

# HOMOLOGIE DE MORSE

## NOTES DE PRÉSENTATION

Jean-Philippe CHASSÉ, Université de Montréal

### I. MOTIVATIONS

Comme on l'a vu en classe, on peut construire une cohomologie à partir des formes différentielles qui est isomorphe à la cohomologie singulière à coefficients réels. Un peu de topologie algébrique nous donne que pour tout espace topologique  $X$ ,

$$H^k(X; \mathbb{R}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_k(X; \mathbb{Z}), \mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

et donc, on perd toute la torsion de l'homologie à coefficients entiers en s'intéressant uniquement à celle à coefficients réels. Cependant, cette torsion contient de l'information topologique, p. ex. la non-orientabilité de  $\mathbb{R}P^2$  est en quelque sorte contenue dans le fait que  $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Néanmoins, utiliser les outils de la géométrie différentielle a de gros avantages, ne serait-ce qu'au point de vue calculatoire (la premier numéro du troisième devoir en est un bon exemple). Pourrait-on donc plutôt utiliser un autre type d'objet pour construire notre homologie/cohomologie potentielle ?

D'un point de vue moins algébrique, on sait que la topologie d'un espace restreint le genre d'application continues qui peuvent exister sur celui-ci et vice-versa ; qu'en est-il pour les fonctions différentiables ?

### II. HESSIEN ET FONCTIONS DE MORSE

**Définition** Soient  $f$ , une fonction lisse sur une variété lisse  $M$ , et  $a \in \text{Crit}(f)$ . Alors, si  $X, Y \in T_a M$ , le hessien de  $f$  en  $a$  de  $X$  et  $Y$  est défini par

$$\text{Hess}_a(f)(X, Y) := \left( X \left( \tilde{Y} f \right) \right) (a)$$

où  $\tilde{Y}$  est un prolongement de  $Y$  en un champ de vecteurs sur un voisinage de  $a$ .

Le hessien définit une forme quadratique symétrique sur  $T_a M$ , car

$$\left( X \left( \tilde{Y} f \right) \right) (a) - \left( Y \left( \tilde{X} f \right) \right) (a) = \left( [\tilde{X}, \tilde{Y}] f \right) (a) = df_a \left( [\tilde{X}, \tilde{Y}]_a \right) = 0$$

puisque  $df_a \equiv 0$ . En particulier, la définition du hessien ne dépend pas du prolongement choisi. De plus, si  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $T_a M$  est engendré par  $\partial/\partial x_i$  et on retrouve la définition de la matrice hessienne habituelle.

**Exercice** Si  $(M, g)$  est une variété pseudo-riemannienne, alors

$$\text{Hess}(f) = \nabla^2 f$$

ce qui permet de définir le hessien pas uniquement aux points critiques (et est bel et bien symétrique, car la connection de Levi-Civita n'a pas de torsion). Essentiellement, il faut une notion de courbure pour avoir une notion de dérivée seconde (ce qui n'est pas trop surprenant, puisque c'est exactement ce que la dérivée seconde calcule dans  $\mathbb{R}$  par nos cours de calcul différentiel).

On dit que  $a$  est un *point critique non-dégénéré* si  $\text{Hess}_a(f)$  est non-dégénérée et  $f$  est une *fonction de Morse* si tous ses points critiques sont non-dégénérés.

EXEMPLE. Un bon exemple de fonction de Morse sur une variété est la fonction hauteur sur le tore  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$  :

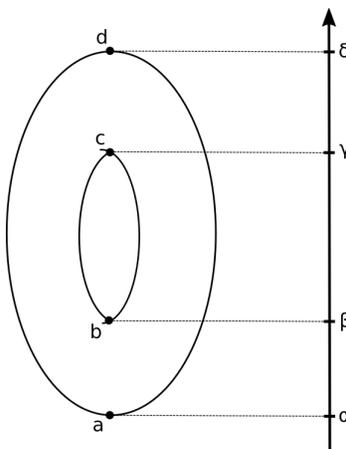


FIGURE 1 – La fonction hauteur sur le tore et ses points critiques.

On peut vérifier explicitement que les points critiques sont bien ceux indiqués dans le dessin et qu'ils sont non-dégénérés en prenant, par exemple, la paramétrisation locale

$$h : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$(\varphi, \theta) \mapsto (r \sin \varphi, (R - r \cos \varphi) \sin \theta, (r \cos \varphi - R) \cos \theta)$$

où  $R > r$ , telle que  $h(0, 0) = b$ ; qui recouvre tout  $\mathbb{T}^2$  en prenant différents carrés dans  $\mathbb{R}^2$ . Par exemple, un calcul direct donne que

$$\left( \text{Hess}_{(0,0)}(f \circ h) \right) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & R - r \end{pmatrix}$$

COMPLEXE DE CHAÎNES. Notre complexe de chaîne sera construit à partir des points critiques d'une fonction de Morse. Pour pouvoir construire plus explicitement notre complexe il nous faudra par contre répondre à deux questions : dans quel contexte existe-t-il des fonctions de Morse sur une variété et comment différencier les différents types de points critiques (maximum versus minimum versus point de selle) ?

**Proposition II.1** *Toute variété lisse compacte admet une fonction de Morse.*

PREUVE. Par le théorème de plongement de Whitney, on peut toujours plonger une variété compacte de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . On considère alors la fonction

$$f_p : M \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|x - p\|_{\mathbb{R}^3}^2$$

et on cherche  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que ce soit une fonction de Morse.

Une astuce intelligente pour régler le problème est de considérer la fonction

$$E : N \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (x, v) \mapsto x + v$$

où  $N$  dénote le fibré normal à  $M$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , et de montrer que  $f_p$  a point critique dégénéré en  $x = p - v$  si et seulement si  $p = x + v$  est une valeur critique de  $E$ . Puisque l'ensemble des valeurs critiques de  $E$  a mesure nulle par le théorème de Sard, presque tout  $p$  donnera lieu à une fonction de Morse  $f_p$ .  $\square$

**Théorème II.1** (Lemme de Morse) *Soit  $a$ , un point critique non-dégénéré d'une fonction lisse  $f$  sur une variété lisse  $M$ . Alors, il existe un voisinage  $U$  de  $a$  et un difféomorphisme  $\varphi : (U, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$  tel que*

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = f(a) - \sum_{j=1}^i x_j^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2$$

On appelle alors  $(\varphi, U)$  une carte de Morse.

PREUVE. Puisque l'énoncé du lemme de Morse est local, on peut considérer que  $M = \mathbb{R}^n$  et  $a = 0$ . Alors, on prouve l'énoncé par induction sur la dimension  $n$ .

Lorsque  $n = 1$ , l'énoncé découle directement du théorème du reste de Taylor ; le signe de la coordonnée de Morse est alors celle de la dérivée seconde de  $f$  en zéro (qui est non-nulle, car 0 est un point critique non-dégénéré).

Si l'énoncé est vrai pour  $n - 1$ , alors pour  $n$ , on divise  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$  et on voit  $f$  comme une fonction d'une variable réelle dépendant d'un paramètre dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  :  $f_y(x) := f(x, y)$ . Il suffit alors de trouver un difféomorphisme  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que  $(\partial(f \circ \Phi)/\partial x)(0, y) = 0$ . Alors, on réutilise l'argument du cas  $n = 1$  sur  $(f \circ \Phi)_y$  pour obtenir

$$f(x_1, y) = f_y(x_1) = \pm x_1^2 + f(0, y)$$

puis l'hypothèse de récurrence sur  $f(0, y)$ . □

**Corollaire II.1** *Les points critiques d'une fonction de Morse sont isolés. En particulier, si  $M$  est compacte, il y en a un nombre fini.*

On note que  $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$  est la base diagonalisant la matrice hessienne de  $f \circ \varphi^{-1}$  et donc, l'entier  $i$  apparaissant dans l'énoncé du lemme de Morse est le nombre de valeurs propres négatives de la matrice hessienne, c.-à-d. la signature de  $\text{Hess}_a(f)$ , et donc, ne dépend que du hessien de notre fonction au point critique. Ainsi, on appellera cet entier l'*indice* du point critique.

EXEMPLE. Sans même faire de calculs, regardant la forme du tore près de chaque point critique on peut directement voir l'indice de ceux-ci par le lemme de Morse :

- Le minimum est d'indice 0.
- Les points de selle sont d'indice 1.
- Le maximum est d'indice 2.

COMPLEXE DE CHAÎNES. On a maintenant notre complexe de chaînes : Les  $k$ -chaînes sont des sommes formelles de points critiques d'indice  $k$ , c.-à-d.

$$C_k(f) := \left\{ \sum_{a \in \text{Crit}_k(f)} n_a a : n_a \in \mathbb{Z} \text{ et } |\{n_a \neq 0\}| < \infty \right\}$$

### III. PSEUDO-GRADIENTS

Maintenant que l'on a nos chaînes, on voudrait construire une différentielle pour avoir un complexe de chaînes en règle. La question devient alors la suivante : comment relier deux points critiques d'indice consécutif de façon cohérente par rapport à notre fonction de Morse ? Pour la première partie, la réponse est bien sûr un chemin ! Pour la seconde partie, la réponse est moins évidente.

EXEMPLE. Regardons un peu de quoi à l'air la fonction hauteur en la rappelant sur la paramétrisation ci-haut :

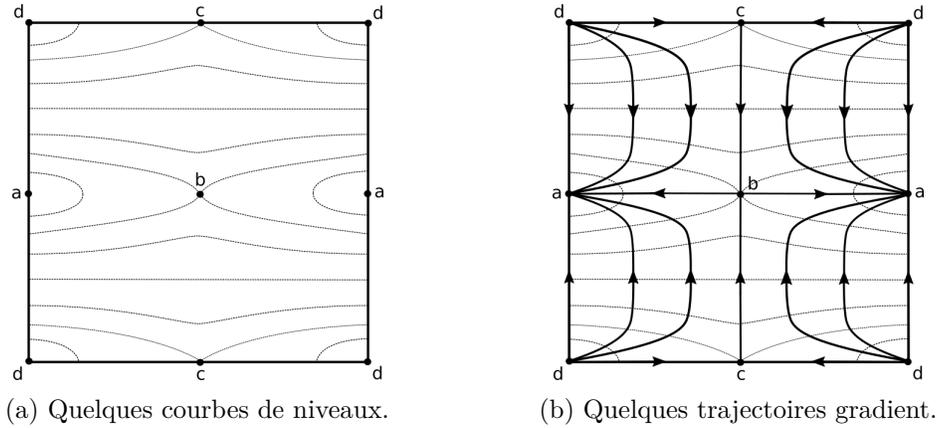


FIGURE 2 – La fonction hauteur ramenée sur le tore plat.

Les courbes gradients négatives semblent faire le travail que l'on veut ! On note qu'il y a une infinité de courbes allant de  $d$  à  $a$ , mais un nombre fini dans les autres cas. De plus, l'indice ne fait que diminuer le long de ces courbes.

**Définition** Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de Morse. Un pseudo-gradient adapté à  $f$  est un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  tel que

- (i)  $df_x(X_x) \leq 0 \forall x \in M$ , avec l'égalité si et seulement si  $x \in \text{Crit}(f)$ .
- (ii) dans un ouvert de carte de Morse,  $X$  correspond au rappel de  $-\text{grad}(f)$  dans  $M$ .

Un tel champ de vecteurs existe clairement pour toute fonction de Morse : il suffit d'utiliser le gradient négatif de la métrique riemannienne construite dans le devoir 2 en prenant ses cartes intelligemment.

De par le comportement du gradient dans  $\mathbb{R}^n$ , on se convainc facilement que si  $x \notin \text{Crit}(f)$  et que  $\varphi^t$  est le flot d'un pseudo-gradient adapté à  $f$ , alors le chemin défini par  $\varphi^t(x)$  va d'un point critique  $a$  vers un autre point critique  $b$  sans jamais les atteindre. Ainsi, en reparamétrisant au besoin, on peut supposer que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = b$$

**Définition** Soient  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de Morse,  $a \in \text{Crit}(f)$  et  $\varphi^t$ , le flot

d'un pseudo-gradient adapté à  $f$ . Alors,

$$W^s(a) := \left\{ x \in M : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = a \right\}$$

$$W^u(a) := \left\{ x \in M : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = a \right\}$$

sont respectivement appelées variétés stables et variétés instables.

EXEMPLE. À quoi ressemblent les variétés stables et instables pour notre exemple ?

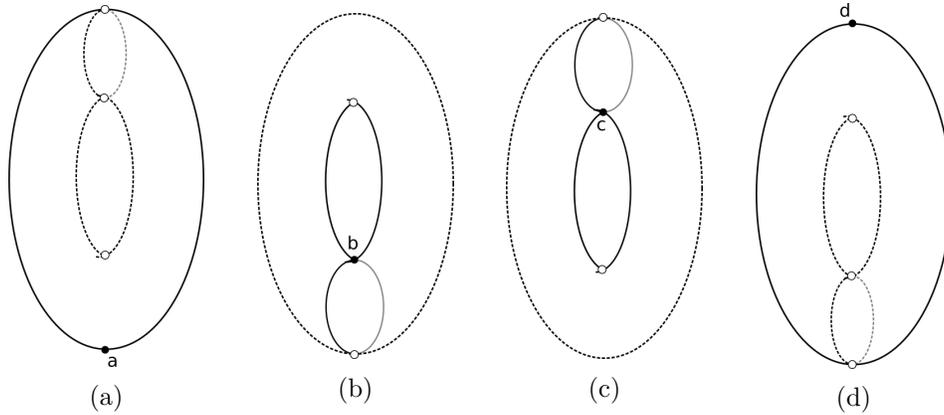


FIGURE 3 – Les variétés stables (en haut) et instables (en bas) des points critiques.

**Proposition III.1** *Les sous-variétés stables et instables d'un point critique  $a$  sont des sous-variétés de  $M$  difféomorphes à des disques ouverts et*

$$\dim W^u(a) = \text{codim } W^s(a) = \text{Ind}(a)$$

PREUVE. Par le lemme de Morse,  $W^u(a) \cap \Omega(a) \cong \mathbb{R}^k \cap \varphi(\Omega(a)) \cong \mathring{D}^k$ . Or, si  $x \in W^u(a) - \{a\}$ ,  $\exists t \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi^t(x) \in \partial\Omega(a)$ . Ainsi,

$$\Phi : \partial(W^u(a) \cap \Omega(a)) \times \mathbb{R} \rightarrow W^u(a) - \{a\}$$

$$(x, t) \longmapsto \varphi^t(x)$$

est un difféomorphisme. Or,  $\partial(W^u(a) \cap \Omega(a)) \times \mathbb{R}$  est un «  $k$ -cylindre » et donc, en ajoutant le point  $a$ , qui correspond à  $-\infty$ , on obtient un  $k$ -disque ouvert. La preuve pour  $W^s(a)$  est complètement analogue.  $\square$

Ce lien entre les variétés stables et instables, ainsi que l'indice du point critique laisse entrevoir l'importance centrale qu'elles joueront dans la construction de l'homologie de Morse. Cependant, la vie serait trop belle si tout s'arrêtait là ; il nous faut demander un peu plus de nos pseudo-gradients pour que tout se comporte bien :

**Définition** On dit qu'un pseudo-gradient  $X$  adapté à une fonction de Morse  $f$  respecte la condition de Smale si

$$W^u(a) \bar{\cap} W^s(b) \quad \forall a, b \in \text{Crit}(f)$$

**Remarque** Certains points critiques respectent automatiquement la condition de transversalité :

- $W^u(a) \bar{\cap} W^s(a)$  par le lemme de Morse
- $W^u(a) \bar{\cap} W^s(b)$  si  $a \neq b$  et  $f(a) \leq f(b)$  par la définition d'un pseudo-gradient

Cette condition nous sera très pratique, car si  $X$  respecte la condition de Smale,  $\mathcal{M}(a, b) := W^u(a) \cap W^s(b)$  est une variété et

$$\text{codim } \mathcal{M}(a, b) = \text{codim } W^u(a) + \text{codim } W^s(b) ,$$

d'où

$$\dim \mathcal{M}(a, b) = \text{Ind}(a) - \text{Ind}(b)$$

par ce qu'on sait sur la dimension des sous-variétés stables et instables.

Il est facile de voir que si  $a \neq b$ ,  $\mathbb{R}$  agit librement sur  $\mathcal{M}(a, b)$  par translation temporelle :

$$t \cdot x := \varphi^t(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{M}(a, b)$$

et donc,  $\mathcal{L}(a, b) := \mathcal{M}(a, b)/\mathbb{R}$ , qui est l'espace de module des courbes gradients allant de  $a$  à  $b$ , est une variété et

$$\dim \mathcal{L}(a, b) = \text{Ind}(a) - \text{Ind}(b) - 1$$

En particulier, si  $\text{Ind}(a) \leq \text{Ind}(b)$ , il n'y a pas de courbes gradients allant de  $a$  à  $b$ , et si  $\text{Ind}(a) = \text{Ind}(b) + 1$ , il y en a un nombre fini par la remarque suivante (car alors, c'est un sous-ensemble discret d'un ensemble compact) :

**Remarque** Si  $f(a) < \alpha < f(b)$ , on peut naturellement identifier  $\mathcal{L}(a, b)$  à  $\mathcal{M}(a, b) \cap f^{-1}(\alpha)$ , car cela revient précisément à choisir un représentant dans chaque courbe gradient et donc, les deux espaces ont bel et bien la même topologie par la définition de la topologie quotient.

EXEMPLE. Maintenant que l'on s'est convaincu que la propriété de Smale donnait ce qu'il nous fallait pour construire notre homologie, notons que notre exemple ne respecte pas la condition de Smale, puisque  $W^u(c) = W^s(b)$  et  $\dim W^u(c) = 1...$  Que va-t-on faire ?

**Théorème III.1** (Théorème de Smale) *Soient  $M$ , une variété compacte,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction de Morse avec valeur critique distinctes, et  $X$ , un pseudo-gradient pour  $f$ . On fixe un voisinage de Morse  $\Omega(a)$  pour chaque  $a \in \text{Crit}(f)$ . Alors, il existe un pseudo-gradient  $X'$  de  $f$  arbitrairement  $C^1$ -près de  $X$  tel que*

- (i)  $X' = X$  sur chaque  $\Omega(a)$
- (ii)  $X'$  respecte la condition de Smale.

EXEMPLE. Il suffit de perturber notre champ sur une petite bande au-dessus de  $c$  pour dérouter les variétés stable et instable de  $b$  et  $c$  respectivement :

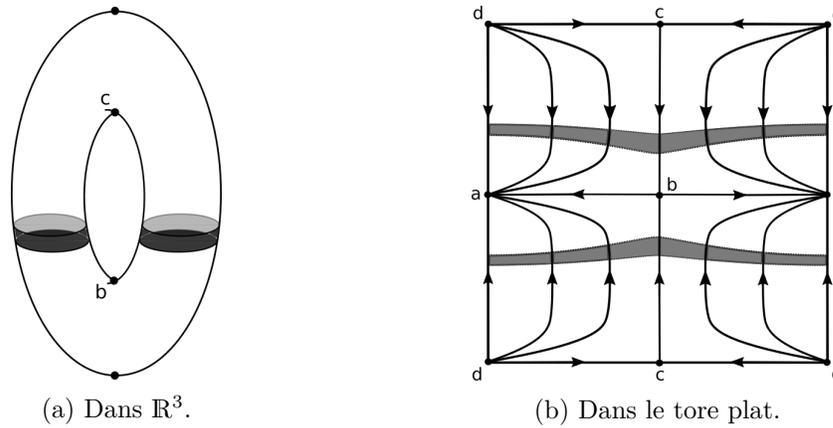


FIGURE 4 – La bande sur laquelle on perturbe  $X$ .

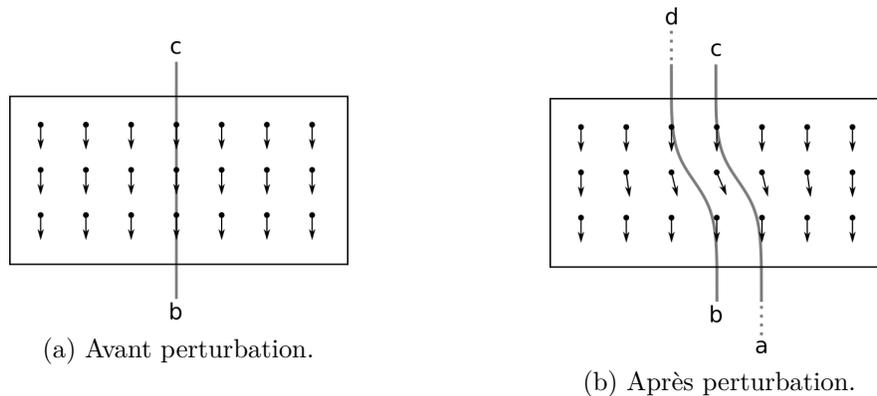


FIGURE 5 – La bande près de  $W_X^u(b)$ .

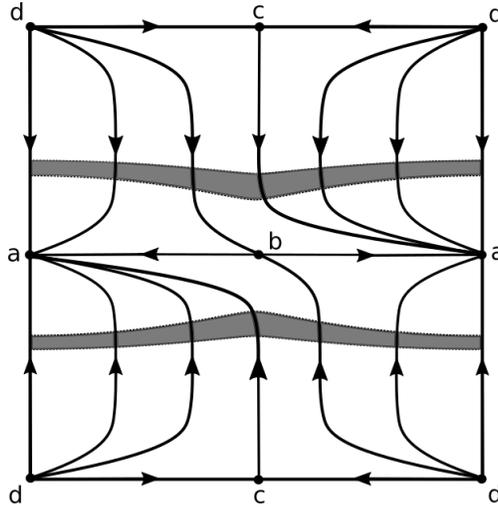


FIGURE 6 – Le résultat de la perturbation sur les courbes gradients.

IV. DIFFÉRENTIELLE ET INVARIANCE DES DÉFINITIONS

COMPLEXE DE CHAÎNES. On définit la différentielle de  $a \in \text{Crit}_{k+1}(f)$  par un pseudo-gradient  $X$  respectant la condition de Smale par

$$\partial_X(a) := \sum_{b \in \text{Crit}_k(f)} N_X(a, b)b$$

où  $N_X(a, b)$  dénote le nombre de courbes gradient (avec orientation!) allant de  $a$  à  $b$ .

Mais comment compter avec orientation? Tout d'abord, on note que le nombre de courbes gradients sans orientation allant de  $a$  à  $b$  est

$$|\mathcal{L}(a, b)|$$

donc, il suffit de prendre comme  $N_X(a, b)$ , la somme orientée des éléments de  $\mathcal{L}(a, b)$  (car une orientation pour un point revient à choisir un signe associé audit point).

Il nous faut donc orienter tous les  $\mathcal{L}(a, b)$ . Pour se faire, on choisit une orientation pour les variétés stables (ce qui donne une co-orientation de la variété instable par transversalité) de  $a$  et des  $b$ ; on peut toujours le faire puisque ce sont des disques. Encore par transversalité, cela définit une orientation sur  $\mathcal{M}(a, b)$ . Alors, on associe alors « +1 » à une courbe gradient si l'orientation induite par  $\mathcal{M}(a, b)$  correspond à celle induite par le flot de  $X$ , et « -1 » sinon. On obtient ainsi une orientation sur  $\mathcal{L}(a, b)$ .

Est-ce une vraie différentielle ? Voilà la vraie partie difficile de cet exposé. Heureusement pour tous, je ne vais pas démontrer que c'est, mais expliquer moralement pourquoi c'est le cas, puisque l'idée de la preuve est très intelligente. Par un calcul direct,

$$\partial_X^2(a) = \sum_{c \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \left( \sum_{b \in \text{Crit}_k(f)} N_X(a, b) N_X(b, c) \right) c .$$

Or,  $\sum_{b \in \text{Crit}_k(f)} N_X(a, b) N_X(b, c)$  est précisément le nombre d'élément dans

$$\bigsqcup_{b \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(a, b) \times \mathcal{L}(b, c)$$

en comptant l'orientation.

La clef pour montrer que cette quantité est nulle est alors contenue dans le dessin suivant :

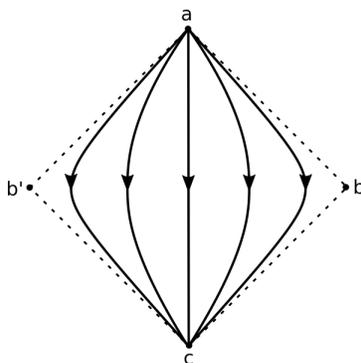


FIGURE 7 – Quelques courbes de  $\mathcal{M}(a, c)$

c.-à-d. que dans un sens intuitif, les courbes gradients tendent vers des trajectoires brisées passant par un point critique intermédiaire. Tout cela peut être rendu rigoureux :

$$\bar{\mathcal{L}}(a, c) := \mathcal{L}(a, c) \cup \bigcup_{b \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(a, b) \times \mathcal{L}(b, c)$$

est (équipé de la bonne topologie) la *compactification* de l'espace de modules. On peut montrer que lorsque  $\text{Ind}(a) - \text{Ind}(c) = 2$ , c'est une variété compacte à bord de dimension 1 avec

$$\partial \bar{\mathcal{L}}(a, c) = \bigsqcup_{b \in \text{Crit}_k(f)} \mathcal{L}(a, b) \times \mathcal{L}(b, c) .$$

et que l'orientation induite par  $\mathcal{L}(a, c)$  sur le bord est bien correspond bien à celle définie plus haut. Or, une telle variété est nécessairement l'union disjointe de variétés difféomorphes à  $S^1$  ou  $[0, 1]$ . Alors, le bord de la compactification est l'union de bouts de segments, qui viennent en paire d'orientation opposée. Donc, on a bel et bien  $\partial_X^2 = 0$ .

Maintenant que notre homologie est finalement construite et qu'on a vérifié que s'en était bien une, il ne reste plus à vérifier que notre construction est indépendante du choix de fonction de Morse et du pseudo-gradient. Pour cela, citons un résultat plus fort et surtout, plus parlant.

**Théorème IV.1** *Soient  $M$ , une variété compacte, et  $(f, X)$ , une paire Morse-Smale sur  $M$ . Alors, il existe un isomorphisme de complexe de chaînes*

$$F : C_*^{\text{CW}} \rightarrow C_*(f)$$

On peut donc retourner à notre exemple pour calculer l'homologie du tore!

EXEMPLE. Notre complexe de chaînes est

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}\langle d \rangle \rightarrow \mathbb{Z}\langle b, c \rangle \rightarrow \mathbb{Z}\langle a \rangle \rightarrow 0$$

Fixons une orientation sur le tore, par exemple celle induite par  $(\varphi, \theta)$  dans notre paramétrisation. Alors, en observant la figure 6, on note qu'il y a toujours deux courbes allant d'un point critique à un autre d'indice inférieur par un. Or, ces courbes ont toujours des orientations opposées; c'est donc que  $\partial_X \equiv 0$ ! Ainsi, on a directement que

$$HM_k(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$