe CHASSÉ*

* *Université de Montréal, 2900 Boul. Édouard-Montpetit, Montréal, H3T 1J4, Québec, Canada*

Rapport final pour le cours Algèbre homologique (MAT7200)
Session d'hiver 2018

Résumé

Comme tout le monde ayant fait un cours de géométrie différentielle le sait, le fibré tangent d'une variété est un outil essentiel à l'étude de ladite variété. En fait, ces objets sont généralement d'intérêt pour les topologues puisque l'existence de certains fibrés vectoriels sur un espace donné est finement liée à la topologie de cet espace. De ce fait, leur étude est étroitement liée à la topologie algébrique et a abouti au développement de la K-théorie topologique par Atiyah et Hirzebruch. Cette théorie s'est avérée hautement fructueuse, menant par exemple à la solution du problème de l'invariant de Hopf par Adams et au fameux théorème d'indice d'Atiyah-Singer. La puissance de la théorie repose en bonne partie sur le fait qu'elle est presque une théorie cohomologique au sens de Eilenberg et Steenrod. Cette brève introduction servira donc à expliquer ce « presque » et démontrer certains éléments-clefs du sujet.

I. UNE CATÉGORIE DE FIBRÉS VECTORIELS

Définition 1 *Un* ***fibré vectoriel complexe*** *de* ***rang*** n *est la donnée d'un quadruplet* $\xi = (E, B, \pi, F)$ *tel que*

(i) E *et* B*, appelés respectivement l'****espace total*** *et l'****espace de base****, sont des espaces topologiques ;*

(ii) $\pi : E \to B$*, appelée la* ***projection****, est une surjection continue ;*

(iii) F*, appelée la* ***fibre typique****, est un espace vectoriel complexe de dimension* n *;*

(iv) pour tout $b \in B$*,* $F_b := \pi^{-1}(b)$*, appelée la* ***fibre au-dessus de b****, est un espace vectoriel complexe de dimension* n *;*

(v) pour tout $b \in B$*, il existe un voisinage* U *de* b *dans* B *et un homéomorphisme*

$$\begin{aligned} \varphi \colon U \times F &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (b', v) &\longmapsto \varphi_{b'}(v) \end{aligned}$$

appelé une ***trivialisation locale*** *tel que, pour tout $b' \in U$, $\varphi_{b'}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes de F à $F_{b'}$.*

Essentiellement, un fibré vectoriel est quelque chose qui peut être globalement très compliqué, mais que localement, se comporte comme le produit cartésien de B avec un espace vectoriel. Pour aider à digérer cette longue définition, regardons quelques exemples :

- Il y a bien sûr le fibré trivial de rang n sur B : $\varepsilon^n_B := (B \times \mathbb{C}^n, B, \pi, \mathbb{C}^n)$, où $\pi : B \times \mathbb{C}^n \to B$ est la projection la première composante et B est un espace topologique quelconque. La condition (v) est automatiquement respectée en prenant $U = B$ et $\varphi = \mathbb{1}_{X \times \mathbb{C}^n}$.
- On remarque sans problème que si $\xi_i = (E_i, B_i, \pi_i, F_i)$, $i = 1, 2$, sont des fibrés, alors $\xi_1 \times \xi_2 := (E_1 \times E_2, B_1 \times B_2, (\pi_1, \pi_2), F_1 \oplus F_2)$ en est également un. Effectivement, les conditions (i) à (iv) sont clairement respectées et, pour ce qui en est de la (v), on note que si $\varphi_i : U_i \times F_i \to \pi_i^{-1}(U_i)$ sont des trivialisations de ξ_i autour de b_i, alors

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \varphi_2)\colon (U_1 \times U_2) \times (F_1 \oplus F_2) &\longrightarrow \pi_1^{-1}(U_1) \times \pi_2^{-1}(U_2) \\ (b'_1, b'_2, v_1, v_2) &\longmapsto (\varphi_1(b'_1, v_1), \varphi_2(b'_2, v_2))\end{aligned}$$

  en est une de $\xi_1 \times \xi_2$ autour de (b_1, b_2).
- Finalement, un exemple plus concret ! Si on considère S^2, la sphère de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$, alors

$$TS^2 := \left\{ (x, v) \in S^2 \times \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \perp v = 0 \right\}$$

  est l'espace total d'un fibré vectoriel complexe de rang 1 sur S^2 avec la projection évidente. Il faut alors deux ouverts de trivialisation : $U_1 = S^2 - \{(0, 0-1)\}$ et $U_2 = S^2 - \{(0, 0, 1)\}$, et φ_x est donnée par la matrice jacobienne évaluée en x de la projection stéréographique correspondante dans $\mathbb{C}$. Plus généralement, le fibré tangent d'une variété complexe M de dimension n est un fibré vectoriel complexe de rang n sur M.

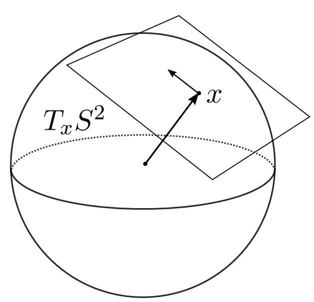


FIGURE 1 – Visualisation de la fibre de TS^2 au-dessus d'un point $x \in S^2$

Avoir des objets à étudier est bien, mais il est toujours mieux d'avoir des morphismes entre ceux-ci :

Définition 2 *Soient ξ, η, deux fibrés vectoriels complexes sur une même base B. Alors, un* ***morphisme de fibrés vectoriels complexes*** *$f : \xi \to \eta$ est une application continue f telle que*

$$\begin{tikzcd} E(\xi) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\xi"'] & & E(\eta) \arrow[dl, "\pi_\eta"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

commute et que, pour tout $b \in B(\xi)$, $f_b := f|_{F(\xi)_b} : F(\xi)_b \to F(\eta)_{\bar{f}(b)}$ est une transformation linéaire complexe.

L'abus de notation d'utiliser f à la fois pour le morphisme et pour l'application entre les espaces totaux est justifié du fait que c'est cette dernière qui a en fait toute l'information importante sur le morphisme.

On obtient ainsi une catégorie $\mathbf{Vect}(B)$ dont les objets sont les fibrés vectoriels complexes sur B et les morphismes sont ceux que l'on vient de définir. Comme on pourrait s'en douter, cette catégorie a des liens très forts avec **Top** :

Proposition 1 *Une application continue $f : X \to Y$ induit un foncteur covariant $f^* : \mathbf{Vect}(Y) \to \mathbf{Vect}(X)$.*

PREUVE:. Soit $\xi = (E, Y, \pi, F)$, un fibré vectoriel complexe. Alors, dans **Top**, on a le produit fibré

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

où, bien sûr, $f^*E = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = \pi(e)\} =: E(f^*\xi)$. Alors, on note que

$$F(f^*\xi)_x := p^{-1}(x) = \{(x, e) \in X \times E \mid f(x) = \pi(e)\} = \{x\} \times \pi^{-1}(f(x)) \ .$$

Donc, $q_x : F(f^*\xi)_x \to F_{f(x)}$ est l'identité et on peut prendre $F(f^*\xi) = F$.

Considérons maintenant $x \in X$. Alors, il existe une trivialisation locale φ sur un voisinage ouvert U de $f(x)$. Par continuité, $f^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de X et on obtient une trivialisation locale en prenant

$$\begin{aligned} \psi \colon f^{-1}(U) \times F &\longrightarrow p^{-1}\left(f^{-1}(U)\right) \\ (x, v) &\longmapsto (x, \varphi(f(x), v)) \end{aligned}$$

qui est un homéomorphisme et un isomorphisme sur chaque fibre, car φ l'est. Donc, $f^*\xi := (f^*E, X, p, F)$ est un fibré vectoriel complexe avec même fibre typique que ξ.

Finalement, si $h : \xi \to \eta$ est un morphisme de fibrés vectoriels complexes, on définit $f^*h : f^*\xi \to f^*\eta$ de la façon évidente : $(f^*h)(x,e) := (x, h(e))$. Le résultat est bien continu puisque h l'est. De même, il découle directement de la définition que $f^*(\mathbb{1}_Y) = \mathbb{1}_X$ et que f^* respecte la composition. Ainsi, f^* est bien un foncteur. □

En fait, on voit que la correspondance $X \mapsto \mathbf{Vect}(X)$ et $f \mapsto f^*$ est elle-même un foncteur contravariant de **Top** dans une catégorie appropriée dont les objets sont des catégories et les morphismes des foncteurs. Effectivement, si ξ est un fibré vectoriel complexe sur Z et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sont des applications continues, on voit sans problème que $\mathbb{1}_Z^* = \mathbb{1}_\xi$ et que

$$\begin{aligned} h\colon f^*(g^*(E(\xi))) &\longrightarrow (g\circ f)^*E(\xi) \\ (x,y,e) &\longmapsto (x,e) \end{aligned}$$

donne un isomorphisme de fibrés puisque

$$\begin{aligned} f^*(g^*E(\xi)) &= \{(x,y,e) \in X \times Y \times E \mid f(x) = p(y,e) = y,\ g(y) = \pi_\xi(e)\} \\ \text{et} \quad (g\circ f)^*E(\xi) &= \{(x,e) \in X \times E \mid (g\circ f)(x) = \pi_\xi(e)\}\ . \end{aligned}$$

Alors, le fait exceptionnel est que, sous quelques contraintes techniques, cette correspondance ne dépend que de la classe d'homotopie de f ! C'est le premier indice que la théorie des fibrés vectoriels donne lieu a des invariants homotopiques de l'espace de base.

Théorème 1 *Pour tout fibré ξ sur Y, si $f, g : X \to Y$ sont des applications homotopes et que X et Y sont des espaces Hausdorff paracompacts, alors $f^*\xi$ et $g^*\xi$ sont isomorphes.*

PREUVE:. Voir [Ati64], voir lemme 1.4.1 à lemme 1.4.3. □

Corollaire 1 *Avec les mêmes contraintes techniques, si $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie (c.-à-d. $\exists g : Y \to X$ tel que $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ et $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$), alors $f^* : \mathbf{Vect}(Y) \to \mathbf{Vect}(X)$ est une équivalence de catégorie.*

Alors, si $\Delta : B \to B \times B$ dénote l'application diagonale, on définit la **somme de Whitney** $\xi \oplus \eta := \Delta^*(\xi \times \eta)$. C'est sans trop de problèmes que l'on vérifie que c'est un biproduit rendant $\mathbf{Vect}(B)$ une catégorie additive. En fait, on remarque

que

$$\begin{aligned}
f^*(\xi \oplus \eta) &= f^*(\Delta^*(\xi \times \eta)) \\
&\cong (\Delta \circ f)^*(\xi \times \eta) \\
&= ((f, f) \circ \Delta)^*(\xi \times \eta) \\
&\cong \Delta^*((f, f)^*(\xi \times \eta)) \\
&\cong \Delta^*(f^*\xi \times f^*\eta) \\
&= f^*\xi \oplus f^*\eta
\end{aligned}$$

et donc, f^* est un foncteur additif.

II. Groupe de Grothendieck associé aux fibrés vectoriels

La catégorie $\mathbf{Vect}(X)$ est malheureusement un peu trop grosse pour être étudiée par elle-même, il est donc utile de lui associer un groupe et de plutôt étudier celui-ci. C'est à partir de ce point que le point de vue des K-théories topologique et algébrique divergent. Effectivement, du côté algébrique, on noterait que notre catégorie $\mathbf{Vect}(X)$ est en fait une catégorie dite **exacte** et on utiliserait cela pour développer la K-théorie algébrique de notre catégorie. Cependant, du côté topologique, on note plutôt que si l'on prend

$$[\xi] + [\eta] := [\xi \oplus \eta]$$

où $[\xi]$ dénote la classe d'isomorphisme de ξ, on obtient un monoïde commutatif $\mathrm{Vect}(X)$. Ici, on voit sans problème que

$$0_{\mathrm{Vect}(X)} = [\varepsilon^0_X]$$

et, en définissant $f^*[\xi] := [f^*\xi]$, qu'une fonction continue entre espaces topologiques induit un morphisme de monoïde puisque f^* est foncteur additif et donc, préserve les classes d'isomorphismes et la somme directe.

Les monoïdes ne sont malheureusement pas la structure algébrique la plus intéressante, on aimerait donc avoir un moyen de « compléter » ceux-ci pour obtenir un groupe, qui a déjà davantage de structure. Il se trouve que quelqu'un de brillant c'est déjà penché sur la question et est ressorti avec cette définition :

Définition 3 *Soit M, un monoïde commutatif. Alors, le **groupe de Grothendieck** de M, noté $K(M)$, est un groupe abélien avec un morphisme de monoïdes $i : M \to K(M)$ tels que pour tout morphisme de monoïdes $\varphi : M \to G$ vers un groupe abélien G, il existe un unique morphisme de groupe $\tilde{\varphi} : K(M) \to G$ tel que*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & G \\
K(M) \arrow[ur, dotted, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

Proposition 2 *Soit M, un monoïde commutatif. Alors, $K(M)$ existe.*

PREUVE:. On définit

$$K(M) := {}^{M \oplus M}/_{\sim}$$

où $(m_1, m_2) \sim (m'_1, m'_2)$ si et seulement si il existe $n \in M$ tel que $m_1 + m'_2 + n = m'_1 + m_2 + n$, avec l'addition composante par composante. C'est une opération bien définie puisque si $(m_1, m_2) \sim (m'_1, m'_2)$ et $(m_3, m_4) \sim (m'_3, m'_4)$, il existe $n, n' \in M$ tels que

$$m_1 + m'_2 + n = m'_1 + m_2 + n \qquad \text{et} \qquad m_3 + m'_4 + n' = m'_3 + m_4 + n'$$

d'où

$$(m_1 + m_3) + (m'_2 + m'_4) + (n + n') = (m'_1 + m'_3) + (m_2 + m_4) + (n + n')$$

c.-à-d.

$$(m_1, m_2) + (m_3, m_4) \sim (m'_1, m'_2) + (m'_3, m'_4)\ .$$

De plus, le résultat est bien un groupe abélien : l'opération est associative et commutative puisque celle de M l'est, l'identité est donnée par la classe de $(0, 0)$ puisque

$$(m_1, m_2) + (0, 0) := (m_1 + 0, m_2 + 0) = (m_1, m_2)$$

et l'inverse de la classe de (m_1, m_2) est donnée par celle de (m_2, m_1) puisque

$$(m_1, m_2) + (m_2, m_1) := (m_1 + m_2, m_1 + m_2) \sim (0, 0)\ .$$

En définissant $i(m) := [(m, 0)]$, si $\varphi : M \to G$ est un morphisme de monoïdes vers un groupe abélien G, alors $\tilde{\varphi}(m_1, m_2) := \varphi(m_1) - \varphi(m_2)$ est un morphisme de groupes. De plus, il fait commuter le diagramme puisque

$$(\tilde{\varphi} \circ i)(m) = \tilde{\varphi}(m, 0) = \varphi(m) \qquad \forall m \in M\ .$$

Il est unique, puisque si ψ était un autre tel morphisme, il faudrait que $\psi(m, 0) = (\psi \circ i)(m) = \varphi(m)$, d'où $\psi(0, m) = -\psi(m, 0) = -\varphi(m)$ et donc, $\psi(m_1, m_2) = \varphi(m_1) - \varphi(m_2)$ pour tout $m_1, m_2 \in M$. $\square$

Cette définition ne vient pas de nulle part : si on prend $M = \mathbb{N}$, on obtient précisément $K(M) = \mathbb{Z}$, le groupe « le plus simple » que l'on puisse construire à partir de $\mathbb{N}$. La construction explicite nous donnera une façon de pouvoir interpréter topologiquement $K(\mathrm{Vect}(X))$ et justifie la notation à venir $[\xi] - [\eta]$ pour décrire la classe de $([\xi], [\eta])$.

Puisque les constructions universelles sont toujours uniques et fonctorielles, en se permettant l'abus de notation $K(X) := K(\mathrm{Vect}(X))$, par tout ce qui a été dit jusqu'à présent, on obtient un foncteur contravariant $K : \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$. Or, on a déjà vu que f^* ne dépend que de la classe d'homotopie de f si l'espace est suffisamment « gentil », donc on peut le voir comme un foncteur $K : \mathbf{Hotc} \to \mathbf{Ab}$, où **Hotc** est la catégorie dont les objets sont les CW-complexes connexes finis pointés en une 0-cellule (l'archétype d'un espace « gentil », et compact qui plus est) et les morphismes sont les classes d'homotopie pointée d'applications continues pointées entre ces objets. Pour la suite, on travaillera essentiellement toujours dans cette catégorie.

L'avantage de travailler avec des espaces pointés est que notre catégorie topologique a maintenant un objet nul : $*$, l'espace constitué d'un unique point. On peut alors définir

$$\widetilde{K}(X, x_0) := \ker K\,(i : * \to (X, x_0))$$

que l'on appelle le groupe **réduit** de X. Alors, on obtient la suite courte exacte

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(X, x_0) \longrightarrow K(X, x_0) \longrightarrow K(*) \longrightarrow 0$$

qui se scinde, car $K(p : (X, x_0) \to *)$ est une section de $K(i : * \to (X, x_0))$. De plus, puisqu'un fibré vectoriel sur un point n'est qu'un espace vectoriel de dimension finie et que deux tels espaces sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension, $\mathrm{Vect}(*) \cong \mathbb{N}$, d'où $K(*) \cong K(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$K(X) \cong \widetilde{K}(X, x_0) \oplus \mathbb{Z}\ .$$

De ce fait, on va principalement s'intéresser à $\widetilde{K}$ pour la suite des choses. Cependant, pour interpréter ce foncteur, on aura besoin d'un résultat d'ordre topologique.

Proposition 3 *Tout fibré vectoriel complexe ξ sur une base compacte Hausdorff X admet un fibré complémentaire, c.-à-d. qu'il existe un autre fibré η sur X tel que $\xi \oplus \eta \cong \varepsilon_X^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.*

PREUVE:. Voir [Ati64], lemme 1.4.10 à corollaire 1.4.14. □

Cela nous permet déjà de dire quelque chose d'important : la collection $\mathrm{Vect}(X)$ est en fait un ensemble (donc, il y avait un sens de parler de monoïde), puisqu'elle est contenu dans l'ensemble formé par l'union des sous-fibrés de ε_X^m sur les $m \in \mathbb{N}$. Pour nous aider à comprendre $\widetilde{K}$, on définit une autre relation d'équivalence sur nos fibrés vectoriels :

Définition 4 *Deux fibrés vectoriels complexes ξ et η sur X sont dits* ***stablement équivalents*** *s'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $\xi \oplus \varepsilon_X^n \cong \eta \oplus \varepsilon_X^m$. L'ensemble des classes de fibrés vectoriels complexes stablement équivalents sera noté* $\mathrm{Vect}_{\mathrm{st}}(X)$.

Par la proposition précédente, si $(X, x_0) \in \mathsf{Obj}(\mathbf{Hotc})$, ceci est un groupe dont l'identité est la classe d'un fibré trivial. En fait, on peut voir $\mathrm{Vect}_{\mathrm{st}}$ comme un foncteur contravariant de **Hotc** à **Ab**.

Proposition 4 *$\widetilde{K}$ est naturellement isomorphe à* $\mathrm{Vect}_{\mathrm{st}}$

Preuve:. Soient ξ, η, deux fibrés vectoriels complexes sur $X \in \mathsf{Obj}(\mathbf{Hotc})$, et $\eta^\perp$, un fibré complémentaire à η. Alors,

$$[\xi] - [\eta] = ([\xi] + [\eta^\perp]) - ([\eta] + [\eta^\perp]) = [\xi \oplus \eta^\perp] - m[\varepsilon_X^1]$$

où $m = \mathrm{rang}(\eta \oplus \eta^\perp)$. Ainsi, tout élément de $K(X, x_0)$ prend la forme $[\zeta] - m[\varepsilon_X^1]$ pour un certain fibré ζ et un certain $m \in \mathbb{N}$.

Or, $[\zeta] - m[\varepsilon_X^1] \in \widetilde{K}(X) = \ker K(i : * \to (X, x_0))$ si et seulement si

$$0 = K(i)\left([\zeta] - m[\varepsilon_X^1]\right) = i^*[\zeta] - m\left(i^*[\varepsilon_X^1]\right) = (\mathrm{rang}\ \zeta - m)\,[\varepsilon_*^1]$$

c.-à-d. rang $\zeta = m$, car comme noté précédemment, tout fibré sur un point est trivial. Ainsi, on peut écrire

$$\widetilde{K}(X, x_0) = \left\{[\zeta] - (\mathrm{rang}\ \zeta)[\varepsilon_X^1] \in K(X)\right\} \ .$$

Ainsi, on définit un morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \widetilde{K}(X, x_0) &\longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathrm{st}}(X) \\ [\zeta] - (\mathrm{rang}\ \zeta)\,[\varepsilon_X^1] &\longmapsto [\zeta] \end{aligned}$$

qui est bien défini, car deux fibrés isomorphes sont nécessairement stablement équivalent, et clairement surjectif. Supposons donc que $[\zeta] = 0 \in \mathrm{Vect}_{\mathrm{st}}(X)$. Alors, cela veut dire qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\zeta \oplus \varepsilon_X^m \cong \varepsilon_X^{n+m} \ .$$

c.-à-d. $[\zeta] - [\varepsilon_X^m] = [\varepsilon_X^n] - [\varepsilon_X^n] = 0$. Alors, nécessairement $n = \mathrm{rang}\ \zeta$ et $[\zeta] - (\mathrm{rang}\ \zeta)[\varepsilon_X^1] = [\varepsilon_X^m] - [\varepsilon_X^m] = 0$. Ainsi, φ est un isomorphisme.

Finalement, il est naturel puisque si $f : X \to Y$ représente un morphisme de **Hotc** et ζ est un fibré vectoriel complexe sur Y,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ K(f))\left([\zeta] - (\mathrm{rang}\ \zeta)[\varepsilon_X^1]\right) &= \varphi\left([f^*\zeta] - (\mathrm{rang}\ \zeta)[f^*\varepsilon_X^1]\right) \\ &= [f^*\zeta] \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathrm{st}}(X)(f)[\zeta] \\ &= (\mathrm{Vect}_{\mathrm{st}}(X)(f) \circ \varphi)\left([\zeta] - (\mathrm{rang}\ \zeta)[\varepsilon_X^1]\right) \ . \end{aligned}$$

□

III. Intermède : Théories de cohomologie extraordinaires

On a vu en classe à quel point il pouvait être pratique d'avoir une notion générale de complexe de chaînes et de (co)homologie afin de dériver des résultats s'appliquant à une grande gamme de situations. Puisqu'on s'intéresse réellement aux espaces topologiques ici, et non aux complexes de chaînes, on aimerait avoir une définition abstraite de ce qu'est une théorie de (co)homologie pour des espaces topologiques. Qui plus est, il y a plusieurs contextes dans lesquels on obtient quelque chose qui se comporte comme la (co)homologie singulière définie en classe, mais qui ne provient pas de complexes de chaînes. Tout cela justifie donc de formaliser une approche passant directement de la topologie aux groupes abéliens. C'est pour répondre à cette demande que Eilenberg et Steenrod ont formulé dans les années 50 les axiomes qui portent maintenant leur nom. On énonce ici une version légèrement modifiée, du fait que l'on ne travaille qu'avec des espaces connexes et compacts.

Pour faire cela, il faut d'abord introduire la catégorie **HotcP**, dont les objets sont les paires pointées (X, A, x_0), où $(X, x_0), (A, x_0) \in \mathsf{Obj}(\mathbf{Hotc})$ et A est un sous-complexe de X (lire « sous-espace gentil »), et les morphismes sont les classes d'homotopie d'application continue $f : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$, où l'homotopie H est prise de sorte qu'en tout temps t, $H_t(A) \subseteq B$ et $H_t(x_0) = x_0$. Il y a une inclusion naturelle de **Hotc** dans **HotcP** donnée par $(X, x_0) \mapsto (X, \{x_0\}, x_0)$ faisant de **Hotc** une sous-catégorie pleine et, de ce fait, on va souvent écrire (X, x_0) pour $(X, \{x_0\}, x_0)$. On notera par $\mathbf{HotcP}_0$ la version non-pointée de cette catégorie et alors, X désigne la paire $(X, \varnothing)$ dans cette catégorie.

Définition 5 (Axiomes de Eilenberg-Steenrod) *Une **théorie de cohomologie** est une suite de foncteurs contravariants $(h^k : \mathbf{HotcP}_0 \to \mathbf{Ab})_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que*

(i) Pour tout $(X, A) \in \mathsf{Obj}(\mathbf{HotcP}_0)$, il existe une suite de transformations naturelles $(d_k : h^k(X, A) \to h^{k+1}(A))_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\ldots \longrightarrow h^k(X, A) \xrightarrow{h^k(j)} h^k(X) \xrightarrow{h^k(i)} h^k(A) \xrightarrow{d_k} h^{k+1}(X, A) \longrightarrow \ldots$$

est une suite longue exacte, où $i : A \hookrightarrow X$ et $j : X \to (X, A)$ sont les applications évidentes.

(ii) Si X est l'union de deux sous-complexes A et B, alors l'inclusion $\iota : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ induit un isomorphisme

$$h^k(X, B) \xrightarrow{h^k(\iota)} h^k(A, A \cap B)$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $h^0(*) = \mathbb{Z}$ et $h^k(*) = 0$ si $k \neq 0$.

*Si la suite de foncteurs respecte les deux premiers axiomes, mais pas le troisième, la théorie est dite **extraordinaire**.*

REMARQUE: Toute théorie de cohomologie $h^\bullet$ induit une théorie de cohomologie dite **réduite** $\widetilde{h}^\bullet$, qui est plutôt une suite de foncteurs **HotcP** $\to$ **Ab** définie par

$$\widetilde{h}^k(X, x_0) := \ker h^k\left(i : * \hookrightarrow (X, x_0)\right) \qquad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Cette définition a un sens, puisque tout morphisme de **HotcP** est entre autres un morphisme de $\mathbf{HotcP}_0$, malgré que $*$ ne soit pas un objet nul dans $\mathbf{HotcP}_0$. Alors, pour les mêmes raisons que précédemment déclamées, la suite courte exacte correspondante va toujours se scinder et on aura

$$h^\bullet(X) \cong \widetilde{h}^\bullet(X, x_0) \oplus h^\bullet(*)$$

d'où $\widetilde{h}^\bullet(*) = 0$. Alors, les axiomes précédents s'adaptent facilement en prenant compte du léger changement de catégorie.

Puisque plusieurs choses sont connues sur les théories de cohomologie extraordinaires, on aimerait donc bien étendre notre groupe de Grothendieck associé à $\mathrm{Vect}(X)$ de sorte à en faire une telle théorie.

IV. K-THÉORIE TOPOLOGIQUE

Pour trouver la bonne théorie cohomologique à associer à notre foncteur $\widetilde{K}$, tentons de voir comment obtenir une suite longue exacte d'une paire (X, A, x_0).

Lemme 1 *Soient $(X, A, x_0) \in \mathsf{Obj}(\mathbf{HotcP})$ et ξ, un fibré vectoriel complexe sur A tel que $\xi|_A$, c.-à-d. le fibré ξ dont on a restreint l'espace de base à A, soit trivial. Alors, ξ induit un fibré vectoriel complexe de même rang sur X/A. De plus, ξ est isomorphe au rappel par l'application quotient du fibré induit sur X/A.*

PREUVE:. Voir [Ati64], lemme 1.4.7. □

Corollaire 2 *Si $(X, A, x_0) \in \mathsf{Obj}(\mathbf{HotcP})$, alors il existe une suite exacte*

$$\widetilde{K}(X/A, x_0) \xrightarrow{\widetilde{K}(q)} \widetilde{K}(X, x_0) \xrightarrow{\widetilde{K}(i)} \widetilde{K}(A, x_0)$$

où $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ et $q : (X, x_0) \twoheadrightarrow (X/A, A/A = x_0)$ sont les applications évidentes.

PREUVE:. Tout d'abord, on note que $(q \circ i)(x) = x_0$, pour tout $x \in A$, et donc, se factorise à travers l'inclusion $\iota_{x_0} : * \hookrightarrow (X/A, x_0)$. Ainsi, $\widetilde{K}(i) \circ \widetilde{K}(q) = \widetilde{K}(q \circ i)$ se factorise à travers $\widetilde{K}(\iota_{x_0})$ qui est triviale, car $\widetilde{K}(*) = 0$. Ainsi, $\widetilde{K}(i) \circ \widetilde{K}(q) = 0$.

Soit $[\zeta] \in \ker \widetilde{K}(i)$. Alors, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $(\zeta \oplus \varepsilon_X^m)|_A \cong \varepsilon_A^{n+m}$ et donc, par le lemme précédent, un fibré $(\zeta \oplus \varepsilon_X^m)/A$ induit sur X/A. Il suit que

$$\widetilde{K}(q)[(\zeta \oplus \varepsilon_X^m)/A] = [q^*((\zeta \oplus \varepsilon_X^m)/A)] = [\zeta \oplus \varepsilon_X^m] = [\zeta]$$

par le lemme précédent. Donc, $\operatorname{im} \widetilde{K}(q) = \ker \widetilde{K}(i)$. □

Pour continuer notre suite exacte, on aura cependant besoin de retourner brièvement à la topologie plus élémentaire :

Définition 6 *Soit (X, x_0), un espace topologique pointé. Alors, la* ***suspension réduite*** *de X est définie par*

$$\Sigma X := {X \times [0,1]} \big/ ((X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times [0,1]))$$

et son ***cône réduit*** *par*

$$CX := {X \times [0,1]} \big/ ((X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times [0,1])) \ .$$

Remarque: On note que ΣX et CX sont tous deux naturellement des espaces pointés en prenant comme point l'image de $x_0 \times [0,1]$ dans le quotient, que l'on notera encore x_0 par abus de notation. De plus, si X est un CW-complexe connexe fini, il en va de même pour sa suspension et son cône réduit. En fait, on peut même s'assurer que ΣX soit l'union de deux sous-complexes C_+X et C_-X, tous deux homéomorphe à CX et donc, contractiles (c.-à-d. homotopiquement équivalent à un point).

De plus, si on a une application continue $f : X \to Y$, alors $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ et $Cf : CX \to CY$ définies par $\Sigma f(x,t), Cf(x,t) = (f(x), t)$ permet de voir Σ et C comme des foncteurs de **Hotc** dans lui-même.

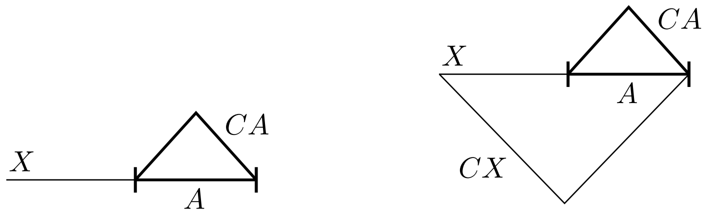
Alors, on peut finalement énoncer le résultat principal sur cette théorie de cohomologie que l'on tente de construire :

Théorème 2 *Soit $(X, A, x_0) \in \mathsf{Obj}(\mathbf{HotcP})$. Alors, il existe une suite exacte*

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r, "\delta_2"] & \widetilde{K}(\Sigma(X/A), x_0) \arrow[r, "\widetilde{K}(\Sigma q)"] & \widetilde{K}(\Sigma X, x_0) \arrow[r, "\widetilde{K}(\Sigma i)"] & \widetilde{K}(\Sigma A, x_0) \arrow[dll, "\delta_1"] \\ & \widetilde{K}(X/A, x_0) \arrow[r, "\widetilde{K}(q)"] & \widetilde{K}(X, x_0) \arrow[r, "\widetilde{K}(i)"] & \widetilde{K}(A, x_0) \end{tikzcd}$$

Preuve:. Par le caractère fonctoriel de la suspension, l'argument du corollaire précédent tient également pour la suspension de l'inclusion et de l'application quotient. Ainsi, il suffit de définir δ_1 et de montrer que la suite est exacte à son domaine et à son codomaine pour démontrer le théorème.

Considérons les paires $(X \cup CA, X, x_0)$ et $(X \cup CA \cup CX, X \cup CA, x_0)$, où les cônes CA et CX sont recollés selon l'identification $A \equiv A \times \{0\} \subseteq CA$ et $X \equiv X \times \{0\} \subseteq CX$ respectivement (voir figure 2 pour illustration de la situation).



(a) $X \cup CA$ (b) $X \cup CA \cup CX$

Figure 2 – Recollement lorsque X est un segment et A un sous-segment (en gras).

Pour la première paire, par le corollaire 2, on a la suite exacte

$$\widetilde{K}\left({(X \cup CA)} / {X} \right) \xrightarrow{\widetilde{K}(q')} \widetilde{K}(X \cup CA) \xrightarrow{\widetilde{K}(i')} \widetilde{K}(X)$$

où i' et q' sont respectivement l'inclusion et l'application quotient dans la situation présente, et où on a omit les « x_0 » pour alléger la situation.

Or, on a la projection

$$p : X \cup CA \longrightarrow {(X \cup CA)} / {CA} = {X} \Big/ {(X \cap CA)} = X/A$$

qui est une équivalence d'homotopie, car le cône d'un espace est toujours contractile et c'est un fait topologique que quotienter par un sous-complexe contractile induit une équivalence d'homotopie. Ainsi, $\widetilde{K}(p)$ est un isomorphisme et on peut voir que $q' = p \circ i'$. Dans la même veine d'idée, on a un homéomorphisme naturel

$${(X \cup CA)} / {X} = {CA} \Big/ {(X \cap CA)} = CA/A \cong \Sigma A$$

qui induit donc un isomorphisme sur les groupes $\widetilde{K}$ correspondant, que l'on notera θ.

On peut donc finalement définir δ_1 par la composition

$$\widetilde{K}(\Sigma A) \xrightarrow{\theta} \widetilde{K}\left({(X \cup CA)} / {X} \right) \xrightarrow{\widetilde{K}(q')} \widetilde{K}(X \cup CA) \xrightarrow{\widetilde{K}(p)^{-1}} \widetilde{K}(X/A)$$

et on a directement que

$$\widetilde{K}(\Sigma A) \xrightarrow{\delta_1} \widetilde{K}(X/A) \xrightarrow{\widetilde{K}(q)} \widetilde{K}(X)$$

est exacte par l'exactitude de la suite associée à la paire $(X \cup CA, X, x_0)$ et ce qu'on a déjà dit.

Ceci nous mène donc à la seconde paire que l'on voulait considérer. Celle-ci nous donne plutôt la suite exacte

$$\widetilde{K}\left((X \cup CA \cup CX) \big/ (X \cup CA)\right) \xrightarrow{\widetilde{K}(q'')} \widetilde{K}(X \cup CA \cup CX) \xrightarrow{\widetilde{K}(i')} \widetilde{K}(X \cup CA)$$

où i'' et q'' sont encore une fois l'inclusion et l'application quotient associées à notre paire. Or, on a un homéomorphisme et une équivalence d'homotopie

$$(X \cup CA \cup CX) \big/ (X \cup CA) = CX \big/ ((X \cup CA) \cap CX) = CX/X \cong \Sigma X$$

$$\text{et} \quad X \cup CA \cup CX \approx (X \cup CA \cup CX) / CX = X \cup CA / X \cong \Sigma A \ ,$$

d'où le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}\left((X \cup CA \cup CX) \big/ (X \cup CA)\right) \arrow[r, "\widetilde{K}(q'')"] \arrow[dd, "\wr"'] & \widetilde{K}(X \cup CA \cup CX) \arrow[r, "\widetilde{K}(i'')"] \arrow[d, "\wr"] & \widetilde{K}(X \cup CA) \arrow[dd, "\widetilde{K}(p)^{-1}"] \\
 & \widetilde{K}\left((X \cup CA) / X\right) \arrow[ur, "\widetilde{K}(q')"'] \arrow[d, "\theta^{-1}"] & \\
\widetilde{K}(\Sigma X) \arrow[r, "\widetilde{K}(\Sigma i)"] & \widetilde{K}(\Sigma A) \arrow[r, "\delta_1"] & \widetilde{K}(X/A)
\end{tikzcd}$$

dont le côté de droite commute par définition de δ_1. Alors, puisque la rangée du haut est exacte, il suffit de démontrer que le carré de gauche commute (à signe près) pour conclure de l'exactitude de la rangée du bas. Malheureusement, cela utilise de façon essentielle le fait que les fibrés vectoriels complexes de rang n sur la suspension réduite d'un espace sont classifiés par les classes d'homotopie de cet espace dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$; fait que je n'ai pas l'intention de démontrer vu l'ampleur de la tâche et le but introductif de ce document. On va donc se contenter d'assumer ce fait et accepter que la preuve est maintenant complétée (les intéressé.e.s pourront rassasier leur curiosité dans [Ati64], proposition 2.4.4 au lemme 2.4.6). □

Ceci motive donc la définition suivante :

Définition 7 *Soient* $(X, A, x_0) \in \mathsf{Obj}(\mathbf{HotcP})$ *et* $n \geq 0$. *Alors, le* ***n-ième groupe de K-théorie*** *est défini par*

$$\widetilde{K}^{-n}(X, A, x_0) := \widetilde{K}\left(\Sigma^n(X/A), x_0\right) \ ,$$

où on prend la définition récursive $\Sigma^n(X/A) := \Sigma(\Sigma^{n-1}(X/A))$ *et* $\Sigma^0(X/A) := X/A$. *Les morphismes sont alors définis de façon conséquente.*

Par contre, comme on le voit dans notre théorème ci-haut, notre suite se termine abruptement après le degré 0. De plus, on peut démontrer que $\widetilde{K}(i)$ n'est pas nécessairement surjective. Cela veut donc dire qu'on doit trouver un moyen d'étendre notre suite de l'autre côté... Heureusement, un théorème dû à Bott, que je vais citer sans preuve considérant que la matière nécessaire à la preuve n'a pas été introduite ici, vient nous sauver la mise tout en précisant ce qu'est la K-théorie.

Théorème 3 (Théorème de périodicité de Bott) *Pour tout $n \geq 0$, le foncteur $\widetilde{K}^{-n-2}$ est naturellement isomorphe à $\widetilde{K}^{-n}$.*

Ainsi, non seulement sait-on maintenant que notre théorie est 2-périodique, mais également, cela nous permet de prendre comme définition $\widetilde{K}^{2k} = \widetilde{K}^0$ et $\widetilde{K}^{2k+1} = \widetilde{K}^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. De même, le théorème que l'on a démontré implique directement qu'avec cette définition, la suite s'étend des deux côtés à l'infini.

On voudrait maintenant démontrer la naturalité des δ_n. Or, par la construction du théorème sur la suite longue exacte, cela revient à démontrer qu'une application continue $f : (Y, B, y_0) \to (X, A, x_0)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(\Sigma A) \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "\widetilde{K}(\Sigma f)"'] & \widetilde{K}\left((X \cup CA)/X\right) \arrow[r, "\widetilde{K}(q'_A)"] & \widetilde{K}(X \cup CA) \arrow[r, "\widetilde{K}(p_A)^{-1}"] & \widetilde{K}(X/A) \arrow[d, "\widetilde{K}(\bar{f})"] \\
\widetilde{K}(\Sigma B) \arrow[r, "\theta_B"] & \widetilde{K}\left((Y \cup CB)/Y\right) \arrow[r, "\widetilde{K}(q'_B)"] & \widetilde{K}(Y \cup CB) \arrow[r, "\widetilde{K}(p_B)^{-1}"] & \widetilde{K}(Y/B)
\end{tikzcd}$$

où $\bar{f}$ est l'application induite par f sur le quotient. Or, pour démontrer cela, il suffit de prendre une section homotopique de p_A et p_B, puis de vérifier que le diagramme commute à homotopie près au niveau des espaces. En notant que cette section est induite par l'identification $X/A = (X \cup CA)/CA = h_1(X \cup CA)$, où h_t est une homotopie de $X \cup CA$ dans lui-même contractant CA en un point (le fait qu'une telle chose existe dépend fondamentalement du fait que CA soit un sous-complexe) et l'identification analogue pour Y et B, cela suit assez naturellement.

Le premier axiome démontré, on peut finalement passer au second et dernier axiome. Or, celui-ci découle directement du fait que si A et B sont deux sous-complexes d'un CW-complexe X,

$$(A \cup B)/B = A/(A \cap B)$$

comme utilisé à outrance précédemment. Ainsi, on a déjà démontré

Proposition 5 *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{K}^n$ a la propriété d'excision, c.-à-d. respecte le second axiome de Eilenberg-Steenrod.*

V. Avenues d'exploration

Maintenant que l'on a démontré que l'on pouvait construire une théorie cohomologique à partir des fibrés vectoriels, on a accès à une foule de résultats gratuitement (voir les chapitres 7, 8 et 9 de [Swi75] par exemple). En fait, on peut déjà noter deux généralisations naturelles de notre théorie :

- Tout d'abord, on note que l'on aurait pu développer toute la théorie avec des fibrés vectoriels réels plutôt que complexes. Cependant, il se trouve que plusieurs choses se comportent moins bien et il faut faire davantage attention, p. ex. le théorème de périodicité de Bott a période 8 et non, 2.
- De même, on aurait pu considérer une opération supplémentaire entre nos fibrés : le produit tensoriel. Il se trouve que celui se comporte très bien, malgré que la construction soit quelque peu plus subtile, d'où l'omission jusqu'à présent. En fait, cette opération transforme $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}K^k(X)$ en un anneau graduée, commutatif au sens gradué ; la K-théorie est donc en fait une théorie de cohomologie **multiplicative**. Cela s'avère être un ingrédient essentiel à la démonstration du théorème de périodicité de Bott.

Cela dit, on obtient des avenues d'exploration tout à fait naturelles pour aller chercher davantage de notre théorie :

- Toute théorie cohomologique possède ce qu'on appelle des **opérations cohomologiques**, c.-à-d. des transformations naturelles du foncteur h^k vers $h^{k'}$, et même des opérations sur ces opérations. Dans le cas de la K-théorie, l'étude de celles-ci mène aux opération de Adams qui permettent entre autres de prouver le problème de l'invariant de Hopf.
- Par un théorème dû à Swan, notre catégorie **Vect**(X) est équivalente à **Proj** $(C_{\mathbb{C}}(X))$, où $C_{\mathbb{C}}(X)$ est l'anneau des fonctions continues $f : X \to \mathbb{C}$, lorsque X est compact et Hausdorff. Ce fait est à la base du lien entre la K-théorie topologique et celle algébrique puisque la seconde s'intéresse principalement aux modules projectifs sur certains anneaux (des algèbres de Banach le plus souvent). En fait, ce lien est essentiel à la géométrie non-commutative.
- À toute théorie cohomologique $h^\bullet$, on peut associer un spectre, c.-à-d. une suite de CW-complexes $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que h^n soit naturellement isomorphe à $[-, E_n]$, le foncteur associant à un espace l'ensemble des classes d'homotopies de cet espace vers E_n et à une application, son action par la précomposition. Dans le cas de la K-théorie, $E_n = BU(n)$, la grassmannienne des n-plans complexes de $\mathbb{C}^\infty$. Ceci est équivalent au lien entre les fibrés sur ΣX et les classes d'homotopie dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ énoncé plus tôt. En fait, cela est essentiel à l'étude des **classes caractéristiques** qui associent à un fibré vectoriel (réel ou complexe) une suite de classe de cohomologie.
- Ce lien avec les classes caractéristiques permet de construire explicitement le **caractère de Chern**
$$ch\colon K^i(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \oplus_{k=0}^{\infty} H^{2k+i}(X; \mathbb{Q})$$
pour $i = 0, 1$, où $H^\bullet$ dénote ici la cohomologie singulière (ou une variante isomorphe) qui est en fait un isomorphisme ! Donc, notre théorie a en réalité un lien très fort avec la topologie de l'espace sous-jacent.

Bibliographie

[Ati64] Michael Atiyah. *K-Theory*. W. A. Benjamin, Inc., 1964.

[May09] Peter May. *K-Theory*. 2009. url : http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2009/KTheory2009.pdf.

[Ros94] Jonathan Rosenberg. *Algebraic K-Theory and Its Applications*. Graduate Texts in Mathematics 147. Springer, 1994.

[Swi75] Robert Switzer. *Algebraic Topology, Homotopy and Homology*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 212. Springer, 1975.