Numéro manquant

Solutionnaire à un exercice de *J-holomorphic curves and symplectic topology*
Dans le cadre du *J-séminaire*
Présentation du 24 juin 2020

Question (p.431, 11.1.14)**.** *Soit $M = \mathrm{Bl}_p\mathbb{C}P^2$, l'éclatement du plan projectif complexe en un point $p \in \mathbb{C}P^2$. Montrer par calcul direct que $\mathrm{QH}^0(M;\Lambda_\omega)$ est un corps si et seulement si $3\omega(E) \geq \omega(L)$, où Λ_ω est l'anneau de Novikov sur $\mathbb{C}$, $L := [\mathbb{C}P^1] \in H_2(M)$ et E est la classe du diviseur exceptionnel.*

Remarque: Ceci est une version modifiée de la question dans livre et la solution est basée sur un article de Ostrover. Notons que $\mathrm{QH}^\bullet(M;\Lambda_\omega)$ n'est pas réellement $\mathbb{Z}$-graduée puisque Λ_ω n'est pas $2\mathbb{Z}$-gradué, mais on peut quand même donner un sens à son terme de degré 0 comme Λ^0_ω-algèbre.

La question originale me semble extrêmement difficile à répondre puisque l'aire symplectique n'entre pas en jeu dans tout anneau de coefficients quantiques. De plus, pour faire de $\mathrm{QH}^\bullet(M;\Lambda)$ un corps, il me semble qu'il faut prendre un anneau de coefficients quantiques non-gradué puisqu'il faut admettre les séries infinies (l'inverse de $1 - q$ est $\sum_{n\geq 0} q^n$ après tout). Finalement, il me semble y avoir une erreur pure et simple dans l'énoncé : comme on va le voir, la condition naturelle semble être $3\omega(E) \geq \omega(L)$, et non $3\omega(E)^2 \geq \omega(L)^2$.

Solution: Rappelons d'abord que l'éclatement complexe de $\mathbb{C}P^2$ en un point p est défini par

$$\mathrm{Bl}_p\mathbb{C}P^2 := \{(q, D) \in \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{P}(T_p\mathbb{C}P^2) \mid q \in D\},$$

où nous avons identifié l'ensemble des droites de $\mathbb{C}P^2$ passant par p à l'ensemble des droites de $T_p\mathbb{C}P^2$ passant par l'origine : $\mathbb{P}(T_p\mathbb{C}P^2)$ est simplement $\mathbb{C}P^1$. C'est naturellement une variété complexe et la projection sur la première composante $b : M \to \mathbb{C}P^2$, appelée *contraction* ou *blowdown*, est un biholomorphisme hors du *diviseur exceptionnel*, soit $b^{-1}(p) = \{p\} \times \mathbb{P}(T_p\mathbb{C}P^2)$.

Cependant, $M = \mathrm{Bl}_p\mathbb{C}P^2$ n'est pas canoniquement une variété symplectique : $b^*\omega_{FS}$, où ω_{FS} est la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{C}P^2$, est dégénérée le long du diviseur exceptionnel. Néanmoins, en étant plus astucieux · euse dans la construction de l'éclatement, on obtient une famille à un paramètre de formes kählériennes sur M se projetant sur ω_{FS} hors du diviseur exceptionnel, le paramètre étant précisément la taille $\omega(E)$ du diviseur exceptionnel. La variété résultante est nécessairement semi-positive, puisque $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$, et on peut vérifier que la structure complexe standard est régulière.

Un peu de géométrie algébrique (ou la description topologique $M = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ donnée dans le livre) permet d'obtenir l'homologie de M :

$$H_i(M) = \begin{cases} \mathbb{Z}[pt] & \text{si } i = 0 \\ \mathbb{Z}L \oplus \mathbb{Z}E & \text{si } i = 2 \\ \mathbb{Z}[M] & \text{si } i = 4 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec produit d'intersection déterminé par

$$L \cdot L = 1, \qquad E \cdot E = -1, \qquad L \cdot E = 0.$$

Autrement dit, la cohomologie singulière de M prend la forme

$$H^\bullet(M) = \mathbb{Z}[\ell, e] \big/ (\ell^3, \ell^2 + e^2, \ell e),$$

où $\ell = \mathrm{PD}(L)$ et $e = \mathrm{PD}(E)$. Donc, $\{1, \ell, e, \ell^2\}$ est une base de $H^\bullet(M)$ comme groupe et $\langle \ell^2, [M] \rangle = 1$, c.-à-d. $\mathrm{PD}(\ell^2) = [pt]$.

De plus, il y a précisément trois familles de droites complexes, c.-à-d. de sphères pseudoholomorphes simples pour la structure complexe standard : le diviseur exceptionnel, les droites $b^{-1}(D)$ pour D ne croisant pas p et les *transformées strictes* $D' := \overline{b^{-1}(D - p)}$ pour D croisant p. Elles représentent respectivement les classes E, L et $F := L - E$. Pour voir qu'on a bien $[D'] = F$, il suffit de noter que

$$[D'] \cdot L = b_*[D'] \cdot b_* L = [D] \cdot [D] = 1$$

et que $|D' \cap b^{-1}(p)| = 1$, l'intersection étant nécessairement positive puisque ce sont des courbes complexes.

Nous sommes maintenant rendu à calculer les invariants de Gromov-Witten de M. Tout d'abord, notons que si Σ est une surface d'une variété symplectique de dimension 4, alors on a

$$\begin{aligned} c_1([\Sigma]) &= \langle c_1(TM|_\Sigma), [\Sigma] \rangle \\ &= \langle c_1(T\Sigma) + c_1(N\Sigma), [\Sigma] \rangle \\ &= \chi(\Sigma) + \Sigma \cdot \Sigma, \end{aligned}$$

où $N\Sigma$ est le fibré normal de Σ dans M. Nous avons ici utilisé le fait que la première classe de Chern d'un fibré en droites complexes est égale à sa classe d'Euler et que l'évaluation de la classe d'Euler sur la classe fondamentale donne le caractéristique d'Euler pour le fibré tangent et le nombre d'auto-intersection pour le fibré normal. Ainsi, $c_1(L) = 3$, $c_1(E) = 1$ et $c_1(F) = 2$. Les espaces de modules des courbes simples représentant L, E et F, les seuls correspondants à des invariants de Gromov-Witten possiblement non-triviaux, ont respectivement dimension 10, 6 et 8. Donc, les seuls invariants qui sont nécessaires de calculer sont

$$\mathrm{GW}^M_{L,3}(\ell^2,\ell^2,\ell),\ \mathrm{GW}^M_{L,3}(\ell^2,\ell^2,e),$$
$$\mathrm{GW}^M_{E,3}(\ell,\ell,\ell),\ \mathrm{GW}^M_{E,3}(\ell,\ell,e),\ \mathrm{GW}^M_{E,3}(\ell,e,e),\ \mathrm{GW}^M_{E,3}(e,e,e),$$
$$\mathrm{GW}^M_{F,3}(\ell^2,\ell,\ell),\ \mathrm{GW}^M_{F,3}(\ell^2,\ell,e),\ \mathrm{GW}^M_{F,3}(\ell^2,e,e).$$

Cependant, en ce rappelant que deux points distincts de $\mathbb{C}P^2$ détermine une unique droite, que l'image par b d'une courbe représentant F est une droite de $\mathbb{C}P^2$ passant par p et que deux droites de $\mathbb{C}P^2$ se croisent en précisément un point, on obtient que les seuls invariants non-nuls sont

$$\mathrm{GW}^M_{L,3}(\ell^2,\ell^2,\ell) = \mathrm{GW}^M_{F,3}(\ell^2,\ell,\ell) = \mathrm{GW}^M_{F,3}(\ell^2,\ell,e) = \mathrm{GW}^M_{F,3}(\ell^2,e,e) = 1,$$
$$\mathrm{GW}^M_{E,3}(e,e,e) = -1.$$

Nous avons ici aussi fait usage qu'il n'y a qu'une seule courbe complexe représentant la classe E, soit le diviseur exceptionnel, et qu'une transformée stricte représentant la classe F croise le diviseur exceptionnel exactement une fois ; le signe du dernier invariant demande plus de travail. De plus, lorsqu'une classe donnée apparaît plusieurs fois dans un même invariant, il faut prendre des représentants du dual de Poincaré différents pour chaque copie de ladite classe afin d'assurer la régularité.

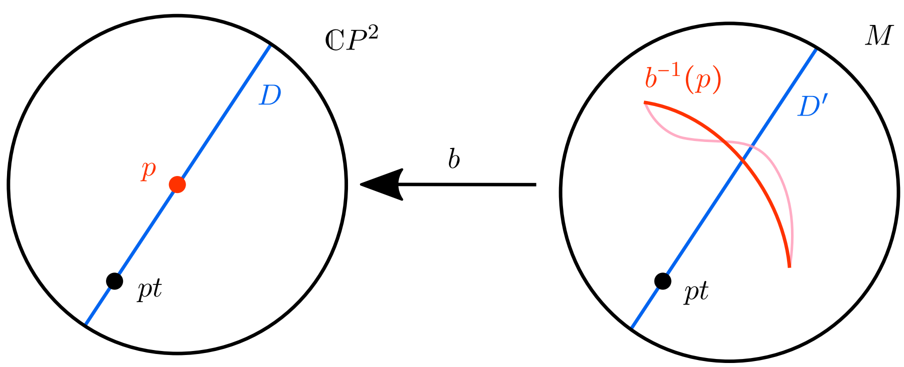


FIGURE 1 – Preuve par dessin que $\mathrm{GW}^M_{F,3}(\ell^2,e,e) = 1$; la courbe rose est une perturbation de $b^{-1}(p)$.

Finalement, l'inverse de la matrice d'intersection $g = (\int_M e_\nu \cup e_\mu)_{\nu\mu}$ est

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par la formule

$$a * b = \sum_{A \in K^{\text{eff}}} \sum_{\nu,\mu=1}^{4} \mathrm{GW}^M_{A,3}(a,b,e_\nu) g^{\nu\mu} e_\mu \otimes e^A$$

et le fait que les invariants de Gromov-Witten sont symétriques dans ses arguments lorsque ceux-ci sont des classes de degré pair, on obtient la table de multiplication suivante.

$*$	ℓ	e	ℓ^2
ℓ	$\ell^2 + 1 \otimes e^F$	$1 \otimes e^F$	$1 \otimes e^L + (\ell - e) \otimes e^F$
e	$1 \otimes e^F$	$-\ell^2 + e \otimes e^E + 1 \otimes e^F$	$(\ell - e) \otimes e^F$
ℓ^2	$1 \otimes e^L + (\ell - e) \otimes e^F$	$(\ell - e) \otimes e^F$	$\ell \otimes e^L$

Prenons comme base de $H_2(M)$

$$A_1 := \begin{cases} 3E - L & \text{si } 3\omega(E) \geq \omega(L) \\ L - 3E & \text{si } 3\omega(E) < \omega(L) \end{cases} \quad \text{et} \quad A_2 := E.$$

Ainsi, $\omega(A_1) = |3\omega(E) - \omega(L)|$, $c_1(A_1) = 0$ et $c_1(A_2) = 1$. On peut donc identifier l'anneau de Novikov au sous-anneau de $\mathbb{C}((q_1, q_2))$ formé des séries de la forme $\sum_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2} \lambda_{\alpha\beta} q_1^\alpha q_2^\beta$ respectant la condition de finitude

$$\#\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2; \lambda_{\alpha\beta} \neq 0,\ \alpha|3\omega(E) - \omega(L)| + \beta\omega(E) \leq c\} < \infty,\ \ \forall c \in \mathbb{R}.$$

La « graduation » est alors donnée par

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega^{2i} &= \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \lambda_{\alpha i} q_1^\alpha q_2^i \in \Lambda_\omega \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \lambda_{\alpha i} q_1^\alpha q_2^i \;\middle|\; \#\{\alpha \mid \lambda_{\alpha i} \neq 0, \alpha|3\omega(E) - \omega(L)| \leq c\} < \infty, \forall c \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

En particulier, lorsque $3\omega(E) = \omega(L)$, c.-à-d. lorsque M est monotone, Λ_ω^{2i} ne contient que des sommes finies.

Puisque

$$\mathrm{QH}^0(M;\Lambda_\omega) = \left(H^0(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_\omega^0\right) \oplus \left(H^2(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_\omega^{-2}\right) \oplus \left(H^4(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda_\omega^{-4}\right),$$

$\mathrm{QH}^0(M;\Lambda_\omega)$ est engendré comme Λ_ω^0-module par 1, eq_2^{-1}, $(\ell - e)q_2^{-1}$ et $\ell^2 q_2^{-2}$, que nous allons renommer respectivement b_0, b_1, b_2 et b_3. Ainsi, la table de multiplication ci-haut donne une identification de $\mathrm{QH}^0(M;\Lambda_\omega)$ avec

$$\frac{R[b_1, b_2, b_3]}{(b_1^2 + b_3 - b_1 + q^\kappa, b_2^2 - b_1, b_3^2 - (b_1 + b_2)q^\kappa, b_1 b_2 + b_1 - b_3, b_1 b_3 - b_1 q^\kappa, b_2 b_3 - q^\kappa)},$$

où $R \cong \Lambda_\omega^0$ est l'anneau des séries de Laurent complexes $\mathbb{C}((q))$ en $q \equiv q_1$ si $3\omega(E) \neq \omega(L)$ et l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ lorsque $3\omega(E) = \omega(L)$. De plus,

$$\kappa := \begin{cases} -1 & \text{si } 3\omega(E) \geq \omega(L) \\ 1 & \text{si } 3\omega(E) < \omega(L) \end{cases}.$$

En particulier, $b_1 = b_2^2$ et $-b_3 = b_1^2 - b_1 + q^\kappa = b_2^4 - b_2^2 + q^\kappa$. Ceci donne donc un isomorphisme

$$\mathrm{QH}^0(M; \Lambda_\omega) \cong \frac{R[b]}{((b^2 - b^4 + q^\kappa)^2 - (b + b^2)q^\kappa, b^4 + b^3 - q^\kappa, b(b^2 - b^4 + q^\kappa) - q^\kappa)}$$

en envoyant b_2 sur b. Or, la première relation est obtenue de la troisième en la multipliant par $b^2 + b$ puis en utilisant la deuxième relation, tandis que la troisième relation est obtenue de la deuxième en la multipliant par $b - 1$. Ainsi, on a en réalité un isomorphisme

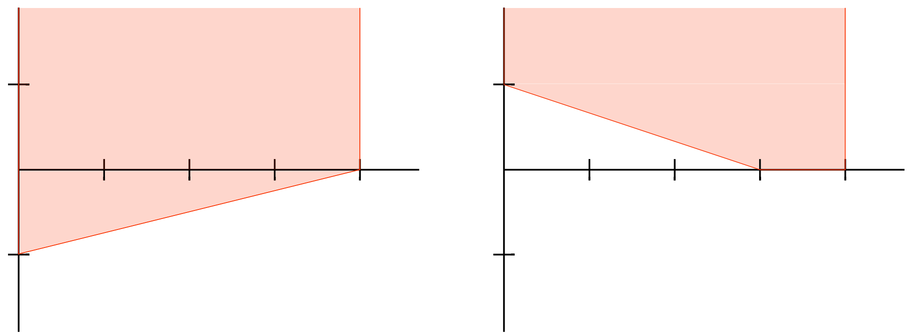
$$\mathrm{QH}^0(M; \Lambda_\omega) \cong R[b] \Big/ \left(b^4 + b^3 - q^\kappa\right).$$

Donc, $\mathrm{QH}^0(M; \Lambda_\omega)$ est un corps si et seulement si le polynôme $b^4 + b^3 - q^\kappa$ est irréductible sur R. Pour déterminer quand c'est le cas, ça nous demandera des techniques quelque peu ésotériques.

Tout d'abord, considérons le cas $3\omega(E) \neq \omega(L)$. Alors, $R = \mathbb{C}((q))$ et nous pouvons utiliser les polygones de Newton pour trouver les racines du polynôme ; j'en explique ici les grandes lignes. Pour un polynôme $p(b) = \lambda_n b^n + \cdots + a_0$ avec coefficients λ_i dans $\mathbb{C}((q))$, son polygone de Newton est l'enveloppe convexe des points $(i, v(\lambda_i)) \in \mathbb{R}^2$, où $v(\lambda_i)$ est la plus petite puissance de λ_i ayant un coefficient non-nul. On utilise la convention $v(0) = +\infty$. Autrement dit, si on voit λ_i comme une fonction méromorphe sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$, alors $v(\lambda_i)$ est, à un signe près, l'ordre de son pôle ou de son zéro à l'origine.

Cette notion est particulièrement importante puisqu'elle donne de l'information sur les racines : si $\nu_1, \ldots, \nu_r$ sont les pentes des différentes arêtes inférieures du polygone et que μ_i est la longueur du segment de pente ν_i lorsque projeté sur l'axe des x, alors p a exactement μ_i racines dont la puissance minimale, c.-à-d. la plus petite puissance dont le coefficient est non-nul, est $-\nu_i$. Notons que ces racines sont cependant dans la fermeture algébrique de $\mathbb{C}((q))$, soit $\mathbb{C}((\{q^{1/k}\}_{k \geq 1}))$, le corps des séries de Puisseux.

Comme le démontre la figure 2, dans notre cas, nous obtenons que $b^4 + b^3 - q^{-1}$ a quatre racines de puissance minimale $\frac{-1}{4}$ et que $b^4 + b^3 - q$ a trois racines de puissance minimale $\frac{1}{3}$ et une de puissance minimale 0. Ainsi, $b^4 + b^3 - q^{-1}$ est irréductible puisqu'il n'y a pas de manière de multiplier les quatre racines de puissance minimale



(a) $\kappa = -1$ (b) $\kappa = 1$

FIGURE 2 – Le polygone de Newton de $b^4 + b^3 - q^\kappa$.

$\frac{-1}{4}$ afin d'obtenir une décomposition non-triviale de $b^4 + b^3 - q^{-1}$ en séries de Laurent. Cependant, $b^4 + b^3 - q$ a la possibilité d'être réductible, une décomposition donnée par la série de puissance minimale 0 et la série obtenue par la multiplication des trois séries de puissance minimale $\frac{1}{3}$. Je n'ai pas vraiment de solution magique à partir de ce point : j'ai utilisé la fonction `AsymptoticSolve` de *Mathematica* afin d'obtenir les premiers termes de la série de Puisseux ayant puissance minimale 0. Ensuite, j'ai regardé dans l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers pour trouver le terme général. Ceci nous permet de deviner que

$$\lambda := -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{4n-1} \binom{4n-1}{n-1} q^n$$

est la racine recherchée. Notons que c'est bien une série de puissance et, par calcul direct, on peut vérifier que c'est bien une racine du polynôme $b^4 + b^3 - q$. Donc nous pouvons diviser $b^4 + b^3 - q$ par $b - \lambda$ pour obtenir l'autre terme de la décomposition. Ainsi, en résumé, lorsque $3\omega(E) \neq \omega(L)$, $b^4 + b^3 - q^\kappa$ est irréductible (et donc $\mathrm{QH}^0(M; \Lambda_\omega)$ est un corps) si et seulement si $3\omega(E) > \omega(L)$.

Il reste donc à s'occuper du cas $3\omega(E) = \omega(L)$. Or, dans ce cas, $R = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ se plonge dans $\mathbb{C}((q))$. Ainsi, toute décomposition de $b^4 + b^3 - q^{-1}$ sur $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ en donnerait une sur $\mathbb{C}((q))$. Puisque nous venons de voir qu'il n'en existe pas, nous pouvons conclure que $\mathrm{QH}^0(M; \Lambda_\omega)$ est un corps dans ce cas-ci aussi. Notons que ceci n'est pas un artéfact de notre choix arbitraire de prendre $\kappa = 1$ lorsque $3\omega(E) = \omega(L)$: la racine λ de $b^4 + b^3 - q$ ci-haut n'est définitivement pas dans $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$. En particulier, par le lemme de Gauss, λ n'est pas dans le corps de fractions de $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$, qui est nul autre que le corps des fonctions rationnelles $\mathbb{C}(q)$. $\square$